Paper-ID: VGI_192001

Die Ausgleichung von Abschlußfehlern, die Bestimmung der zulässigen maximalen Abschlußfehler in Dreiecken und geschlossenen Polygonen

Alexander Jankó [1]

[1] *ung. Oberforstrat, Selmeczbánya (Ungarn)*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **18** (1, 2), S. 1–10, 31–46

1920

BibTeX:


```
@ARTICLE{Janko_VGI_192001,
Title = {Die Ausgleichung von Abschlu{\ss}fehlern, die Bestimmung der zul{\"a}
    ssigen maximalen Abschlu{\ss}fehler in Dreiecken und geschlossenen
    Polygonen},
Author = {Jank{\'o}, Alexander},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {1--10, 31--46},
Number = {1, 2},
Year = {1920},
Volume = {18}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Baurat Ing. S. Wellisch.

Nr. 1. **Wien, im April 1920.** **XVIII. Jahrgang.**

Die Ausgleichung von Abschlußfehlern, die Bestimmung der zulässigen maximalen Abschlußfehler in Dreiecken und geschlossenen Polygonen.

Studie. Verfaßt von **Alexander Jankó**, ung. Oberforstrat, Selmeczbánya (Ungarn).

A. Die Ausgleichung der Winkel in Dreiecken.

I. Spitzwinklige Dreiecke.

Zur Ausgleichung des Abschlußfehlers δ — insofern derselbe innerhalb der zulässigen Grenzen bleibt und wir bei dem Messen der Winkel die gleiche Genauigkeit eingehalten haben — benützen wir ein Drittel des Abschlußfehlers δ auf Grund des Satzes, daß die Quadratsumme der benützten Verbesserungen kleiner sei, als die Summe der Quadrate aller möglichen Verbesserungen, stets vorausgesetzt, daß die Summe der Verbesserungen gleich dem Abschlußfehler sei.

Die bei der Ausgleichung des Abschlußfehlers dreimal benützten $^1/_3\,\delta$ sind tatsächlich jene Korrektionen, bei welchen die Summe der Quadrate kleiner ist, als das Quadrat irgend welcher drei Verbesserungen, welche insgesamt dem Abschlußfehler gleichkommen.

Doch ist dieser Ausgleich vermittelst eines Drittels des Abschlußfehlers bei der Verbesserung der Winkel des Dreieckes — mit Rücksicht darauf, daß diese verbesserten, also veränderten Winkel zur Berechnung der Seitenlängen wie auch der Koordinaten dienen — nur dann als einwandfrei zu betrachten, *wenn die relativen Werte der damit verbundenen Seitenlängenveränderungen unter sich gleich sind, ja man soll eben aus den angeführten Gründen ab ovo von dem Satze ausgehen: es ist bei der Ausgleichung der Dreieckswinkel ein solches Verfahren einzuschlagen, welches bei der Ausgleichung bezw. Veränderung der Winkel eine unter sich gleiche relative Veränderung der Seitenlängen bedingt.*

Untersuchen wir nun, inwiefern jenes Ausgleichungsverfahren, bei welchem ein Drittel des Abschlußfehlers benützt wird, also alle Winkel eine gleich große Veränderung erfahren, diesen Anforderungen entspricht.

Bezeichnen wir zu diesem Zwecke die Winkel eines beliebigen Dreieckes mit α, β und γ, die den Winkeln gegenüberliegenden Dreiecksseiten mit a, b und c; da, db und dc sollen die absoluten Längenänderungen der Dreiecksseiten bedeuten, wenn die Winkel alle mit demselben Werte $\triangle = \frac{\delta}{3}$ geändert werden; es soll zugleich:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180 = 0, \quad \text{und angenommen noch, daß}$$
$$\alpha < \beta < \gamma \quad \text{wird also}$$
$$a < b < c.$$

Nach dem Sinussatze ist:

$$1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

Im Falle einer Veränderung der Winkel also:

$$2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \frac{\sin (\alpha + \triangle)}{\sin (\gamma + \triangle)} = \frac{a + da}{c + dc},$$

und weil die Winkelveränderung $\triangle$ des kleineren Winkels α eine größere Veränderung in der Sinusfunktion desselben hervorruft, als die gleiche Winkelveränderung in der Sinusfunktion des größeren Winkels γ, können wir schreiben:

$$\frac{\sin (\alpha + \triangle)}{\sin (\gamma + \triangle)} > \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad \text{bezw.}$$

$$\frac{a + da}{c + dc} > \frac{a}{c} \quad \text{oder}$$

$$a \cdot c + c \cdot da > a \cdot c + a \cdot dc \quad \text{und hieraus}$$

$$3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \frac{da}{a} > \frac{dc}{c},$$

also die gleiche Veränderung des Winkels verursacht keine unter sich gleiche relative Veränderung der Seitenlängen, ja im angenommenen Falle ist sogar die relative Veränderung der dem kleineren Winkel gegenüberliegenden kürzeren Dreieckseite größer, als jene der dem größeren Winkel gegenüberliegenden längeren Dreieckseite.

Wenn wir die Winkelgröße um denselben Winkelwert $\triangle$ verkleinert hätten, wäre das Resultat der obigen Erörterungen:

$$3a) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \frac{da}{a} < \frac{dc}{c},$$

d. h. die dem kleineren Winkel gegenüberliegende kürzere Dreieckseite hätte eine geringere relative Längenveränderung erlitten, als die dem größeren Winkel gegenüberliegende längere Dreieckseite, aber unter sich wären diese Veränderungen auch in diesem Falle nicht gleich.

Eine gleiche relative Veränderung der Seitenlänge würde nur durch eine gleiche Veränderung von untereinander ganz oder wenigstens annähernd gleichen Winkeln hervorgerufen, also in gleichseitigen Dreiecken.

Eine Winkelausgleichung aber, welche nur in einem speziellen Falle zu unter einander gleichen relativen Veränderungen der Seitenlängen führt, in jedem anderen Falle aber nicht, im Gegenteil, an kürzeren Dreieckseiten eine relativ größere Veränderung hervorrufen kann, als an den längeren Dreieckseiten, ist in Anbetracht des vorher aufgestellten Satzes und der weiteren Ziele der Ausgleichung nicht als richtig und gerecht zu betrachten.

Wir müssen also ein Ausgleichungsverfahren suchen, welches ermöglicht, daß bei der Verbesserung eine unter sich relativ gleiche Veränderung der Seitenlängen eintrete, also der Bedingungsgleichung:

4) . . . . $\frac{da}{a} = \frac{db}{b} = \frac{dc}{c}$ entspricht.

Die einzelnen Glieder dieser Bedingungsgleichung sind die auf die Längeneinheit der Dreieckseiten entfallenden Veränderungen. Die Gleichung bedeutet auch, daß unter den absoluten Längenänderungen der Dreieckseiten dasselbe Verhältnis besteht, wie zwischen den entsprechenden Seitenlängen:

4 a) . . . . $da : db : dc = a : b : c.$

Und da

5) . . . . . $\frac{da}{db} = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, $\frac{da}{dc} = \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$

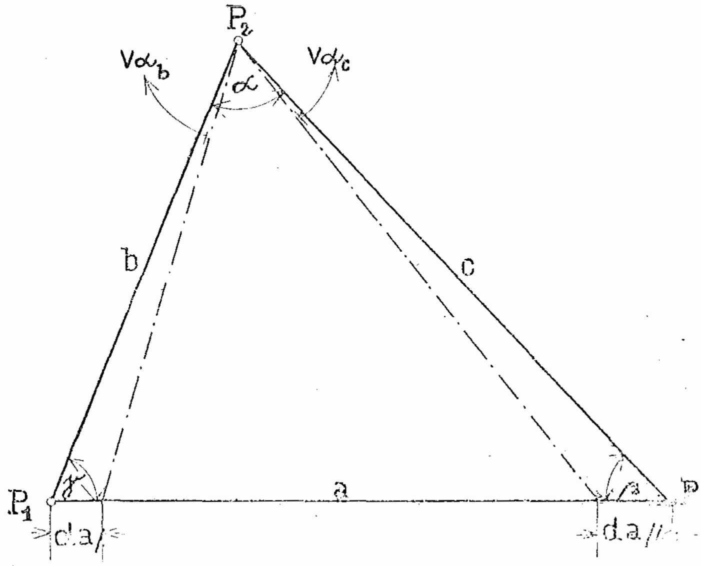

Fig. 1.

auch richtige Verhältnisse sind, bedeutet die Gleichung auch, daß die absoluten Veränderungen der Seitenlängen in demselben Verhältnis zu einander stehen, wie die Sinusfunktionen der entsprechenden Winkel.

Um nun eine diesen Bedingungen entsprechende Ausgleichung finden zu können, bezeichnen wir die gemessenen Winkel eines Dreieckes mit α, β und γ, mit $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ die den gemessenen Winkeln gegenüberliegenden Dreieckseiten; $v\alpha$, $v\beta$ und $v\gamma$ sollen die an den gemessenen Winkeln vorzunehmenden Verbesserungen bedeuten, da, db und dc die infolge der Winkelverbesserungen eintretenden Veränderungen der Seitenlängen und δ den Abschlußfehler, dessen Größe laut der Formel

6) . . . . $180^0 - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta$

bekannt ist.

(NB. Ich benützte hier — abweichend von dem allgemeinen Gebrauch — die obige 6. Formel zur Bestimmung des Abschlußfehlers, weil auf diese Weise die Verbesserungen das gleiche Vorzeichen bekommen, wie der Abschlußfehler.)

Die Längenveränderungen der einzelnen Dreieckseiten — da die diese hervorrufenden Winkelverbesserungen geringe Winkelwerte besitzen — können wir mit den Bogenlängen (Arcus) der Verbesserungen ausdrücken, u. zw. laut Figur 1 derart, daß wir die auf die einzelnen Winkel entfallenden Verbesserungen als aus zwei Teilen bestehend betrachten, von welchen der eine mit dem einen, der andere Teil mit dem anderen Schenkel jene zwei Arcus liefert, welche zusammen die Veränderung der dem zu verbessernden Winkel gegenüberliegenden Dreieckseite ergeben; es wird also infolgedessen jede der Winkelverbesserungen

7) . . . $v\alpha = v\alpha_b + v\alpha_c, \quad v\beta = v\beta_a + v\beta_c, \quad v\gamma = v\gamma_a + v\gamma_b$

aus zwei neben den anderen beiden Schenkeln liegenden Teilen bestehen; hinwieder wird sich auch die Seitenlängenveränderung aus diesen den beiden Winkelverbesserungsteilen gegenüberliegenden Teilen zusammensetzen:

8) $da = da/. + da//.$, 8 a) $db = db/. + db//.$, 8 b) $dc = dc/. + dc//.$

worin

9) . . . . $da/. = \frac{v\alpha_b \cdot b}{\varrho \cdot \sin\gamma}$ $\quad da//. = \frac{v\alpha_c \cdot c}{\varrho \cdot \sin\beta}$

9 a) . . . . $db/. = \frac{v\beta_a \cdot a}{\varrho \cdot \sin\gamma}$ $\quad db//. = \frac{v\beta_c \cdot c}{\varrho \cdot \sin\alpha}$

9 b) . . . . $dc/. = \frac{v\gamma_a \cdot a}{\varrho \cdot \sin\beta}$ $\quad dc//. = \frac{v\gamma_b \cdot b}{\varrho \cdot \sin\alpha}$

Vorläufig setzen wir zum Zwecke der Bestimmung der Verbesserung des Winkels α die unter 9) angegebenen Werte in die Formel 8) ein; dies ergibt:

10) . . . . $da = \frac{v\alpha_b \cdot b}{\varrho \cdot \sin\gamma} + \frac{v\alpha_c \cdot c}{\varrho \cdot \sin\beta}$,

wo $\varrho = 206264{\cdot}806'' = 206265''$.

