Über eine Erweiterung der Punktbestimmung durch Gegenschnitt

Adolf Klingatsch [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **17** (4–5), S. 49–54

1919

BibTEX:

```
@ARTICLE{Klingatsch_VGI_191905,
Title = {{\"U}ber eine Erweiterung der Punktbestimmung durch Gegenschnitt},
Author = {Klingatsch, Adolf},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {49--54},
Number = {4--5},
Year = {1919},
Volume = {17}
}
```

DEUTSCHÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.
ORGAN
DES
DEUTSCHÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.
Redaktion: Prof. E. Doležal und Baurat Ing. S. Wellisch.

Nr. 4 u. 5. **Wien, im Oktober 1919.** **XVII. Jahrgang.**

Uber eine Erweiterung der Punktbestimmung durch Gegenschnitt.

Von **Prof. A. Klingatsch** in Graz.

In dieser Zeitschrift IX. Band 1911 wurde vom Verfasser eine «Erweiterung des Rückwärtseinschneidens» behandelt, welche Aufgabe vorher auch von anderer Seite Lösungen gefunden hatte. Es handelte sich dabei um folgendes Orientierungsproblem.

In einem rechtwinkeligen ebenen Koordinatensystem P sind die Dreiecks- oder Polygonpunkte $P_1 P_2 P_3$ (Fig. 1) durch ihre Koordinaten gegeben. Ebenso

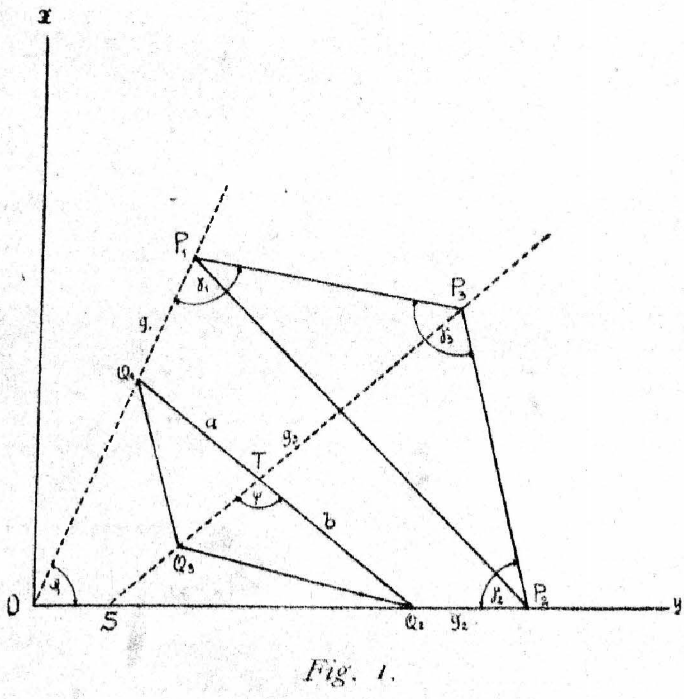

Fig. 1.

sind in einem anderen Koordinatensystem Q die drei Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$ bekannt. Es sind nun die Koordinaten von $Q_1 Q_2 Q_3$ im System P, oder die Koordinaten von $P_1 P_2 P_3$ im System Q zu finden, soferne die der Orientierung dienenden Messungen, welche sich bei der Orientierung in der Ebene auf Horizontalwinkelmessungen beschränken, nur in einem Punktfelde, etwa P, vorgenommen werden.

Diese Messungen bestimmen eben die Lagen der drei Geraden $g_1 g_2 g_3$ im System P, also gegenüber dem Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ Es ist dann die Lage eines durch seine drei Seiten gegebenen Dreieckes $Q_1 Q_2 Q_3$ so zu finden, daß die drei Ecken desselben bezüglich auf $g_1 g_2 g_3$ liegen. Ist diese Lage gefunden, so sind damit auch die Abstände $\overline{P_1 Q_1}$, $\overline{P_2 Q_2}$, $\overline{P_3 Q_3}$ bekannt und können daher die Koordinaten von Q im System P und umgekehrt jene von P im System Q berechnet werden. Ist P das Operationsfeld, so handelt es sich im ersten Falle um die Bestimmung der Punkte Q durch äußere Richtungen, im zweiten Falle um die Bestimmung von P durch innere Richtungen.

