Paper-ID: VGI_191716

# Zum Einschalten eines Neupunktes in das Punktnetz durch Streckenmessung

Ernst Hammer [1]

[1] *Stuttgart*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **15** (7–8), S. 100–107

1917

BibTeX:

```
@ARTICLE{Hammer_VGI_191716,
Title =  {Zum Einschalten eines Neupunktes in das Punktnetz durch
   Streckenmessung},
Author =  {Hammer, Ernst},
Journal =  {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages =  {100--107},
Number =  {7--8},
Year =  {1917},
Volume =  {15}
}
```

Als Hauptzüge treten bei jeder einzelnen seiner Forscherarbeiten hervor: breiteste deutsche Gründlichkeit und Aufbau auf theoretischer Grundlage; sodann bei der Einordnung der fertigen Arbeit in das gesamte Wissensgebiet: staunenswerte Kenntnis der in- und ausländischen Literatur, unterstützt durch ein phänomanales Gedächtnis. Von dieser Kenntnis geben die «Theorien . . .», sowie der Artikel über die Schwerkraft in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften ungesucht Zeugnis. Charakteristisch bleibt für ihn: Lust, Freude und Stolz über das eigene Schaffen und über das Wachsen der Erkenntnis.

Der Geodäsie hat er neue Bahnen gewiesen, er hat diese seine Wissenschaft zu erhöhtem Ansehen gebracht, nie wird sie dies ihrem Meister vergessen.

*R. Schumann.*

---

# Zum Einschalten eines Neupunktes in das Punktnetz durch Streckenmessung.

Von **E. Hammer.**

**1.** Zu der im Titel genannten, in einem der letzten Hefte dieser Zeitschr. von Herrn Professor Dr. Dokulil behandelten Aufgabe (s. d. Z. 1917, S. 65 bis 69) möchte ich mir einige Bemerkungen gestatten.

Die Aufgabe ist in rechnerischer Ausgleichung als hübsches einfaches Beispiel vermittelnder Bestimmung von zwei Unbekannten, nämlich der Koordinaten des durch Streckenmessung von gegebenen Punkten aus festgelegten Punktes, von Interesse, und, da sie auch in nicht wenigen Fällen an Stelle des Einschneidens des Punktes durch gemessene Horizontalwinkel von praktischer Bedeutung werden kann, oft behandelt, so von Jordan, von Koll (vgl. neben der Preussischen «Anweisung IX.» die «Methode der kl. Qu.» von Koll, 2. Aufl., Berlin 1901, II. Teil, 4. Abschn.), von Hammer (in einem wie es scheint ganz unbeachtet gebliebenen Aufsatz der «Zeitschr. f. Math. u. Physik» [früher Schlömilch], Bd. 43, 1898, S. 105 bis 115; auf diesen Aufsatz ist wegen der graphischen Ausgleichung u. s. f. unten zurückzukommen). Eine Formelentwicklung für die rechneriche Ausgleichung braucht also nicht angeschrieben zu werden, und der folgende Absatz **2.** bezieht sich nur auf das Zahlen-Beispiel bei Dokulil. Von nicht geringerem Interesse ist aber auch die graphische Ausgleichung dieser Aufgabe, ebenfalls mehrfach behandelt, so von Hammer a. a. O., in der österreichischen Instruktion für Polygonalvermessung u. s. f.

**2.** Bedeutet $K$ mit den fest gegebenen Koordinaten ($x_k$, $y_k$) einen beliebigen der gegebenen Festpunkte, von denen aus die Strecken $L = KN$ nach dem zu bestimmenden Neupunkt $N$ gemessen sind, so haben bekanntlich die Verbesserungs-(«Fehler»-)Gleichungen mit den kleinen Korrektionen $x$ und $y$ (bei Dokulil $\triangle x_0'$ und $\triangle y_0'$) an den Näherungs-Koordinaten ($x_0$ $y_0$) des Punktes $N$ zur Ermittlung von dessen endgültigen Koordinaten

$$(1) \quad \underline{x} = x_0 + x, \qquad \underline{y} = y_0 + y$$

die gewöhnliche Form

$$(2)\quad v_k = a_k \cdot x + b_k \cdot y + l_k,$$ wenn gesetzt wird

$$(3)\quad a_k = \frac{x_0 - x_k}{L_{0,k}}, \qquad b_k = \frac{y_0 - y_k}{L_{0,k}}, \qquad l_k = L_{0,k} - L_k$$

und in der letzten dieser Gleichungen (3) bedeutet $L_{0,k}$ die Entfernung von dem Punkt $K$ bis zu dem Näherungspunkt $(x_0, y_0)$, $L_k$ aber, wie oben angegeben, die gemessene Strecke $\overline{KN}$. Die Abstände $L_{0,k}$ zwischen den gegebenen Festpunkten $K$ und dem Näherungspunkt werden je nach Größe und Genauigkeitsbedarf mit Hilfe einer ausführlichen Quadrattafel oder 5- bis 6-stellig logarithmisch mit Verwendung der Richtungswinkel $(KN_0)$ als Hilfswinkel berechnet; auch für den letzten Fall bringt aber die Bemerkung, daß für $a_k$ und $b_k$ auch cos $(KN_0)$ und sin $(KN_0)$ gesetzt werden kann, keine Vereinfachung der Rechnung im Vergleich mit der Ablesung dieser Koeffizienten am Rechenschieber.