Ein gerades Verhältnis zwischen den durch die einzelnen Teile der Winkelverbesserung hervorgerufenen Seitenlängenveränderungen und den dazugehörigen Schenkeln, als Radienlängen angenommen, können wir schreiben:

$$\frac{da/.}{da//.} = \frac{b}{c}, \text{ bezw. } \frac{da/.}{b} = \frac{da//.}{c},$$

also mit den unter 9) angegebenen Werten

$$\frac{v\alpha_b \cdot b}{\varrho \cdot \sin\gamma \cdot b} = \frac{v\alpha_c \cdot c}{\varrho \cdot \sin\beta \cdot c}, \text{ woraus}$$

$$\frac{v\alpha_b}{v\alpha_c} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \text{ oder}$$

$$\frac{v\alpha_b + v\alpha_c}{v\alpha_c} = \frac{v\alpha}{v\alpha_c} = \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\beta}, \text{ also}$$

11) . . . . $v\alpha_c = v\alpha \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\beta + \sin\gamma}$ und ebenso

$$v\alpha_b = v\alpha \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta + \sin\gamma}, \text{ weiter noch}$$

$$b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Diese Werte in die unter 10) angeführten Formeln eingesetzt, wird — nach Durchführung der sich darbietenden Kürzungen —

$$da = \frac{v\alpha \cdot a}{\varrho \cdot \sin\alpha}, \quad \text{bezw.}$$

12) . . . . $$\frac{da}{a} = \frac{v\alpha}{\varrho \cdot \sin\alpha}.$$

Dasselbe Verfahren ergibt für den Winkel β:

11 a) $$v\beta_a = v\beta \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\gamma} \quad \text{und} \quad v\beta_c = v\beta \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\gamma}$$

$$a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad c = b \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

welche Werte, in die Formeln 8a bezw. 9a eingesetzt, ergibt nach Vornahme der Abkürzungen:

$$db = \frac{v\beta \cdot b}{\varrho \cdot \sin\beta}, \quad \text{bezw.}$$

12 a) . . . . $$\frac{db}{b} = \frac{v\beta}{\varrho \cdot \sin\beta}.$$

Schließlich dasselbe Verfahren auf den dritten Winkel γ angewendet:

12 b) . . . . $$\frac{dc}{c} = \frac{v\gamma}{\varrho \cdot \sin\gamma}.$$

Weil aber laut der Bedingungsgleichung unter 4) die relativen Werte der Seitenlängenveränderungen unter sich gleich sind, in den Formeln 12, 12a und 12b aber die relativen Veränderungen der Seitenlängen ausgedrückt sind, folgt aus der Gleichheit derselben, daß

13) . . . . $$\frac{v\alpha}{\sin\alpha} = \frac{v\beta}{\sin\beta} = \frac{v\gamma}{\sin\gamma}$$

zwischen den Winkelverbesserungen und den dazu gehörigen Sinusfunktionen der zu korrigierenden Winkel ein direktes Verhältnis besteht, was zugleich soviel bedeutet, daß das Gewicht der einzelnen Winkel beim Winkelausgleich in der Sinusfunktion des betreffenden Winkels zum Ausdruck kommt; wir erhalten also hier zugleich das Gewicht, das Moment, mit welchem jeder Winkel an der Korrektion teilnimmt.

Auf Grund der obigen Formel 13) können wir schreiben:

14) . . . . . $$v\beta = v\alpha \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad v\gamma = v\alpha \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Weil jedoch die Summe der Winkelverbesserungen mit dem Abschlußfehler gleich ist:

15) . . $$\delta = v\alpha + v\beta + v\gamma = v\alpha + v\alpha \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + v\alpha \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} =$$

$$= v\alpha \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha},$$

infolgedessen ist die Verbesserung des Winkels α:

$$16) \ldots\ldots\quad v\alpha = \frac{\delta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \cdot \sin\alpha$$

und die Verbesserung der Winkel β und γ, mit Hilfe der Formel 14)

$$16\text{a}) \ldots\ldots\quad v\beta = \frac{\delta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \cdot \sin\beta$$

$$16\text{b}) \ldots\ldots\quad v\gamma = \frac{\delta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \cdot \sin\gamma,$$

welche Werte mittels des Abschlußfehlers und der Sinusfunktion der gegebenen, noch nicht korrigierten Winkel zu berechnen sind.

Wenn wir die mit Hilfe der so abgeleiteten Formeln berechneten Werte der Winkelverbesserungen betrachten, sehen wir, daß die Größe der Verbesserungen bei demselben Abschlußfehler und bei denselben Winkelangaben von der Größe der Sinusfunktion der zu verbessernden Winkel abhängt; je größer die Sinusfunktion des zu verbessernden Winkels, um so größer die hierauf entfallende Verbesserung; da zu einem größeren Winkel (bis 90^0) eine größere Sinusfunktion gehört, hängt die Größe der Verbesserung von der Winkelgröße ab, und mit der Zunahme des Winkels wächst auch die Verbesserung; bei ganz oder annähernd gleichen Winkeln, also in gleichseitigen Dreiecken, werden die Verbesserungen unter sich gleich groß sein und ein Drittel des Abschlußfehlers ausmachen.

Es läßt sich also folgende Regel aufstellen:

I. Regel. *In spitzwinkeligen Dreiecken erhalten wir die Verbesserungen der einzelnen Winkel, wenn wir den zulässigen Abschlußfehler durch die Summe der Sinusse der gemessenen Winkel teilen und das Ergebnis mit dem Sinus der einzelnen gemessenen Winkel multiplizieren.*

Wenn wir nun die laut den obigen Formeln 16, 16a und 16b erhaltenen Werte in die Formel 12 einsetzen, sehen wir, daß

$$17) \ldots\ldots\quad \frac{da}{a} = \frac{\delta}{\varrho \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)}$$

$$\frac{db}{b} = \frac{\delta}{\varrho \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{\delta}{\varrho \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)}$$

die relativen Veränderungen der Seitenlängen alle mit demselben Werte, also auch untereinander gleich sind, wir also unserer Bedingungsgleichung entsprochen haben.

Wenn wir die nach Formel 16, 16a und 16b berechneten Verbesserungen laut ihren Vorzeichen zu den betreffenden Winkeln geben, erhalten wir die verbesserten Winkelwerte.

Anmerkung.

Wenn wir behufs Bestimmung des Winkelausgleiches die Formel

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

differenzieren und nach der Gleichheit der relativen Seitenlängenänderungen ordnen, erhalten wir zur Verbesserung der einzelnen Winkel folgende Werte:

$$v\alpha = \frac{\delta}{\operatorname{tng}\alpha + \operatorname{tng}\beta + \operatorname{tng}\gamma} \cdot \operatorname{tng}\alpha$$

$$v\beta = \frac{\delta}{\operatorname{tng}\alpha + \operatorname{tng}\beta + \operatorname{tng}\gamma} \cdot \operatorname{tng}\beta$$

$$v\gamma = \frac{\delta}{\operatorname{tng}\alpha + \operatorname{tng}\beta + \operatorname{tng}\gamma} \cdot \operatorname{tng}\gamma$$

Die mit Hilfe dieser Formeln berechenbaren Verbesserungen sind aber nicht richtig, denn sie ergeben für die nahe an 90^0 betragenden Winkel zu große, für die anderen beiden Winkel dagegen zu kleine Verbesserungen, und wenn der eine Winkel ein rechter ist, sein Tangenswert also unendliche Größe hat, erhalten wir für die beiden anderen Winkel eine Verbesserung von 0, für den rechten Winkel hingegen den Abschlußfehler selbst; diese Verbesserungen ergeben also keine gleichen relativen Veränderungen der Seitenlängen.

II. Die Bestimmung des zulässigen, also maximalen Winkelabschlußfehlers.

Die Grundlage der Genauigkeit mittelbarer oder unmittelbarer Messungen ist die Genauigkeit der Länge der abgemessenen oder abgeleiteten Entfernungen, und den Maßstab der Genauigkeit gibt die Größe des bei der Länge der Entfernungen gestatteten Fehlers. Auf dieselbe Grundlage müssen wir auch die Genauigkeit der Winkelmessungen zurückführen, d. h. bei den Winkelmessungen kann nur ein solcher maximaler Fehler gestattet werden, welcher an der Länge der mit dem Winkel im Zusammenhange stehenden Dreieckseiten nur einen innerhalb der gestatteten Grenzen bleibenden Fehler nach sich zieht.

Wenn wir also auf dieser Grundlage in der Bedingungsgleichung 4) die unter sich gleichen relativen Längenveränderungen dem bei den Dreieckseiten gestatteten maximalen Fehler $\frac{1}{q}$ gleich stellen

18) . . . . $\frac{da}{a} = \frac{db}{b} = \frac{dc}{c} = \frac{1}{q}$, also

$$da = \frac{a}{q}, \qquad db = \frac{b}{q} \quad \text{und} \quad dc = \frac{c}{q},$$

wo q je nach der gewünschten Genauigkeit gleich 1000, 2000, 5000, 10000, 50000 oder 100000 ist, dann in Formel 17 an Stelle von $\frac{da}{a}, \frac{db}{b}$ und $\frac{dc}{c} = \frac{1}{q}$ und an Stelle des Abschlußfehlers δ den Wert δ_{max} stellen, wird:

$$\frac{1}{q} = \frac{\delta_{max}}{\varrho \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)}$$

und hieraus der zulässige maximale Abschlußfehler:

19) . . . . $\delta_{max} = \frac{\varrho}{q} \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$.

