Die Absteckung der kürzesten Transversale zu zwei windschiefen Geraden

Adolf Klingatsch [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **18** (4), S. 73–75

1920


```
@ARTICLE{Klingatsch_VGI_192007,
Title = {Die Absteckung der k{\"u}rzesten Transversale zu zwei windschiefen
   Geraden},
Author = {Klingatsch, Adolf},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {73--75},
Number = {4},
Year = {1920},
Volume = {18}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion: Hofrat Prof. Dr. Ing. h. c. E. Doležal und Baurat Ing. S. Wellisch.

Nr. 4. Wien, im Dezember 1920. XVIII. Jahrgang.

Die Absteckung der kürzesten Transversale zu zwei windschiefen Geraden.

Von **Prof. A. Klingatsch** in Graz.

Eine für die Grubenvermessung in Betracht kommende und unseres Wissens noch nicht behandelte Aufgabe ist die Absteckung der kürzesten Verbindung zwischen zwei Stollen oder Schächten.

Es wird hiebei vorausgesetzt, daß die ganze Grubenvermessung einheitlich koordiniert vorliegt, so daß die räumlichen Koordinaten der Polygonzüge, welche den beiden bereits ausgebauten Stollen- oder Schachtanlagen zugrunde liegen, bekannt sind.

Mit Benützung des Grubenplanes wird es nicht zweifelhaft sein, diejenigen Seiten der beiden Streckenzüge zu finden, zwischen welchen die kürzeste Verbindung hergestellt werden soll, so daß nur mehr die in der Ueberschrift gestellte Aufgabe zu lösen ist, welchem Zwecke die elementaren Formeln der analytischen Geometrie des Raumes dienen können, da die hier vorausgesetzten Daten unmittelbar durch die Höhenmessungen und die Berechnung des Polygonnetzes gegeben sind. Die Ermittlung der Unbekannten erfordert lediglich die Auflösung von zwei Paaren linearer Gleichungen.

Die beiden in Frage kommenden Polygonseiten g, g' sind durch die beiden Punkte $P_1 P_2$ resp. $P_1' P_2'$ hinsichtlich der drei Koordinaten gegeben. Hiebei soll die Z des räumlichen der ganzen Vermessung zur Grundlage dienenden Systems die Richtung der Vertikale haben.

Bekannt sind dann also für die zwei Punktpaare ihre Koordinaten

$$P_1 \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases}, \quad P_2 \begin{cases} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{cases}, \quad P_1' \begin{cases} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{cases}, \quad P_2' \begin{cases} x_2' \\ y_2' \\ z_2' \end{cases}$$

Die kürzeste Transversale t zu g und g' schneide g in S, hingegen g' in S'. Die Koordinaten

$$S \begin{cases} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{cases} \qquad S' \begin{cases} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{cases}$$

sind dann zu finden.

Man hat als Gleichungen der gegebenen Geraden g, g'

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ z &= mx + n \end{aligned} \quad \text{bezw.} \quad \begin{aligned} y &= a'x + b' \\ z &= m'x + n' \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots 1)$$

und für die gesuchte Transversale t:

$$\begin{aligned} y &= \alpha x + \beta \\ z &= \mu x + \nu \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

Dabei sind die Richtungskoeffizienten a, m, a', m' zu berechnen aus

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad m = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}, \quad a' = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}, \quad m' = \frac{z_2' - z_1'}{x_2' - x_1'}, \quad . \; 3)$$

während die Abschnitte b, b', n, n' aus

$$b = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}, \quad n = \frac{z_1 x_2 - z_2 x_1}{x_2 - x_1}, \quad b' = \frac{y_1' x_2' - x_1' y_2'}{x_2' - x_1'}, \quad n' = \frac{z_1' x_2' - z_2' x_1'}{x_2' - x_1'} \quad . \; 4)$$

folgen. Es handelt sich also um die Größen α, μ, β, ν in 2).

Die Bedingung für den Schnitt S von g und t gibt

$$x = -\frac{b - \beta}{a - \alpha} = -\frac{n - \nu}{m - \mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5)$$

Ebenso erhält man wegen des Schnittes von g' und t

$$x = -\frac{b' - \beta}{a' - \alpha} = -\frac{n' - \nu}{m' - \mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6)$$

Aus 5) und 6) folgen daher die beiden Gleichungen

$$(a - \alpha)(n - \nu) - (b - \beta)(m - \mu) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots 7)$$

$$(a' - \alpha)(n' - \nu) - (b' - \beta)(m' - \mu) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots 8)$$

Die Bedingung für die senkrechte Stellung von g und t resp. g' und t gibt aber bekanntlich die Gleichungen

$$a\alpha + m\mu + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9)$$

$$a'\alpha + m'\mu + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10)$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Die beiden Gleichungen 9) und 10) bestimmen die Richtungskoeffizienten α, μ in 2), womit sich aus 7) und 8) die beiden anderen Unbekannten β, ν ergeben. Setzt man diese Werte in 5) ein, so erhält man die Abszisse $x = \xi$ für S, während sich aus 6) die Abszisse $x = \xi'$ für S' ergibt.