Die Orientierungsmessungen bezwecken hier lediglich die gegenseitige Orientierung der beiden Koordinatensysteme P und Q, in Bezug auf welche die Punkte P und Q bereits bestimmt sind.

Die allgemeine räumliche Behandlung dieses Orientierungsproblems wurde für den hier vorausgesetzten Fall einseitiger Messungen vom Verfasser in der unten angeführten Abhandlung[1]) gegeben, woraus die Lösungen für mehrere Sonderfälle, wie beispielsweise für jenen des räumlichen Rückwärtseinschneidens folgen.

Wir wollen nun in der vorliegenden Arbeit das ebene Orientierungsproblem unter der Voraussetzung behandeln, daß die betreffenden Messungen in beiden Feldern vorgenommen werden. Das betreffende räumliche Problem ist — im übrigen ohne Rücksicht auf geodätische Anwendungen — in der unten angeführten Abhandlung[2]) vom Verfasser gelöst worden.

Die hier zu behandelnde Aufgabe ist folgende. In einem System P sind die Koordinaten der drei Punkte $P_1 P_2 P_3$, ebenso in einem zweiten System Q die drei Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$ gegeben. In den Punkten $P_1 P_2$ sind die Richtungen nach Q_1, Q_2 im Anschlusse an irgend welche Punkte P, etwa P_3, gemessen, wodurch die Lagen von $g_1 g_2$ im System P bestimmt sind. Die dritte Orientierungsmessung erfolge jedoch in Q_3 nach P_3 im Anschlusse an einen der Punkte Q, etwa Q_1. Es ist dann die Lage von g_3 im System Q gegeben und infolge dessen auch die Lage von g_3 zu dem durch seine Seiten und Winkel gegebenen Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ bekannt.

Im Besonderen lassen sich daher auch die Lage des Schnittpunktes T von g_3 mit $Q_1 Q_2$, sowie die Abstände $\overline{Q_1 T} = a$, $\overline{Q_2 T} = b$ und der Winkel $Q_2 T Q_3 = \psi$ berechnen.

Wir denken uns nun die drei Punkte $P_1 P_2 P_3$ mit den beiden durch P_1 und P_2 gehenden Geraden g_1, g_2 unbeweglich. Das Dreieck $Q_1 Q_2 Q_3$ und mit diesem die durch Q_3 gehende Gerade g_3 und somit auch das ganze System Q

[1]) Die geodätische Orientierung zweier Punktfelder. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften. Math.-naturw. Klasse. Bd. CXX. Abt. IIa. Wien 1911.

[2]) Ueber die gegenseitige Orientierung zweier Figuren. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften. Math.-naturw. Klasse. Bd. CXXV. Abt. IIa. Wien 1916.

ist nun so zu verschieben, daß Q_1 auf g_1, Q_2 auf g_2 gleitet, wobei der Abstand $Q_1 Q_2 = a + b$ und auch die Abstände des Punktes T von Q_1 und Q_2 sowie der Winkel ψ ungeändert bleiben.

Es ist dann diejenige Lage des Systems Q zu finden, für welche g_3 durch den gegebenen Punkt P_3 hindurchgeht. Ist diese Lage gefunden, so sind mit dieser auch die Abstände $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3$ bekannt und ist daher die Aufgabe gelöst.

Wir haben diese Orientierungsaufgabe als eine «Erweiterung der Punktbestimmung durch Gegenschnitt» bezeichnet, da im Falle des Zusammenfallens der drei Punkte $P_1 P_2 P_3$ in einen und denselben Punkt P die bereits von Jordan gelöste und seither mehrfach behandelte[1]) Punktbestimmung durch Gegenschnitt vorliegt.

Es würde zu weit führen, die vorbereitenden Rechnungen hier ausführlich anzusetzen und genügt es, da dieselben ganz elementarer Natur sind, auf dieselben hinzuweisen.