Die zweite Regel wird also lauten:

II. Regel. *Bei spitzwinkeligen Dreiecken erhalten wir den maximalen Winkelabschlußfehler, wenn wir den Radianten* ($\varrho'' = 206265''$) *durch die Verhältniszahl* *des bei der Seitenlänge gestatteten Fehlers teilen und das Ergebnis mit der Summe der Sinus der gemessenen Winkel des Dreiecks multiplizieren.*

Den laut dieser Regel und laut Formel 19 berechneten, zulässigen Winkelabschlußfehler dem Abschlußfehler δ der gemessenen Winkel gegenübergestellt, ersehen wir, ob wir einen bei der Winkelmessung erhaltenen zulässigen, also korrigierbaren, oder einen groben Messungsfehler vor uns haben. Wenn der Abschlußfehler δ der gemessenen Winkel kleiner ist, als der berechnete zulässige Abschlußfehler, dann wird die an den Winkeln laut der Formel 16 vorgenommene Verbesserung an den Seitenlängen eine innerhalb des zulässigen q-ten Teiles bleibende Veränderung hervorrufen, die Verbesserung ist also auf die angegebene Weise durchführbar, anderenfalls aber stehen wir einem groben Messungsfehler gegenüber, bezw. wurde die Winkelmessung nicht mit der nötigen Sorgfalt durchgeführt und müssen wir in diesem Falle zwecks Durchführung der Verbesserung — allenfalls vermittelst neuerlicher Messung — die Erreichung eines innerhalb des berechneten bleibenden Abschlußfehlers anstreben.

Falls die gemessenen Winkel unter einander ganz oder nahezu gleich sind, also

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^0 \text{ und}$$

$$\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \sin 60^0 = 0{\cdot}866025$$

wird der zulässige Abschlußfehler

$$\delta_{max} = \frac{\varrho}{q} \cdot 3 \cdot 0{\cdot}866025 = \frac{206265'' \cdot 2{\cdot}598075}{q} = \frac{535891{\cdot}94''}{q} \text{ sein.}$$

Die zulässigen maximalen Winkelabschlußfehler lassen sich sowohl in gleichwinkeligen wie auch in verschieden große Winkel besitzenden Dreiecken im voraus berechnen und in Tabellen zusammenzufassen, von wo sie im Gebrauchsfalle entnommen werden können.

Natürlich ist bei Anwendung des besprochenen Ausgleichungsverfahrens zuerst laut Formel 19 der zulässige maximale Abschlußfehler zu ermitteln, dieser ist dem laut Formel 6 zu berechnenden Abschlußfehler des gemessenen Winkels gegenüberzustellen; an die Berechnung der Verbesserungen laut Formel 16 wird erst dann herangetreten, wenn der Abschlußfehler des gemessenen Winkels kleiner ist, als der zulässige, oder diesem nahezu gleich kommt.

B e i s p i e l.

Zur Erläuterung der besprochenen Verfahren diene folgendes Beispiel:

$$\alpha = 24^0\, 36'\, 25''$$
$$\beta = 65^0\, 48'\, 45''$$
$$\underline{\gamma = 89^0\, 35'\, 50''}$$

sind die Messungsresultate in einem Dreiecke und $180^0\, 01'\, 00''$ ist die Summe der gemessenen Winkel; der Abschlußfehler ist also:

6) . . . . . $\delta = 180^0 - (180^0\, 01'\, 00'') = -1' = -60''$.

Der zulässige Fehler der Seitenlängen sei:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{8000}, \text{ also } q = 8000.$$

Die Sinuswerte der gemessenen Winkel sind:

$$\sin\alpha = 0{\cdot}416391$$
$$\sin\beta = 0{\cdot}912209$$
$$\sin\gamma = 0{\cdot}999976 \quad \text{und deren Summe:}$$
$$\text{«sin»} = 2{\cdot}328576.$$

Der zulässige maximale Abschlußfehler wird laut Formel 19 betragen:

$$19) \ldots \delta_{max} = \frac{206265'' \cdot 3{\cdot}328576}{8000} = 25{\cdot}783 \cdot 2{\cdot}328576 = 60{\cdot}038''.$$

Da also der tatsächliche Abschlußfehler kleiner ist, als der berechnete maximale, kann die Verbesserung erfolgen; diese wird laut den Formeln 16

$$16) \ldots\ldots v\alpha = \frac{-60''}{2{\cdot}328576} \cdot 0{\cdot}416391 = -10{\cdot}728''$$

$$16a) \ldots\ldots v\beta = \frac{-60''}{2{\cdot}328576} \cdot 0{\cdot}912209 = -23{\cdot}506''$$

$$16b) \ldots\ldots v\gamma = \frac{-60''}{2{\cdot}328576} \cdot 0{\cdot}999976 = -25{\cdot}766'' \quad \text{und deren Summe}$$
$$-\delta = -60{\cdot}000''.$$

Diese Verbesserungen weichen bei besonders kleineren und größeren Winkeln erheblich von dem Drittel des Abschlußfehlers, also einer Verbesserung von je 20'', ab und besitzen bei größeren Winkeln größere Werte, als bei kleineren.

Nach Durchführung der berechneten Verbesserungen, wird der relative Fehler resp. die Aenderung der Seitenlängen nach Formel 12

$$12) \ldots \frac{da}{a} = \frac{-10{\cdot}728''}{206265'' \cdot 0{\cdot}416391} = -0{\cdot}0001249 = \frac{-1}{8005}$$

$$12a) \ldots \frac{db}{b} = \frac{-23{\cdot}506''}{206265'' \cdot 0{\cdot}912209} = -0{\cdot}0001249 = \frac{-1}{8005}$$

$$12b) \ldots \frac{dc}{c} = \frac{-25{\cdot}766''}{206265'' \cdot 0{\cdot}999976} = -0{\cdot}0001249 = \frac{-1}{8005}$$

oder nach Formel

$$17) \quad \frac{da}{a} = \frac{db}{b} = \frac{dc}{c} = \frac{-60''}{206265'' \cdot 2{\cdot}328576} = -0{\cdot}0001249 = \frac{-1}{8005},$$

es sind also bei der angewendeten Verbesserung die relativen Veränderungen der Seitenlängen unter sich gleich groß und ergeben nahezu 1/8000 der Seitenlänge.

Die Seitenlängen des Dreieckes ergeben, wenn wir Seite $\underline{a}$ als bekannt annehmen:

$$b = a \cdot \frac{\sin(\beta - v\beta)}{\sin(\alpha - v\alpha)} = a \cdot \frac{0{\cdot}912163}{0{\cdot}416344} = 2{\cdot}190888 \ldots a$$

$$c = a \cdot \frac{\sin(\gamma - v\gamma)}{\sin(\alpha - v\alpha)} = a \cdot \frac{0{\cdot}999975}{0{\cdot}416344} = 2{\cdot}401800 \ldots a$$

Die rechtwinkeligen Koordinaten von Punkt P_2, wenn Punkt P mit dem Mittelpunkte des Axensystems zusammenfällt und Seite $PP_1 = a$ auf der $+X$-Axe liegt, sind:

$$Y_{P_2} = c \cdot \sin(\beta - v\beta) = 2{\cdot}401800 \cdot 0{\cdot}912163 \cdot a = 2{\cdot}190733 \cdot a$$
$$X_{P_2} = c \cdot \cos(\beta - v\beta) = 2{\cdot}401800 \cdot 0{\cdot}409828 \cdot a = 0{\cdot}984325 \cdot a$$

Wenn wir dagegen die Winkel mit $^1/_3$ des Abschlußfehlers, also mit je 20″ verändern, betragen die relativen Aenderungen der Seitenlängen:

$$\frac{da}{a} = \frac{-20''}{206265'' \cdot 0{\cdot}416391} = -0{\cdot}0002329 = \frac{-1}{4294}$$

$$\frac{db}{b} = \frac{-20''}{206265'' \cdot 0{\cdot}912209} = -0{\cdot}0001063 = \frac{-1}{9408}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{-20''}{206265'' \cdot 0{\cdot}999976} = -0{\cdot}0000970 = \frac{-1}{10311},$$

sind also von einander abweichend und bei den den kleineren Winkeln gegenüberliegenden kürzeren Seiten größer, als bei den den größeren Winkeln gegenüberliegenden längeren Seiten.

Die Längen der Dreieckseiten b und c sind:

$$b' = a \cdot \frac{\sin(\beta - 20'')}{\sin(\alpha - 20'')} = a \cdot \frac{0{\cdot}912170}{0{\cdot}416303} = 2{\cdot}191130 \ldots a$$

$$c' = a \cdot \frac{\sin(\gamma - 20'')}{\sin(\alpha - 20'')} = a \cdot \frac{0{\cdot}999975}{0{\cdot}416303} = 2{\cdot}402037 \ldots a,$$

es zeigt sich also in dem angenommenen Falle eine ziemlich erhebliche Abweichung zwischen den auf Grund der vermittelst zweierlei Verbesserungsverfahren erhaltenen Winkel berechneten Seitenlängen, da wir — die Seite a mit nur 1000 Einheiten angenommen — bei der letzteren Verbesserung die Länge der Seite b um 0·242 Einheiten, der Seite c hingegen um 0·237 Einheiten größer erhalten, als wenn wir die Winkelverbesserung der gleichen relativen Aenderung der Seitenlänge entsprechend vornehmen.

Die auf dasselbe Axensystem bezogenen rechtwinkeligen Koordinaten sind:

$$Y'_{P_2} = c' \cdot \sin(\beta - 20'') = 2{\cdot}402037 \cdot 0{\cdot}912170 \cdot a = 2{\cdot}191066 \cdot a$$

$$X'_{P_2} = c' \cdot \cos(\beta - 20'') = 2{\cdot}402037 \cdot 0{\cdot}409813 \cdot a = 0{\cdot}984385 \cdot a,$$

wir erhalten also bei der Verbesserung vermittelst eines Drittels des Abschlußfehlers auch die rechtwinkeligen Koordinaten von Punkt P_2 des angenommenen Dreieckes größer.

Diese aus den Verschiedenheiten des Verbesserungsverfahrens fließenden Abweichungen entbehren der Begründung und sind also auch nicht annehmbar.

(Fortsetzung folgt.)

Geodätische Fach- und Standesfragen bei den Agrarischen Operationen.

Von Agrarobergeometer **Josef Degn** in Wien.

Die Agrarischen Operationen sind die Gesamtheit der staatlich organisierten Maßnahmen, die die Hebung der land- und forstwirtschaftlichen Produktion bezwecken. Als solche Maßnahmen kommen in Betracht: die Zusammenlegung zersplitterten Grundbesitzes; die Teilung gemeinschaftlicher Grundstücke; die Regelung des Servitutwesens; endlich kulturtechnische Arbeiten zur Verbesserung der Bodenbeschaffenheit, als da sind: Bewässerungs- und Entwässerungsanlagen, Alpen- und Weidemeliorationen, Nutzteichanlagen, Wegbauten. Neuestens ist den

«Beulen» (kürzere bleibende Wellen) entstehen, welche die Bandlänge beeinflußen; deshalb ist auch zum Aufrollen und für den Transport ein Ring von möglichst großem Durchmesser anzuwenden.[1])

Die Ausgleichung von Abschlußfehlern, die Bestimmung der zulässigen maximalen Abschlußfehler in Dreiecken und geschlossenen Polygonen.

Studie. Verfaßt von Alexander Jankó, ung. Oberforstrat, Selmeczbánya (Ungarn).

A. Die Ausgleichung der Winkel in Dreiecken.

(Fortsetzung und Schluß.)