Mit dem Werte $x = \xi$ folgt aus der linken der Gleichungen 1) oder aus 2) $y = \eta$ und $z = \zeta$ für S, während man mit $x = \xi'$ aus der rechten der Gleichungen 1) oder aus 2) $y = \eta'$ und $z = \zeta'$ für S' erhält. Damit sind die Koordinaten von S und S' im System der Vermessung gefunden, somit auch die Entfernungen $P_1 S$ oder $P_2 S$ respektive $P_1' S'$, $P_2' S'$, so daß S und S' abgesteckt werden können.

Für die Absteckung der Transversale t von S aus braucht man die Horizontalprojektion des Winkels zwischen t und g sowie die Neigung von t gegen den Horizont, während die analogen Daten für g' und t sich auf die Absteckung von S' aus beziehen.

Die betreffenden Elemente lassen sich aber leicht ableiten. So ist der Richtungswinkel der Horizontalprojektion von $P_1 P_2$, also jener von g, unmittelbar durch die Koordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ gegeben, jener von t aber durch die Richtungskoeffizienten α von t nach 9) resp. 10) bereits gefunden. Der Unterschied der betreffenden Richtungswinkel gibt daher die Richtung für den Durchbruch von S an. Ist h die Neigung von S nach S', so ist

$$\operatorname{tang} h = \frac{\zeta' - \zeta}{\sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 11)$$

Hiezu tritt jedoch noch eine Reduktion, da weder der Instrumentenmittelpunkt mit S noch der Zielpunkt mit S' zusammenfallen wird und die entsprechenden Abweichungen maßgebend für den tatsächlich einzustellenden Höhenwinkel sein werden, der sich aber, sowie diese Abweichungen den örtlichen Verhältnissen entsprechend gegeben sind, leicht ableiten läßt.

Die theoretische Länge s des kürzesten Durchschlages ist dann

$$s = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2}.$$

Aus der Praxis der Triangulierungs-Ausgleichung.

(Die Broch'sche Aufgabe.)

Von Baurat Ing. S. Wellisch.

An den Geometer tritt in der Praxis zuweilen die Aufgabe heran, eine Neumessung an Punkte einer älteren Aufnahme anzuschließen, z. B. wenn ein Teil eines älteren Planes auf Grund von drei diesem Plane entnommenen und in der Natur noch vorfindlichen Punkten auf graphischem Wege erneuert, oder wenn auf Grund einer ausnahmsweise graphisch durchgeführten Triangulierung eine Neuaufnahme bewirkt werden soll. Da nur in den seltensten Fällen die älteren, planlich dargestellten Punkte mit ihrer Lage in der Natur gut übereinstimmen werden, so obliegt es dann in der Regel dem Geometer, die in Betracht gezogenen Punkte durch zweckmäßige geringe Aenderungen ihrer Lage auf dem Plane mit der Natur in Uebereinstimmung zu bringen.

Hofrat A. Broch hat sich in seinen letzten Jahren viel mit dieser Aufgabe beschäftigt und verschiedene, zumeist graphische Lösungen versucht.

Im nachstehenden Aufsatze sei auf eine rechnerische Lösung dieser Aufgabe näher eingegangen.

Das ebene Dreieck ABC einer älteren Triangulierung soll als Grundlage für eine neue Triangulierung benützt werden. Es ergaben sich aber bei den Winkelmessungen gegenüber den aus den älteren Koordinaten der Dreieckspunkte abgeleiteten Dreieckswinkeln Differenzen, die teils auf eine nicht ganz strenge Ausgleichung des früheren Triangulierungsnetzes, teils auf unvermeidliche Fehler bei der Identifizierung der Punkte zurückzuführen sind. Es soll nun durch eine Aenderung der älteren Koordinaten den neuen Messungsergebnissen in der Weise Rechnung getragen werden, daß die Summe der Quadrate dieser Aenderungen $[dx^2] + [dy^2]$ ein Minimum werde. Wir bezeichnen:

1. Die Dreiecksseiten mit s_1, s_2, s_3;
2. die älteren Koordinaten der Dreieckspunkte A, B und C mit $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$;
3. die den Dreiecksseiten zukommenden Südwinkel in der Pfeilrichtung mit σ_1, σ_2, σ_3;