Es sei O der Schnitt von g_1 und g_2. Wir nehmen O zum Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems XOY, wobei die Y mit g_2 zusammenfallen soll. Dieses Koordinatensystem dient lediglich als Rechnungsbehelf und ist dasselbe natürlich verschieden von den beiden Koordinatensystemen P und Q.

Da nun in dem Viereck $O P_1 P_3 P_2$ die beiden Winkel $\gamma_1 \gamma_2$ aus der Messung, hingegen γ_3 aus den gegebenen Koordinaten von $P_1 P_2 P_3$ im System P folgen, so ist auch der Winkel φ zwischen g_1 und g_2 bekannt.

Man entnimmt ferner leicht, daß sich in dem Dreiecke $P_1 P_2 O$ wegen der bekannten Entfernung $P_1 P_2$ und der ebenso bekannten Dreieckswinkel $P_3 P_1 P_2$ und $P_1 P_2 P_3$ auch die Entfernungen $P_1 O$ und $P_2 O$ ableiten lassen.

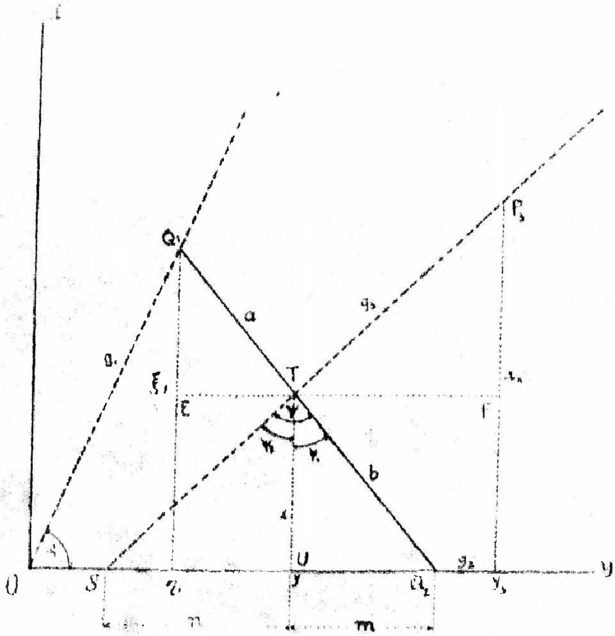

Fig. 2.

[1]) Vergl. u. a.: Klingatsch, Punktbestimmung durch Gegenschnitt. Zeitschrift f. Verm. 1911. Eggert, Punktbestimmung durch Gegenschnitt. Ebendaselbst 1912.

Man kann daher in XOY die Koordinaten der drei Punkte $P_1 P_2 P_3$ nach den Regeln der Polygonzugsberechnung bestimmen. Diese Koordinaten wären für die drei Punkte P bezüglich $x_1 y_1$, $x_2 = 0$, y_2, $x_3 y_3$.

Als Unbekannte wählen wir die Koordinaten x, y des Punktes T. Die Figur 2 gibt die für die Lösung der Aufgabe in Betracht kommenden Punkte und Linien.

Gleiten nun die Punkte Q_1, Q_2 auf g_1 und g_2, so beschreibt T bekanntlich eine Ellipse mit O als Mittelpunkt. Ihre Gleichung erhält man, wenn $\xi_1 \eta_1$, $\xi_2 = 0$, η_2, $\xi_3 \eta_3$ die Koordinaten von $Q_1 Q_2 Q_3$ in XY bedeuten, wegen

$$\xi_1 = \frac{a+b}{b} \cdot x, \text{ also } \xi_1 - x = \frac{a}{b} x \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

und

$$y - \eta_1 = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\xi_1}{\eta_1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

aus

$$b^2 \sin^2\varphi \cdot y^2 - b(a+b) \sin 2\varphi \cdot xy + \left((a+b)^2 \cos^2\varphi + a^2 \sin^2\varphi\right) x^2 - a^2 b^2 \sin^2\varphi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Eine zweite Gleichung zwischen x, y ergibt sich leicht folgendermaßen. Mit 1) und 3) läßt sich für 2) setzen

$$y - \eta_1 = \frac{by - (a+b) \operatorname{cotg} \varphi \cdot x}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2')$$