III. Die Verbesserung in schiefwinkeligen Dreiecken.

Das im vorigen Kapitel beschriebene Verbesserungsverfahren ist ohne alle Schwierigkeiten und Zweifel immer anwendbar, solange kein Winkel des Dreieckes den rechten Winkel überschreitet. Wenn aber ein Winkel des Dreieckes größer ist als 90°, dann müßte zur Verbesserung der Sinuswert des Ergänzungswinkels des über 90° betragenden Winkels herangezogen werden, wogegen aber verschiedene Zweifel und berechtigte Einwände erhoben werden können.

So ist in erster Reihe anfechtbar, daß nicht der gemessene Winkel selbst, sondern ein anderer — der Ergänzungswinkel — bei den Berechnungen benützt wird; weiters ist anfechtbar, daß — die Sinusfunktion der beiden anderen kleineren Winkel in Rechnung gezogen — beim dritten, erheblich größeren Winkel nicht die entsprechende erheblich größere Sinusfunktion, sondern die kleinere Sinusfunktion des kleineren Ergänzungswinkels in Rechnung kommt, infolgedessen bestünde zwischen den berechneten Verbesserungsgrößen nicht jenes Verhältnis, welches zwischen den der Größe der Winkel entsprechenden Sinusfunktionen besteht, und schließlich der schwerwiegendste Einwand wäre der, daß wir die vermittelst der Sinusfunktion des Ergänzungswinkels berechnete Verbesserung nicht am Ergänzungswinkel, sondern an dem viel größeren, 90° übersteigenden Winkel durchführen. Zur Verbesserung des Ergänzungswinkels aber können wir die mit Hilfe dieses Winkels berechnete Verbesserung auch nicht verwenden, denn im Falle einer solchen Verwendung müßten wir — während wir die beiden anderen Winkel verkleinern, infolgedessen auch den Ergänzungswinkel verkleinern müssen — den dritten, über 90° betragenden Winkel des Dreieckes vergrößern, es würden also zwei Winkel des Dreieckes verkleinert und der dritte vergrößert, bezw. umgekehrt, wenn der Abschlußfehler die Vergrößerung der Winkel verlangen würde.

Infolge dieser berechtigten Einwände müssen wir also zur Berechnung der Verbesserungen in Dreiecken, die über 90-gradige Winkel haben, ein solches

[1]) Die in den Vereinigten Staaten (Coast and Geodetic Survey) gebrauchten, von J. H. Agar Baugh (London) gelieferten drei Invarbänder werden beispielsweise für den Transport auf eine Aluminiumtrommel von rund 40 *cm* Durchmesser aufgerollt. Eine merkliche Längenänderung hat sich nicht gezeigt, obwohl z. B. das eine Invarband mehrere hundertmal auf- und abgerollt worden ist.

Verfahren suchen, welches diese Mängel vermeidet und dabei die Berechnung nicht erschwert, sondern ebenso einfach macht, wie es in den vorhergehenden Kapiteln bezüglich der spitzwinkeligen Dreiecke beschrieben war.

Um zu einer solchen Lösung zu gelangen, nehmen wir ein theoretisches gleichschenkliges Dreieck an, dessen Spitze in das Unendliche fällt, der dort befindliche Winkel also 0 Grad beträgt, die beiden anderen aber je 90^0, bezw. auf Grund den an diesen anstellbaren Messungen nahezu 90^0, der Winkelabschlußfehler sei δ.

Da nun $\sin \alpha = \sin 0^0 = 0$

$\sin \beta = \sin \gamma = \sin 90^0 = 1.000000$ sind,

werden die Verbesserungen der einzelnen Winkel laut Formel 16 folgende sein:

$$v\alpha = \frac{\delta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} \cdot \sin \alpha = \frac{\delta \cdot 0}{0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0} = 0$$
$$v\beta = \frac{\delta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} \cdot \sin \beta = \frac{\delta \cdot 1 \cdot 0}{0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0} = \frac{\delta}{2}$$
$$v\gamma = \frac{\delta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} \cdot \sin \gamma = \frac{\delta \cdot 1 \cdot 0}{0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0} = \frac{\delta}{2},$$

d. h. bei dem 0^0 großen Winkel wird der Verbesserungswert das Minimum, bezw. 0, bei den beiden anderen 90-gradigen Winkeln aber je die Hälfte des unverändert bleibenden Abschlußfehlers betragen. Bei den Berechnungen dieser Verbesserungen kommt bezüglich des 0 Grade großen Winkels das Minimum der Sinusfunktion, bei den rechten Winkeln aber das Maximum dieser Funktion, d. h. 1·000000 in Rechnung.

Stellen wir uns jetzt die beiden, sich im Unendlichen kreuzenden Schenkel mit gleichem Winkel nach einer Seite verschwenkt vor, so daß

$\beta' < 90^0$ und $\gamma' > 90^0$ sei.

Infolge des Umstandes, daß die Größe der Verbesserungen sich mit der Größe der Sinusfunktion der Winkel und damit auch mit der Größe der Winkel ändert und bei einem 0-gradigen Winkel auch auf 0 sinken kann, muß die auf den früheren 90-gradigen Winkel β entfallende Verbesserung $\frac{\delta}{2}$ jetzt sinken und ergibt die auf β' entfallende Verbesserung $v\beta'$, dagegen wird die auf den früheren rechten Winkel γ entfallende Verbesserung $\frac{\delta}{2}$ um denselben Wert steigen, um die dem Winkel γ' entsprechende Verbesserung $v\gamma'$ ergeben zu können. Diese Abweichungen von $\frac{\delta}{2}$ müssen, da ja beim dritten Winkel keine Verbesserung eintritt, bei unverändertem Abschlußfehler unter einander gleich sein, damit die Summe der Verbesserungen in beiden Fällen den unveränderten Abschlußfehler ergeben könne, also:

$$v\beta + v\gamma = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$
$$v\beta' + v\gamma' = \left(\frac{\delta}{2} - x\right) + \left(\frac{\delta}{2} + x\right) = \delta.$$

Diese mit x bezeichnete Veränderung der Verbesserungen können wir nach Figur 2 mit Hilfe des Sinus jenes Winkels in unsere Berechnungen einstellen,

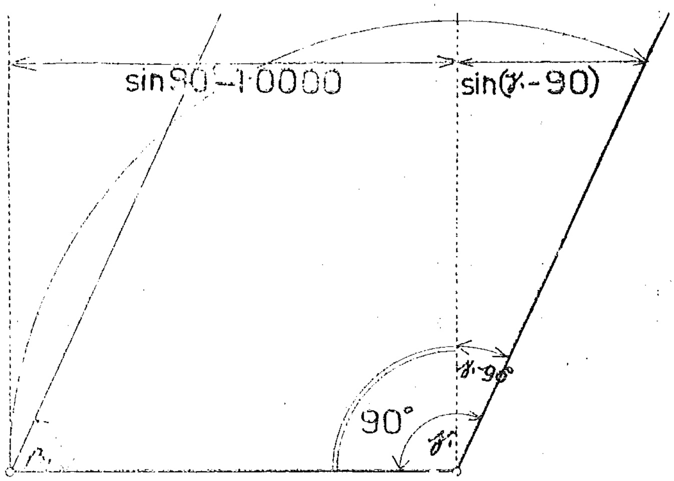

Fig. 2.

mit welchem Winkel wir die früheren Winkel $\beta \doteq \gamma \doteq 90^0$ verändert haben, also mit Hilfe des Sinus $(\gamma' - 90^0)$, und zwar auf folgender Grundlage: Wenn wir früher zur Bestimmung der Verbesserung $v\gamma = \frac{\delta}{2}$ die Winkelfunktion $\sin 90^0 = 1 \cdot 000000$ gebraucht haben, brauchen wir jetzt zur Bestimmung der Verbesserung $v\gamma'$ die Funktion: $\sin 90^0 + \sin(\gamma' - 90^0) = 1 \cdot 000 + \sin(\gamma' - 90^0)$, wo die Funktion $\sin(\gamma' - 90^0)$ die Grundlage der infolge der Winkelveränderung eintretenden Veränderung der Verbesserung des x bildet. Diese Folgerung entspricht der schon früher bewiesenen Gesetzmäßigkeit, wonach die Größe der Verbesserung im geraden Verhältnisse mit den Sinusfunktionen der dazu gehörigen Winkel steht; die über 90^0 habenden Winkel können diesem Gesetze nur auf diesem Wege entsprechen.

Und daß die Veränderungen der auf diesem Wege gewonnenen Verbesserungen sowohl bei Winkel β' wie auch bei Winkel γ' unter einander tatsächlich gleich sind, ist mit der Bildung der auf Winkel β' und γ' entfallenden Verbesserungen und mit der Gegenüberstellung der auf die Winkel β bezw. γ entfallenden Verbesserungen zu bestätigen; es wird also (laut Formel 20):

$$v\beta' = \frac{\delta \cdot \sin\beta'}{\sin\alpha' + \sin\beta' + \sin 90^0 + \sin(\gamma' - 90^0)} =$$

$$= \frac{\delta \cdot \sin\beta'}{\sin\beta' + 1 \cdot 0000000 + \sin(\gamma' - 90^0)}$$

$$v\gamma' = \frac{\delta \cdot [1 \cdot 000 + \sin(\gamma' - 90^0)]}{\sin\alpha' + \sin\beta' + \sin 90^0 + \sin(\gamma' - 90^0)} =$$

$$= \frac{\delta \cdot [1 \cdot 000 + \sin(\gamma' - 90^0)]}{\sin\beta' + 1 \cdot 000000 + \sin(\gamma' - 90^0)}.$$

Doch anderseits: $v\beta' = v\beta - x$
$v\gamma' = v\gamma + x$, woraus

$$x = v\beta - v\beta' = \frac{\delta}{2} - \frac{\delta \cdot \sin\beta'}{\sin\beta' + 1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)} =$$
$$= \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0) - \sin\beta'}{\sin\beta' + 1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)}$$ und ebenso

$$x = v' - v = \frac{\delta \cdot [1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)]}{\sin\beta' + 1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)} - \frac{\delta}{2} =$$
$$= \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0) - \sin\beta'}{\sin\beta' + 1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)},$$

d. h. bei den hier angenommenen theoretischen Dreiecken ist die Veränderung der Verbesserungen bei beiden Winkeln unter einander gleich und ist die Lösung als richtig zu bezeichnen. —

Auf dieser Grundlage ist bei den schiefwinkeligen Dreiecken zwischen den Verbesserungen und den Sinusfunktionen der dazu gehörigen Winkel laut Formel 13 folgendes Verhältnis aufzustellen:

$$(13)\qquad \frac{v\alpha'}{\sin\alpha'} = \frac{v\beta'}{\sin\beta'} = \frac{v\gamma'}{\sin 90^0 + \sin(\gamma' - 90^0)} = \frac{v\gamma'}{1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)}.$$

Und weil die Summe der Verbesserungen auch in diesem Falle mit dem Abschlußfehler gleich sein muß,

15) . . . . $v\alpha' + v\beta' + v\gamma' = \delta$,

werden die Verbesserungen bei schiefwinkeligen Dreiecken folgende sein:

$$20) \quad v\alpha' = \frac{\delta \cdot \sin\alpha'}{\sin\alpha' + \sin\beta' + 1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)}$$
$$v\beta' = \frac{\delta \cdot \sin\beta'}{\sin\alpha' + \sin\beta' + 1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)}$$
$$v\gamma' = \frac{\delta \cdot [1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)]}{\sin\alpha' + \sin\beta' + 1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)}$$

In dem früher erwähnten Dreiecke also, in welchem $\alpha' = 0^0$, folglich $\sin\alpha = 0$, werden die Verbesserungen sein:

$$v\alpha' = \frac{\delta \cdot \sin\alpha'}{\sin\alpha' + \sin\beta' + \sin 90^0 + \sin(\gamma' - 90^0)} =$$
$$= \frac{\delta \cdot 0}{\sin\beta' + 1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)} = 0$$
$$v\beta' = \frac{\delta \cdot \sin\beta'}{\sin\alpha' + \sin\beta' + \sin 90^0 + \sin(\gamma' - 90^0)} =$$
$$= \frac{\delta \cdot \sin\beta'}{\sin\beta' + 1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)}$$
$$v\gamma' = \frac{\delta \cdot [1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)]}{\sin\alpha' + \sin\beta' + 1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)} =$$
$$= \frac{\delta \cdot [1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)]}{\sin\beta' + 1{\cdot}000 + \sin(\gamma' - 90^0)}$$

Die auf die spitzwinkeligen Dreiecke bezügliche I. Regel entsprechend ergänzt, wird also die

III. Regel lauten: *Bei schiefwinkeligen und im allgemeinen bei jedem Dreiecke erhalten wir die Verbesserung der einzelnen Winkel, wenn wir den zulässigen Abschlußfehler durch die Summe der den gemessenen Winkeln entsprechenden Sinusfunktion teilen und das Ergebnis mit der den gemessenen Winkeln entsprechenden Sinusfunktion multiplizieren. Vom Standpunkte der Winkelverbesserung aus sind unter den der Winkelgröße entsprechenden Sinusfunktionen bei spitzen Winkeln die aus der Sinustabelle unmittelbar zu entnehmenden Zahlenwerte zu verstehen, bei schiefen (über 90gradigen) Winkeln aber die Summe von* sin $90^0 = 1 \cdot 000$ *und der Sinusfunktion des um 90 Grad verminderten Winkels.*

Zum Beweise dieser Theorie und der daraus abgeleiteten Ergebnisse nehmen wir ein Dreieck an, dessen zwei Winkel $\alpha = \beta = 0^0$ haben, der dritte aber $\gamma = 180^0$; es werden also nach der für spitzwinkelige Dreiecke aufgestellten Formel 16 die auf die einzelnen Winkel entfallenden Verbesserungen unbestimmbar sein, weil: $\sin \alpha = \sin \beta = \sin 0^0 = 0$, sowie auch $\sin \gamma = \sin 180 = 0$, die Verbesserungen also:

$$v\alpha = \delta \cdot \frac{0}{0} \qquad v\beta = \delta \cdot \frac{0}{0} \qquad v\gamma = \delta \cdot \frac{0}{0};$$

nach der für über 90gradige Winkel enthaltende Dreiecke gültigen Formel 20 dagegen werden die Verbesserungen sein:

$$v\alpha = v\beta = \frac{\delta \cdot 0}{0 + 0 + 1 \cdot 000 + \sin(180^0 - 90^0)} = \frac{0}{1 \cdot 000 + \sin 90^0} = 0$$

$$v\gamma = \frac{\delta \cdot [1 \cdot 000 + \sin(180^0 - 90^0)]}{0 + 0 + 1 \cdot 000 + \sin(180^0 - 90^0)} = \frac{\delta \cdot (1 + 1)}{1 + 1} = \delta.$$

Die Verbesserungen werden also bestimmte Größe haben, u. zw. bei den beiden 0-gradigen Winkeln 0, infolgedessen entfällt auf den nahezu 180-gradigen Winkel der ganze Abschlußfehler als Verbesserung.

Und wenn wir ein gleichschenkeliges Dreieck nehmen, dessen gemessene Winkel $\alpha = \beta = 4^0\, 59'\, 58''$, $\gamma = 169^0\, 59'\, 04''$, der Abschlußfehler also gleich $\delta = 1' = 60''$ ist, dann würden die Verbesserungswerte der einzelnen Winkel laut der auf spitzwinkelige Dreiecke bezüglichen Formel 16 berechnet folgende: $v\alpha = v\beta = 15''$ und $v\gamma = 30''$, während bei Anwendung der auf schiefwinkelige Dreiecke bezüglichen Formel 20 die Verbesserungswerte folgende sind:

$$v\alpha = v\beta = 2 \cdot 5'' \qquad v\gamma = 55''.$$

Der Unterschied zwischen den Ergebnissen der beiden Verfahren ist auffallend, da im ersten Falle die Verbesserung des im Verhältnisse zu den beiden spitzen Winkeln sehr großen Winkels γ nur das Zweifache der Verbesserung der spitzen Winkel beträgt, hingegen bei Anwendung der auf die schiefwinkeligen Dreiecke bezüglichen Formel 20 erhalten wir eine entsprechende Abweichung zwischen den auf die spitzen Winkel und auf den erheblich größeren schiefen Winkel entfallenden Verbesserungen.

Zur Bestätigung der Richtigkeit der auf die schiefwinkeligen Dreiecke bezüglichen Formel 20 ist auch noch der Umstand anzuführen, daß aus dieser Formel auch die auf die spitzwinkeligen Dreiecke bezügliche Formel abgeleitet werden kann, wenn wir z. B. als Uebergang ein rechtwinkeliges Dreieck als schiefwinkeliges wählen und den größten Winkel in diesem Falle mit $\gamma = 90^0$ bezeichnen; die in der Formel 20 benützte Sinusfunktion desselben wird:

$$\sin 90^0 + \sin(\gamma - 90^0) = \sin 90^0 + \sin 0^0 = \sin\gamma;$$

dessen Wert an Stelle von $\sin 90^0 + \sin(\gamma - 90^0)$ in die Formel 20 eingesetzt, erhalten wir die Formel 16.

Im Verfolge des Gesagten ist also bei den über 90 Grade große Winkel enthaltenden schiefwinkeligen Dreiecken bei der Berechnung der Winkelverbesserungen die Formel 20, bei spitzwinkeligen Dreiecken dagegen die Formel 16 anzuwenden.

IV. Die Bestimmung des zulässigen maximalen Abschlußfehlers in schiefwinkeligen Dreiecken.

Der zulässige maximale Abschlußfehler wird auch in den schiefwinkeligen Dreiecken nach denselben Grundsätzen bestimmt, welche im Kapitel II angeführt waren: Der Abschlußfehler darf maximal nur so groß sein, daß seine Verbesserung an den entsprechenden Seiten nur eine innerhalb der zulässigen Grenzen bleibende Längenveränderung hervorrufe.

Die relative Aenderung der Seitenlängen wird im schiefwinkeligen Dreiecke nach den Formeln 12, 12a und 12b sein:

$$\frac{da}{a} = \frac{v\alpha}{\varrho \cdot \sin\alpha}$$

$$\frac{db}{b} = \frac{v\beta}{\varrho \cdot \sin\beta}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{v\gamma}{\varrho \cdot [1{\cdot}00 + \sin(\gamma - 90^0)]};$$

in diese Formeln die unter 20) enthaltenen Verbesserungswerte eingesetzt, werden:

$$\frac{da}{a} = \frac{\delta}{\varrho \cdot [\sin\alpha + \sin\beta + 1{\cdot}00 + \sin(\gamma - 90^0)]}$$

$$\frac{db}{b} = \frac{\delta}{\varrho \cdot [\sin\alpha + \sin\beta + 1{\cdot}00 + \sin(\gamma - 90^0)]}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{\delta}{\varrho \cdot [\sin\alpha + \sin\beta + 1{\cdot}00 + \sin(\gamma - 90^0)]};$$

dies sind also unter sich gleiche Werte. Und wenn wir die relativen Aenderungen der Seitenlängen mit dem zulässigen maximalen Fehler der Seitenlängen, mit $1/q$, gleich annehmen, wo der Wert q gleich 1000, 2000, 5000, 10000, 50000 oder 100000 ist, je nachdem wir größere oder geringere Genauigkeit anstreben, an Stelle des Abschlußfehlers δ aber das Zeichen δ_{max} des zulässigen maximalen Abschlußfehlers setzen, werden wir folgende Formeln erhalten:

$$\frac{da}{a} = \frac{db}{b} = \frac{dc}{c} = \frac{1}{q} = \frac{\delta_{max}}{\varrho \cdot [\sin\alpha + \sin\beta + 1{\cdot}00 + \sin(\gamma - 90^0)]};$$

hieraus folgt die Formel des zulässigen maximalen Abschlußfehlers in schiefwinkeligen Dreiecken:

$$\delta_{\max} = \frac{\varrho}{q} \cdot [\sin\alpha + \sin\beta + 1{\cdot}00 + \sin(\gamma - 90^0)].$$

Nach Berechnung dieses Fehlers vergleichen wir denselben mit dem Abschlußfehler der gemessenen Winkel und vollführen die Ausgleichungsrechnung nur in dem Falle, wenn der letztere kleiner als der erstere ist.

Auf Grund der Formel 21 können wir die

IV. Regel aufstellen: *Wir erhalten den zulässigen maximalen Abschlußfehler in schiefwinkeligen und im allgemeinen in allen Dreiecken, wenn wir 206265″ durch die Verhältniszahl des für die Seitenlängen zulässigen Fehlers teilen und das Ergebnis nach Regel III mit der Summe der den gemessenen Winkeln entsprechenden Sinusfunktionen multiplizieren.*

Beispiel.

Nehmen wir die gemessenen Winkel eines schiefwinkeligen Dreieckes folgend an:

$$\begin{aligned} \alpha &= 12^0\,28'\,45'' \\ \beta &= 53^0\,16'\,25'' \\ \gamma &= 114^0\,13'\,50'', \text{ deren Summe} \\ \hline & 179^0\,59'\,00''; \text{ der Abschlußfehler beträgt also} \\ \delta &= 1' = 60''. \end{aligned}$$

Die zur Bestimmung der Verbesserungen notwendigen Sinusfunktionen der Winkel

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= 0{\cdot}216085 \\ \sin\beta &= 0{\cdot}801500 \\ \left.\begin{aligned} \sin 90^0 &\doteq 1{\cdot}000000 \\ \sin(\gamma - 90^0) &= 0{\cdot}410409 \end{aligned}\right\} & \; 1{\cdot}410400 \quad \text{deren Summe} \\ \hline \text{«sin»} &= 2{\cdot}427994. \end{aligned}$$

Die verlangte Genauigkeit der Seitenlängen sei

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{8000},$$

dann wird der maximale Abschlußfehler laut Formel 21 sein:

$$\delta_{\max} = \frac{206265''}{8000} \cdot 2{\cdot}427994 = 62{\cdot}6'';$$

da der Abschlußfehler der gemessenen Winkel (60″) kleiner ist, kann die Ausgleichung erfolgen.