Nennt man $UQ_2 = m$, $US = n$, so erhält man wegen 1) und 2')

$$m = \frac{by - (a+b) \operatorname{cotg} \varphi\, x}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

$$n = \frac{y_3 - y}{x_3 - x} \cdot x \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Aus Figur 2 folgt weiter

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{m}{x}, \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{n}{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Wegen $\psi = \psi_1 + \psi_2$ wird daher

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{(m+n)\, x}{x^2 - mn} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

Ersetzt man in 8) m, n durch die Werte aus 5) und 6), so ergibt sich nach kurzer Reduktion die zweite Gleichung zwischen x, y mit

$$b \sin \psi\, y^2 - \left[b\,(y_3 \sin \psi + x_3 \cos \psi) + (a+b) \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin \varphi} \cdot x \right] y +$$

$$+ \Big[\left\{ -a\,(y_3 \cos \psi - x_3 \sin \psi) + (a+b)\,(y_3 \sin \psi + x_3 \cos \psi) \operatorname{cotg} \varphi \right\} x -$$

$$- \left\{ a \sin \psi + (a+b) \operatorname{cotg} \varphi \cos \psi \right\} x^2 \Big] = 0 \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

Erwägt man, daß

$$x'_3 = y_3 \sin \psi + x_3 \cos \psi, \quad y'_3 = y_3 \cos \psi - x_3 \sin \psi$$

die Koordinaten von P_3 in Bezug auf ein mit O konzentrisches Achsensystem $X'OY'$ bedeuten, wobei die X' mit X den Winkel ψ bildet, so kann 9) in der Form geschrieben werden,

$$a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9')$$

wo

$$a_2 = \alpha_2 + \alpha'_2 x, \quad a_3 = \alpha'_3 x + \alpha''_3 x^2 \quad \ldots\ldots \quad 10)$$

zu setzen ist und wegen 9)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = b \sin \psi, \quad \alpha_2 = -b x_3', \quad \alpha_2' = -\dfrac{(a+b)\sin(\psi-\varphi)}{\sin \varphi}, \\ \alpha_3' = -a y_3' + (a+b) \operatorname{cotg} \varphi\, x_3', \quad \alpha_3'' = -a \sin \psi - (a+b) \operatorname{cotg} \varphi \cos \psi \end{array}\right\} \quad 11)$$

bedeuten.

Nimmt man hiezu die Gleichung 4), die in der Form geschrieben werden kann

$$b_1 y^2 + b_2 y + b_3 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4')$$

wo

$$b_2 = \beta_2 x, \quad b_3 = \beta_3' x + \beta_3'' x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

und wegen 4)

$$b_1 = b^2 \sin^2 \varphi, \quad \beta_2 = -(a+b)\, b \cdot \sin^2 \varphi, \quad \beta_3 = -a^2 b^2 \sin^2 \varphi,$$
$$\beta_3'' = (a+b)^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

sind, so ist die Lösung der Aufgabe in den Gleichungen 4') und 9') enthalten.

Die Elimination von y aus diesen beiden liefert zur Bestimmung von x die gleich Null gesetzte Resultante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 - (a_2 b_1 - a_1 b_2)(a_2 b_3 - a_3 b_2) = 0, \quad 14)$$

also wegen 10) und 12) bezüglich x eine Gleichung vom vierten Grade. Für jeden aus 14) folgenden Wert von x gibt die gemeinsame Wurzel von 4') und 9') den zugehörigen Wert von y. Die Aufgabe hat daher im allgemeinen vier Lösungen und werden die örtlichen Verhältnisse maßgebend sein, welche von diesen in Betracht kommt.