Die Verbesserung der einzelnen Winkel wird also nach Formel 20 sein:

$$v\alpha = \frac{60'' \cdot 0{\cdot}216085}{2{\cdot}427994} = 5{\cdot}3398'' \doteq 5{\cdot}3''$$

$$v\beta = \frac{60'' \cdot 0{\cdot}801500}{2{\cdot}427994} = 19{\cdot}8065'' \doteq 19{\cdot}8''$$

$$v\gamma = \frac{60'' \cdot 1{\cdot}410409}{2{\cdot}427994} = 34{\cdot}8537'' \doteq 34{\cdot}9''$$

Summe der Verbesserungen $= 60{\cdot}0000'' \doteq 60{\cdot}0'' = \delta$.

Bei Anwendung dieser Verbesserungen werden die Seitenlängen folgende relative Veränderungen erleiden:

$$\frac{da}{a} = \frac{5{\cdot}3398''}{206265'' \cdot 0{\cdot}216085} = 0\ 0001198 = \frac{1}{8346{\cdot}8}$$
$$\frac{db}{b} = \frac{19{\cdot}8065''}{206265'' \cdot 0{\cdot}801500} = 0{\cdot}0001198 = \frac{1}{8346{\cdot}8}$$
$$\frac{dc}{c} = \frac{34{\cdot}8537''}{206265'' \cdot 1{\cdot}410409} = 0{\cdot}0001198 = \frac{1}{8346{\cdot}8},$$

sind also unter sich alle gleich.

Die Länge der Seite $\underline{b}$ und $\underline{c}$, wenn wir $\underline{a}$ als bekannt annehmen:

$$b = a \cdot \frac{\sin(\beta + v\beta)}{\sin(\alpha + v\alpha)} = \frac{0{\cdot}801558}{0{\cdot}216109} \cdot a = \underline{3{\cdot}7090317 \cdot a}$$
$$c = a \cdot \frac{\sin(\gamma + v\gamma)}{\sin(\alpha + v\alpha)} = \frac{0{\cdot}911832}{0{\cdot}216109} \cdot a = \underline{4{\cdot}2193012 \cdot a}.$$

Die Koordinaten des Spitzpunktes des Winkels α, wenn die Spitze des Winkels β im Mittelpunkte des Axensystems, Seite $\underline{a}$ dagegen in der $+X$-Axe liegt, werden:

$$Y_A = c \cdot \sin(\beta + v\beta) = 4{\cdot}2193012 \cdot a \cdot 0{\cdot}801558 = \underline{\underline{3{\cdot}3820135 \cdot a}}$$
$$X_A = c \cdot \cos(\beta + v\beta) = 4{\cdot}2193012 \cdot a \cdot 0{\cdot}597916 = \underline{\underline{2{\cdot}5227937 \cdot a}}.$$

Bei den Verbesserungen der Winkel mit $^1/_3$ des Abschlußfehlers dagegen, mit je 20'', werden die relativen Veränderungen der Seitenlängen folgende:

$$\frac{da'}{a} = \frac{20''}{206265'' \cdot 0{\cdot}216085} = 0{\cdot}0004487 = \frac{1}{2228{\cdot}5}$$
$$\frac{db'}{b} = \frac{20''}{206265'' \cdot 0{\cdot}801500} = 0{\cdot}0001210 = \frac{1}{8266{\cdot}1}$$
$$\frac{dc'}{c} = \frac{20''}{206265'' \cdot 1{\cdot}410409} = 0{\cdot}0000687 = \frac{1}{14545{\cdot}6}$$

Die Länge der Seiten $\underline{b}$ und $\underline{c}$:

$$b' = a \cdot \frac{\sin(\beta + 20'')}{\sin(\alpha + 20'')} = \underline{3{\cdot}7078406 \cdot a}$$
$$c' = a \cdot \frac{\sin(\gamma + 20'')}{\sin(\alpha + 20'')} = \underline{4{\cdot}2180805 \cdot a}.$$

Die Koordinaten des Spitzpunktes A des Winkels α, auf dasselbe Axensystems bezogen:

$$Y'_A = \underline{\underline{3{\cdot}3810374 \cdot a}} \quad \text{und} \quad X'_A = \underline{\underline{2{\cdot}5220605 \cdot a}},$$

die Abweichungen, die sich infolge der beiden verschiedenen Verfahren ergeben, sind also, wenn $a = 1000$ Einheiten ist:

$$b - b' = +\ 1{\cdot}191 \text{ Einheiten} \qquad c - c' = +\ 1{\cdot}221 \text{ Einheiten}$$
$$Y_A - Y'_A = +\ 0{\cdot}976 \text{ Einheiten} \qquad X_A - X'_A = +\ 0{\cdot}773 \text{ Einheiten}.$$

Die Abweichungen sind also noch größer, als bei dem früheren Beispiel, außerdem zeigen auch die Verbesserungen der Winkel, besonders beim kleinsten und beim größten Winkel erhebliche Abweichungen von dem Drittel des Abschlußfehlers, die relativen Veränderungen der Seitenlängen aber, wenn wir ein Drittel des Abschlußfehlers zur Verbesserung benützen, zeigen sich bei der dem kleineren Winkel gegenüberliegenden kleineren Dreiecksseite als viel größer (im angegebenen Beispiel fast 7-mal größer) als bei der dem größeren Winkel gegenüberliegenden längeren Seite.

V. Kritische Betrachtungen über die besprochenen Verbesserungsverfahren.

Dem besprochenen Berechnungsverfahren gegenüber kann eingewendet werden, daß dasselbe nicht so einfach und bequem ist, wie die Zuhilfenahme eines Drittels des Abschlußfehlers; wenn wir aber die Richtigkeit des Satzes, daß die Verbesserung des Abschlußfehlers an den Dreiecksseiten unter sich gleiche relative Längenänderungen hervorrufen soll, anerkennen, müssen wir von dem einfachen und bequemen Verfahren abweichen und ein anderes, weniger bequemes wählen, um der an die Vermessungsarbeiten anschließenden Forderung zu entsprechen, daß die Genauigkeit der Ergebnisse möglichst zu steigern ist. Wenn wir übrigens bedenken, daß ja die Sinuswerte der Winkel zur Berechnung der Dreiecksseiten ohnedies unerläßlich sind, dann auch in Betracht ziehen, daß bei genaueren Messungen die Abschlußfehler nur gering sind und auf je einen Winkel nur einige Sekunden Verbesserung entfällt, können wir die Arbeit vereinfachen, indem wir beim Aufsuchen der Sinuswerte auch die dazugehörigen partes proportioneles herausschreiben, um diese, mit der entsprechenden Verbesserung multiplizierend, mit dem Resultat die Sinuswerte zur Berechnung der Dreiecksseiten abändern zu können, so daß das neuerliche Heraussuchen der Sinuswerte der ausgeglichenen Winkel unterbleiben kann. Für die überdies verbleibende Mehrarbeit bietet das genauere, verläßlichere Ergebnis genügende Entschädigung.

Jedenfalls besitzt das besprochene Verbesserungsverfahren den Vorteil, daß es auf einem positiven Grundsatz, auf der Sicherung der Gleichheit der relativen Seitenlängenveränderung, fußt; dieses Ergebnis ist auf dem Wege des Minimums der Quadratsumme der Verbesserungen nicht sicherzustellen.

Natürlich kann das Verfahren nur bei einzelnen Dreiecken (einfache Punkteinschaltung, einfacher Vorwärtseinschnitt) zur Anwendung kommen, sowie auch bei Netzeinschaltung, wenn wir die Winkel mit Satzbeobachtung gemessen haben, und in jedem Falle nur dann, wenn die Winkelmessung mit gleicher Genauigkeit erfolgte; wenn jedoch die Winkel desselben Dreieckes mit verschiedener Ganauigkeit gemessen wurden (der eine mehrmals, der andere weniger oft, der eine mit einem genaueren, empfindlicheren Instrument, als der andere), wenn wir bei den Verbesserungen auch anderen Ansprüchen genügen müssen, wie z. B. im Falle eines vollständigen Netzes der um einen Punkt gelagerten Dreiecke dem Polygon-Winkelabschluß und den Seitengleichungen, wo auf die Verbesserung der Winkel schon auch andere Faktoren Einfluß haben und auch diese

Faktoren in Rechnung zu ziehen sind, kann das Verfahren in der vorgeführten einfachen Form schon nicht mehr entsprechen, doch haben wir keine Ursache, das Bestreben, auch in diesen Fällen mit den anzuwendenden Winkelverbesserungen an den Seitenlängen möglichst gleiche relative Veränderungen zu erreichen, als unbegründet zu betrachten, also mit Rücksicht auf die Größen der auszugleichenden Winkel den behandelten Regeln nach Möglichkeit Genüge zu tun.

VI. Die Ausgleichung der Winkel im geschlossenen Polygon.

Das in den vorhergehenden Kapiteln besprochene Ausgleichungsverfahren läßt sich ohne weitere Schwierigkeiten auch auf die Ausgleichung der Abschlußfehler im geschlossenen Polygon ausdehnen, wenn die Winkel alle mit gleicher Genauigkeit gemessen waren.

Auch bei der Verbesserung der Polygonwinkel ist von jenem Grundsatze auszugehen, daß die Verbesserungen, als Winkelveränderungen an den entsprechenden Seitenlängen unter sich gleiche relative Veränderungen hervorrufen müssen; dabei muß natürlich die Summe der Verbesserungen gleich dem Abschlußfehler des Polygons sein, welchen wir erhalten, wenn wir die Summe der gemessenen Polygonwinkel von der theoretischen Winkelsumme des Polygons abziehen:

$$22)\quad \triangle = (n-2)\cdot 180^0 - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \ldots\ldots + \omega_n) =$$
$$= (n-2)\cdot 180^0 - [\omega],$$

worin n die Zahl der gemessenen Polygonwinkel, bezw. der Seiten des Polygons ist.

Zur Bestimmung der Verbesserungen des Polygons nehmen wir laut Figur 3 gegenüber den gemessenen Winkeln zwischen den Winkelschenkeln, bezw. den

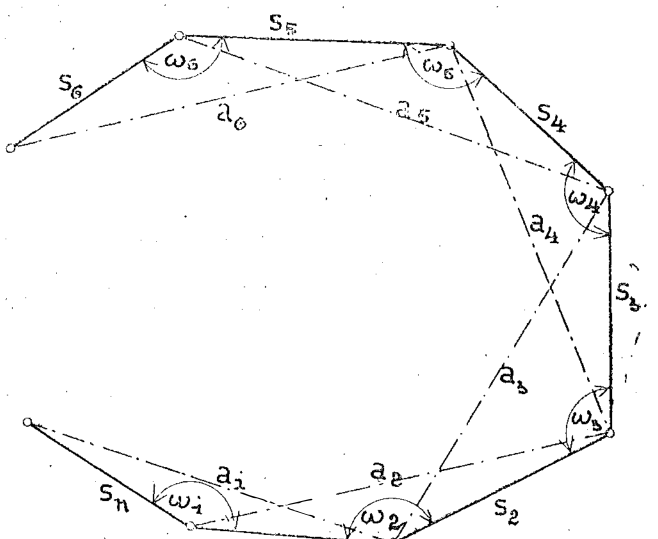

Fig. 3.

Endpunkten der benachbarten Seiten verbindende Diagonalen an, deren Länge wir der Reihe nach mit a_1, a_2, a_3, $a_4 \ldots a_n$ etc. bezeichnen, die diesen gegenüberliegenden gemessenen Polygonwinkel dagegen mit ω_1, ω_2, ω_3, $\omega_4 \ldots \omega_n$, die Länge der die Winkel begrenzenden Polygonseiten mit s_1, s_2, s_3, $s_4 \ldots s_n$.

Auf diese Weise erhalten wir bei jedem Polygonwinkel ein Dreieck, in welchem die Schenkel und der gemessene Winkel zugleich elementare Bestandteile des Polygons sind, nicht nur des Dreieckes.

Ausgehend von dem Grundsatze der Verbesserung, daß die Werte der infolge derselben als Winkelveränderung hervorgerufenen relativen Seitenveränderung unter sich gleich bleiben sollen, können wir bezüglich jedes einzelnen Dreiecks laut Formeln 4 und 12 folgende Verhältnisse aufstellen:

$$23) \ldots\ldots \quad \begin{aligned} \frac{da_1}{a_1} &= \frac{ds_n}{s_n} = \frac{ds_1}{s_1} = \frac{v\,\omega_1}{\varrho \cdot \sin \omega_1} \\ \frac{da_2}{a_2} &= \frac{ds_1}{s_1} = \frac{ds_2}{s_2} = \frac{v\,\omega_2}{\varrho \cdot \sin \omega_2} \\ \frac{da_3}{a_3} &= \frac{ds_2}{s_2} = \frac{ds_3}{s_3} = \frac{v\,\omega_3}{\varrho \cdot \sin \omega_3} \\ \frac{da_4}{a_4} &= \frac{ds_3}{s_3} = \frac{ds_4}{s_4} = \frac{v\,\omega_4}{\varrho \cdot \sin \omega_4} \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Auf Grund des zwischen diesen Gleichungen bestehenden Zusammenhanges ($\frac{ds_1}{s_1}$ kommt in der ersten und zweiten, $\frac{ds_2}{s_2}$ in der zweiten und dritten Gleichung vor u. s. f) sehen wir laut der Formel 13, daß

$$\frac{v\,\omega_1}{\varrho \cdot \sin \omega_1} = \frac{v\,\omega_2}{\varrho \cdot \sin \omega_2} = \frac{v\,\omega_3}{\varrho \cdot \sin \omega_3} = \frac{v\,\omega_4}{\varrho \cdot \sin \omega_4} = \ldots .$$

Weil aber die Summe der Verbesserungen bezw. Winkelveränderungen $v\,\omega_1$, $v\,\omega_2$, $v\,\omega_3$, $v\,\omega_4 \ldots$ mit dem Abschlußfehler $\triangle$ gleich ist, wird die Größe der einzelnen Verbesserungen auf Grund der Formeln 14, 15 und 16 folgende sein:

$$\begin{aligned} v\,\omega_1 &= \frac{\triangle \cdot \sin \omega_1}{\sin \omega_1 + \sin \omega_2 + \sin \omega_3 + \sin \omega_4 + \ldots} = \frac{\triangle \cdot \sin \omega_1}{«\sin \omega»} \\ v\,\omega_2 &= \frac{\triangle \cdot \sin \omega_2}{\sin \omega_1 + \sin \omega_2 + \sin \omega_3 + \sin \omega_4 + \ldots} = \frac{\triangle \cdot \sin \omega_2}{«\sin \omega»} \\ v\,\omega_3 &= \frac{\triangle \cdot \sin \omega_3}{\sin \omega_1 + \sin \omega_2 + \sin \omega_3 + \sin \omega_4 + \ldots} = \frac{\triangle \cdot \sin \omega_3}{«\sin \omega»} \\ v\,\omega_4 &= \frac{\triangle \cdot \sin \omega_4}{«\sin \omega»} \\ v\,\omega_5 &= \frac{\triangle \cdot \sin \omega_5}{«\sin \omega»} \end{aligned}$$

. . . .

Wie also aus diesen Erörterungen ersichtlich, kommen bei der Bestimmung der zur Ausgleichung des Abschlußfehlers dienenden Verbesserungen auch bei den mehr als drei Seiten besitzenden Figuren alle jene Schlußfolgerungen zur

Geltung, die wir beim einfachsten Polygon, beim Dreieck, gefunden haben, vorausgesetzt, daß wir gelegentlich der Verbesserungen eine gleiche relative Aenderung der Seitenlängen anstreben.

Die obigen Ergebnisse zeigen, daß zwischen der Verbesserung und der Sinusfunktion auch im Polygon ein direktes Verhältnis besteht; mit der Aufstellung dieser Proportion haben wir den ersten Schritt zur Bestimmung der Verbesserungen getan.

In den Polygonen kommen jedoch nicht nur spitze Winkel, sondern auch zwischen 90 und 180 Grad liegende schiefe (konkave), dann zwischen 180 und 270 Grad liegende stumpfe und zwischen 270 und 360 Grad liegende konvexe Winkel vor, weshalb vor der Bestimmung der Verbesserungen noch festzustellen ist, wie die Sinusfunktion der über 90-gradigen Winkel in Rechnung zu ziehen sei.

Bezüglich der zwischen 90 und 180 Grad liegenden Winkel kamen wir schon bei der Besprechung der schiefwinkeligen Dreiecke im Kapitel III zu dem Schlusse, daß bei solchen Winkeln der 90-gradige Teil von dem über 90 Grad verbleibenden Teile abgetrennt werden muß und die Summe der Sinusfunktionen beider Teile in Rechnung zu ziehen ist bei der Bestimmung des auf den Winkel entfallenden Verbesserungswertes.

Aus den die Begründung dieses Verfahrens begleitenden Erörterungen (siehe Seite 36 und 37) ist ersichtlich, daß die Sinusfunktion des größten Winkels im Dreiecke, wenn dieser Winkel 180 Grad hat, aus den der Summe der Funktionen zweier rechter Winkel zusammengesetzt wird und so in Rechnung kommt; wenn also der Polygonwinkel über 180 Grade hat, wird der Winkel, um zu einer der Größe des Winkels entsprechenden Sinusfunktion zu gelangen, auf zwei rechte Winkel und den noch verbleibenden Teil ($\omega - 180^0$) gespalten und die Summe der Sinusfunktionen der beiden rechten Winkel und des verbleibenden Restes gebildet; es wird also:

$$25) \ldots \quad \sin 90^0 + \sin 90^0 + \sin(\omega - 180^0) = 2 + \sin(\omega - 180^0).$$

Aehnlich verfahren wir mit den Winkeln von 270 bis 360 Grad, nur wird hier natürlich die Sinusfunktion des rechten Winkels dreimal genommen und dann noch der Sinus des verbleibenden restlichen Winkels hinzugegeben; also wird die Sinusfunktion des über 270-gradigen Winkels:

$$26) \ldots \sin 90^0 + \sin 90^0 + \sin 90^0 + \sin(\omega - 270^0) = 3 + \sin(\omega - 270^0).$$

Auf Grund des Gesagten läßt sich die allgemeine Regel aufstellen, daß bei den Bestimmungen der Verbesserungen von über 90-gradigen Winkeln die entsprechende Sinusfunktion derart gebildet wird, daß wir die Sinusfunktion so vieler rechter Winkel nehmen, als 90 in der fraglichen Winkelgröße enthalten ist, dann noch die Sinusfunktion des verbleibenden restlichen Winkels hinzugeben; die allgemeine Form dieser Sinusfunktionbildung ist:

$$27) \ldots\ldots\ldots \; m \cdot \sin 90^0 + \sin(\omega - m \cdot 90^0),$$

wo der Wert m zwischen 0 und 3 wechselt, je nachdem die Sinusfunktion von spitzen, konkaven, stumpfen oder konvexen Winkeln bestimmt werden soll.

Die allgemeine Form der Verbesserung der Polygonwinkel wird also:

$$28)\quad v\,\omega_1 = \frac{\triangle \cdot [m_1 + \sin(\omega_1 - m_1 \cdot 90^0)]}{m_1 + \sin(\omega_1 - m_1 \cdot 90^0) + m_2 + \sin(\omega_2 - m_2 \cdot 90^0) + m_3 + \sin(\omega_3 - m_3 \cdot 90^0)}$$

$$= \frac{\triangle \cdot [m_1 + \sin(\omega_1 - m_1 \cdot 90^0)]}{«m + \sin(\omega - m \cdot 90^0)»}$$

$$v\,\omega_2 = \frac{\triangle \cdot [m_2 + \sin(\omega_2 - m_2 \cdot 90^0)]}{«m + \sin(\omega - m \cdot 90^0)»}$$

$$v\,\omega_3 = \frac{\triangle \cdot [m_3 + \sin(\omega_3 - m_3 \cdot 90^0)]}{«m + \sin(\omega - m \cdot 90^0)»}$$

$$v\,\omega_4 = \frac{\triangle \cdot [m_4 + \sin(\omega_4 - m_4 \cdot 90^0)]}{«m + \sin(\omega - m \cdot 90^0)»}$$

. . . .

$$v\,\omega_n = \frac{\blacktriangle \cdot [m_n + \sin(\omega_n - m_n \cdot 90^0)]}{«m + \sin(\omega - m \cdot 90^0)»}$$

Es läßt sich also folgende Regel aufstellen:

V. Regel. *In geschlossenen Polygonen erhalten wir die Verbesserung einzelner Winkel, wenn wir den zulässigen Abschlußfehler durch die Summe der den Größen der gemessenen Polygonwinkel entsprechenden Sinusfunktionen teilen und dieses Ergebnis mit der der Größe der zu verbessernden Polygonwinkel entsprechenden Sinusfunktion multiplizieren. Unter der der Größe der Polygonwinkel entsprechenden Sinusfunktion ist vom Standpunkte der Verbesserung bei spitzen Winkeln der aus den Sinus-Tabellen unmittelbar zu entnehmende Wert, bei Winkeln über 90 Grad aber stets so oft* $\sin 90^0 = 1{\cdot}000000$ *zu verstehen, als 90 in dem gemessenen Polygonwinkel enthalten ist und dazu noch der Sinuswert des verbleibenden spitzen Winkels.*

VII. Die Bestimmung des zulässigen maximalen Abschlußfehlers im geschlossenen Polygon.

Auf Grund des Vorhergehenden kann auch der zulässige maximale Abschlußfehler im Polygon bestimmt werden, wenn wir die Verbesserungswerte nach Formel 28 in die Werte der relativen Aenderungen der Seitenlängen nach Formel 23 einsetzen und dann die Gleichung ordnen, die Größe der relativen Veränderungen der Seitenlängen mit der bei den Längen geforderten Genauigkeit $\left(\frac{1}{q'}\right)$ gleich nehmend, in welchem Falle der zulässige Abschlußfehler im Polygon wird:

$$29) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \triangle_{\max} = \frac{\varrho}{q'} \cdot «m + \sin(\omega - m \cdot 90^0)».$$

Infolgedessen wird also:

VI. Regel. *In geschlossenen Polygonen erhalten wir den zulässigen maximalen Abschlußfehler, wenn wir* $\varrho'' = 206265''$ *durch die Verhältniszahl des bei den Seitenlängen zulässigen Fehlers teilen und das Resultat mit der Summe der Größe der den gemessenen Polygonwinkeln nach Regel V entsprechenden Sinusfunktionen multiplizieren.*

Auf Grund dieser Regel und auf Grund der Formel 29 berechnen wir in erster Reihe den zulässigen Abschlußfehler und gehen nur dann zur Berechnung der Verbesserungen über, wenn der Abschlußfehler der gemessenen Winkel kleiner ist, als der festgestellte maximale Fehler.