Mit x, y erhält man aus 1) ξ_1, aus 2) oder 2') η_1, also die Koordinaten von Q_1 bezüglich XOY. Da m, n aus 5) und 6) folgen, so ist somit auch die Lage von Q_2 durch $\eta_2 = y + m$, $\xi_2 = 0$ gegeben. Es können dann wegen des bekannten Abstandes $\overline{ZQ_3}$ (Fig. 1) und des ebenso bekannten Winkels ψ auch die Koordinaten $\xi_3\, \eta_3$ von Q_3 in XY berechnet werden, wodurch die gegenseitige Lage der sechs Punkte $P_1\, P_2\, P_3\, Q_1\, Q_2\, Q_3$ samt den Winkeln, welche die drei Geraden $g_1\, g_2\, g_3$ mit den Dreiecksseiten bilden, gegeben bezw. leicht herzuleiten sind.

Aus den im System P gegebenen Koordinaten der Punkte $P_1\, P_2\, P_3$ können daher diejenigen der drei Punkte $Q_1\, Q_2\, Q_3$ oder umgekehrt aus den im System Q gegebenen Koordinaten von $Q_1\, Q_2\, Q_3$ diejenigen von $P_1\, P_2\, P_3$ in diesem letzteren Koordinatensystem berechnet werden, womit die gegenseitige Orientierung der beiden Dreiecke und im allgemeinen diejenigen der mit ihnen zusammenhängenden ebenen Figuren P, Q in dem einen oder dem anderen Koordinatensystem festgelegt ist.

Läßt man in Fig. 1 die beiden Punkte P_1 P_3 mit P_2 und damit auch O mit diesem letzteren Punkte zusammenfallen, so erhält man, wie oben bemerkt, die einfache Punktbestimmung durch Gegenschnitt.

Wegen $x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ wird aus 11) $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3' = 0$, also wegen 10) $a_2 = \alpha_2' x$, $a_3 = \alpha_3'' x^2$.

Die Gleichung 14) zur Bestimmung von x reduziert sich in diesem Falle, wie auch ohne weiteres klar ist, auf eine quadratische.

Das, wie bereits erwähnt, a. a. O. behandelte räumliche Orientierungsproblem mit beiderseits gemessenen Richtungen gibt — abgesehen von dem hier behandelten Falle, zu mehrfachen Spezialisierungen Veranlassung. So folgt daraus beispielsweise das räumliche Rückwärtseinschneiden mit Gegenschnitt, wenn also von dem zu bestimmenden Punkte P aus zwei durch Q_1 und Q_2 gehende Strahlen, hingegen von Q_3 eine an das Punktsystem Q angeschlossene Richtung nach P durch Horizontal- und Vertikalwinkelmessungen festgelegt sind.

Bei allen diesen Orientierungsaufgaben wurden nur die für die gegenseitige Orientierung notwendigen Messungen vorausgesetzt und wurden überschüssige Beobachtungen und die sich hieraus ergebenden Ausgleichungsprobleme bisher nicht berücksichtigt. Wir behalten uns vor, gelegentlich darauf zurückzukommen.

Anschauliche Ableitung der Azimut-Differentialformel.

Von Dr. techn. Erich Liebitzky, Bauadjunkt in Prag.

Zur Differentialformel der Azimute haben die Herren W. Láska, S. Wellisch und P. Werkmeister anschauliche Ableitungen gegeben*). Da derartige Ableitungen zweifellos einen gewissen didaktischen Wert haben, dürfte vielleicht die im folgenden mitgeteilte Ableitung, die den erwähnten an Einfachheit und Kürze zum mindesten nicht nachsteht, nicht ohne Interesse sein.

Sie beruht auf folgendem elementaren Satze der Mechanik:

«Das Moment der Resultierenden eines ebenen Kräftesystems in Bezug auf irgend einen Punkt in der Ebene ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Einzelkräfte.»

Bezeichnet in untenstehender Figur A einen gegebenen Festpunkt, P die richtige, P_0 eine genäherte Lage des zu bestimmenden Neupunktes, s_0 die Entfernung AP_0, φ_0 den genäherten Azimutwinkel der Visur AP_0, $d\varphi$ die Azimutänderung, welcher die Koordinatenänderungen dx und dy entsprechen, so läßt sich die Strecke $\overrightarrow{P_0P}$ einerseits als Resultierende der Kräfte $\overrightarrow{P_0Q} = dy$ und

*) Siehe die Jahrgänge 1905, 1912 und 1916 dieser Zeitschrift.