Beispiel.

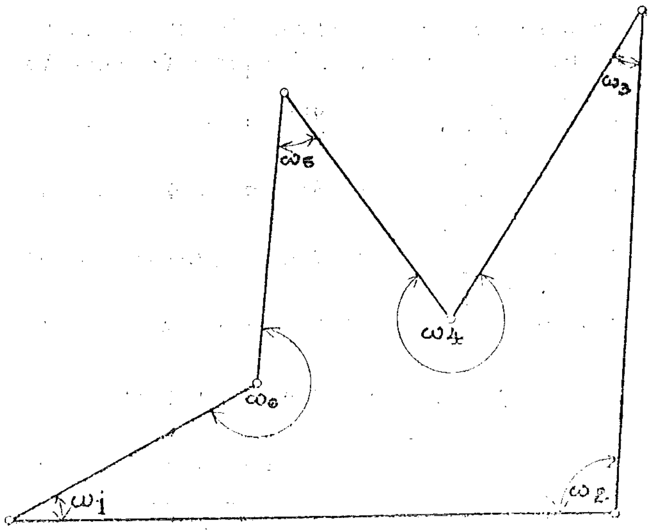

Fig. 4.

Nehmen wir die Winkel des in Figur 4 dargestellten Polygons folgend an:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 29^0\,55'\,10''\\
\omega_2 &= 95^0\,01'\,40''\\
\omega_3 &= 42^0\,14'\,30''\\
\omega_4 &= 292^0\,35'\,50''\\
\omega_5 &= 36^0\,28'\,10''\\
\omega_6 &= 223^0\,41'\,40'';
\end{aligned}$$

die Winkelsumme also ist:

$[\omega] = 719^0\,57'\,00''$ und der Abschlußfehler:

$\triangle = 720^0 - 719^0\,57'\,00'' = +\,3' = +\,180''.$

Die zu den Winkeln gehörigen Sinusfunktionen sind folgende:

zu dem Winkel ω_1:		$\sin 29^0\,55'\,10'' = 0{\cdot}498782$	
» » » ω_2:	1.	$\sin 90^0\,00'\,00'' = 1{\cdot}000000$	1·087638
		$\sin 5^0\,01'\,40'' = 0{\cdot}087638$	
» » » ω_3:		$\sin 42^0\,14'\,30'' = 0{\cdot}672260$	
» » » ω_4:	3.	$\sin 90^0\,00'\,00'' = 3{\cdot}000000$	3·384250
		$\sin 22^0\,35'\,50'' = 0{\cdot}384250$	
» » » ω_5:		$\sin 36^0\,28'\,10'' = 0{\cdot}594394$	
» » » ω_6:	2.	$\sin 90^0\,00'\,00'' = 2{\cdot}000000$	2·690812
		$\sin 43^0\,41'\,40'' = 0{\cdot}690812$	

zusammen: «$m + \sin(\omega - m\cdot 90^0)$» $= 8{\cdot}928136$

Nehmen wir an, daß wir bei den Seitenlängen eine Genauigkeit von

$$\frac{1}{q'} = \frac{1}{10000}$$

anstreben müssen, dann kann der zulässige maximale Abschlußfehler sein:

$$\triangle_{max} = \frac{206265''}{10000} \cdot 8{\cdot}928136 = 184{\cdot}1562''.$$

Da der Abschlußfehler der gemessenen Winkel (— 180″ —) kleiner ist, sind die Verbesserungen zu berechnen und ergeben folgende Werte:

$$v\,\omega_1 = \frac{180''}{8{\cdot}928136} \cdot 0{\cdot}498782 = 10{\cdot}0559'' \doteq 10''$$

$$v\,\omega_2 = \frac{180'}{8{\cdot}928136} \cdot 1{\cdot}087638 = 21{\cdot}9279'' \doteq 22''$$

$$v\,\omega_3 = \frac{180''}{8{\cdot}928136} \cdot 0{\cdot}672260 = 13{\cdot}5534'' \doteq 14''$$

$$v\,\omega_4 = \frac{180''}{8{\cdot}928136} \cdot 3{\cdot}384250 = 68{\cdot}2298'' \doteq 68''$$

$$v\,\omega_5 = \frac{180''}{8{\cdot}928136} \cdot 0{\cdot}594394 = 11{\cdot}9836'' \doteq 12''$$

$$v\,\omega_6 = \frac{180''}{8{\cdot}928136} \cdot 2{\cdot}690812 = 54{\cdot}2494'' \doteq 54'' \quad \text{und}$$

$$[v\,\omega] = \qquad = 180{\cdot}0000'' = 180'' = \triangle.$$

Die relative Veränderung der Seitenlängen wird im Falle der Durchführung der berechneten Verbesserungen folgende werden:

$$\frac{da_1}{a_1} = \frac{10{\cdot}0559''}{206265'' \cdot 0{\cdot}498782} = 0{\cdot}0000977 = \frac{1}{10230{\cdot}9}$$

$$\frac{da_2}{a_2} = \frac{21{\cdot}9279''}{206265'' \cdot 1{\cdot}087638} = 0{\cdot}0000977 = \frac{1}{10230{\cdot}9}$$

$$\frac{da_3}{a_3} = \frac{13{\cdot}5534''}{206265'' \cdot 0{\cdot}672260} = 0{\cdot}0000977 = \frac{1}{10230{\cdot}9}$$

$$\frac{da_4}{a_4} = \frac{68{\cdot}2298''}{206265'' \cdot 3{\cdot}384250} = 0{\cdot}0000977 = \frac{1}{10230{\cdot}9} \quad \text{u. s. f.}$$

oder auch

$$\frac{ds_1}{s_1} = \frac{ds_2}{s_2} = \frac{ds_3}{s_3} = \frac{ds_4}{s_4} = \ldots\ldots = \frac{ds_n}{s_n} =$$

$$= \frac{180''}{206265'' \cdot 8{\cdot}928136} = 0{\cdot}0000977 = \frac{1}{10230{\cdot}9}.$$

Demgegenüber würde — den zulässigen bezw. maximalen Abschlußfehler des Polygons nach der gebräuchlichen Formel mit

$$\triangle'_{max} = 1{\cdot}5' \cdot \sqrt{n} = 90'' \cdot \sqrt{6} = 220{\cdot}45408''$$

angenommen — der maximale Abschlußfehler der Seitenlängenveränderung bezw. dem Seitenlängenfehler

$$\frac{1}{q'} = \frac{220{\cdot}45408''}{206265'' \cdot 8{\cdot}928136} = 0{\cdot}0001197 = \frac{1}{8353{\cdot}5}$$

entsprechen, welcher bedeutend größer ist, als der dem berechneten maximalen Abschlußfehler 184·1562″ entsprechende Seitenfehler $\frac{1}{10000} = 0{\cdot}0001$.

Wenn wir den Abschlußfehler unter den Winkeln gleichmäßig verteilt hätten, so entfiele auf je einen Winkel 30″ Verbesserung, während in dem angenommenen Beispiele, welches Winkel aus allen Quadranten enthält, auf die einzelnen Winkel je nach ihrer Größe bezw. nach der Größe der entsprechenden Sinusfunktionen Verbesserungen von 10″ bis 68″ enthalten sind, also von einem Drittel der 30″-igen bis zur 2·3-maligen Größe derselben, mit welchen in dem gegebenen Falle die einzelnen Winkel zu vergrößern sind, um eine richtige, der gleichen relativen Veränderung der Seitenlängen entsprechende Winkelgröße zu erhalten.

Beim gleichmäßig verteilten Abschlußfehler werden die mit der Verbesserung zusammenhängenden relativen Änderungen der Seitenlängen folgende Werte geben:

$$\frac{1}{q'_1} = \frac{30''}{206265'' \cdot 0{\cdot}498782} = 0{\cdot}0002916 = \frac{1}{3429{\cdot}4}$$
$$\frac{1}{q'_2} = \frac{30''}{206265'' \cdot 1{\cdot}087638} = 0{\cdot}0001337 = \frac{1}{7478{\cdot}1}$$
$$\frac{1}{q'_3} = \frac{30''}{206265'' \cdot 0{\cdot}672260} = 0{\cdot}0002164 = \frac{1}{4622{\cdot}1}$$
$$\frac{1}{q'_4} = \frac{30''}{206265'' \cdot 3{\cdot}384250} = 0{\cdot}0000430 = \frac{1}{23268{\cdot}4}$$
$$\frac{1}{q'_5} = \frac{30''}{206265'' \cdot 0{\cdot}594394} = 0{\cdot}0002447 = \frac{1}{4086{\cdot}7}$$
$$\frac{1}{q'_6} = \frac{30''}{206265'' \cdot 2{\cdot}690812} = 0{\cdot}0000541 = \frac{1}{18506{\cdot}8}$$

Es erscheinen also so erhebliche Abweichungen unter einander ebenso wie gegenüber der richtigen relativen Aenderung, die nicht zu begründen sind und die Richtigkeit dieses Verbesserungsverfahrens umstoßen.

Ebenso kann auch die zur Bestimmung des zulässigen oder maximalen Abschlußfehlers im Gebrauch befindliche Formel $\triangle'_{max} = 1{\cdot}5' \cdot \sqrt{n}$ nicht als richtig anerkannt werden, da diese keine Rücksicht auf die bei den Seitenlängen geforderte Genauigkeit nimmt und nur die Anzahl der gemessenen Winkel in Betracht zieht, weshalb sie in den gleiche gemessene Winkelanzahl besitzenden Polygonen stets denselben zulässigen Abschlußfehler ergibt, ganz gleich, ob wir größere Genauigkeit der Seitenlängen verlangen oder mit geringerer vorlieb nehmen; dies bedeutet aber, daß wir — ohne Rücksicht auf die angestrebte Genauigkeit — uns mit solchem Messungsverfahren oder solchem Meßinstrumente begnügen können, welches einen kleineren maximalen Abschlußfehler sichert, als der nach der erwähnten gebräuchlichen Formel berechnete ist.

Demgegenüber aber erfordert der nach Formel 29 zu berechnende maximale Abschlußfehler beim Streben nach größerer Genauigkeit präzisere, empfindlichere Meßinstrumente und ein genaueres Messungsverfahren, was mit der allgemeinen Forderung genauer Messungen im innigsten, harmonischen Zusammenhange steht.