Selbst für sehr feine Rechnungen ist es nämlich ganz überflüssig, diese Koeffizienten $a$, $b$ (bei Dokulil $\alpha$, $\beta$) mit der Genauigkeit zu berechnen, die Dokulil anwendet: er schreibt sie mit 5 Dezimalen an, die Koeffizienten der Normalgleichungen sogar mit 6 Dezimalen, um schließlich die kleinen Koordinatenkorrektionen $x$ und $y$ mit den im äußersten Fall erforderlichen 2 Dezimalen zu erhalten! Man kann meiner Ansicht nach nie genug betonen, daß sich bei derartigen einfachen Ausgleichungen der Niedern Geodäsie die Anwendung der strengen Ausgleichung nur verlohnt, wenn die Rechnung entsprechend wenig Zeit beansprucht, d. h. durch geeignete Wahl der Einheiten, genügende Näherungen und Abrundungen u. s. w. dafür gesorgt wird, daß die Ausgleichung vollständig mit dem Rechenschieber ausgeführt werden kann. Weder die Logarithmentafel noch die Rechenmaschine sind die geeigneten Mittel zur Durchführung dieser Ausgleichungen (i. e. S.), sondern allein der gewöhnliche Rechenschieber. Dies soll hier an dem Dokulil'schen Beispiel gezeigt werden, dessen Daten nochmals angeschrieben seien:

| | Gegebene Punkte $K$ $y_k$ | $x_k$ | Gemessene Strecken $\overline{KN} = L$ nach Neupunkt $N = 83$ | Als Näherungspunkt dient der Punkt $N_0$ mit den Koordinaten: |
|---|---|---|---|---|
| (4) $\underline{\underline{79}}$ | $-18106{,}82$ | $-111426{,}07$ | $\underline{\underline{79}} - 83 = 75{,}42\,m$ | |
| $\underline{\underline{80}}$ | $-18026{,}01$ | $-111415{,}90$ | $\underline{\underline{80}} - 83 = 72{,}13$ „ | $y_0 = -\ 18055{,}79$ |
| $\underline{\underline{81}}$ | $-17997{,}75$ | $-111479{,}36$ | $\underline{\underline{81}} - 83 = 58{,}23$ „ | $x_0 = -111481{,}54$ |

Die kleinen Korrektionen $y$, $x$ der zuletzt angeschriebenen Näherungswerte auf die endgültigen Koordination von $\underline{N} = \underline{83}$

$$(4')\quad \begin{cases} \underline{y_n} = -\ \ 18055{,}79 + y \\ \underline{x_n} = -111481{,}54 + x \end{cases}$$ (nebst ihren m. F.) sind

die zwei Unbekannten der Ausgleichung. Die Berechnung der im Folgenden angegebenen $L_{0,k}$ ist 6-stellig logarithmisch gemacht, um aus formellen Gründen das $mm$ ganz sicher zu erhalten; sachlich würde auch die 5-stellige log. Tafel und ebenso die Quadrattafel in F. G. Gauß'Tafeln mehr als hinreichen, da die Koordinaten der gegebenen Punkte nur auf 1 $cm$ angeschrieben und ebenso die gemessenen Strecken auf 1 *cm* abgerundet sind und damit das *cm* die letzte Recheneinheit bilden könnte. Die Strecke zwischen $\underline{\underline{81}}$ und $83_{(0)}$ ist selbstverständlich nach

$$\sqrt{58{,}04^2 + 2{,}18^2} = 58{,}04\left(1 + \left(\frac{2{,}18}{58{,}04}\right)^2\right)^{1/2} = 58{,}04\left(1 + {}^1/_2\left(\frac{2{,}18}{58{,}04}\right)^2\right) = 58{,}04 + \frac{2{,}18^2}{116{,}1}$$

$$= 58{,}040 + 0{,}041 = 58{,}081$$ mit einer Rechenschieberablesung gerechnet; diese Zahl ist in der Tat schärfer als die Zahl 58,080 bei Dokulil, es soll aber für das folgende diese letzte beibehalten werden, um überall bequeme Vergleichung der beiden Rechenweisen zu ermöglichen. Die Entfernungen zwischen den Punkten $\underline{\underline{79}}$ und $83_{(0)}$ und zwischen $\underline{\underline{80}}$ und $83_{(0)}$ werden 75,372 und 72,079, womit sich die $l_k$ in (3) der Reihe nach ergeben zu

(5) — 0,048 *m* — 0,051 *m* — 0,150 *m*.

Da es nun aber bekanntlich für die bequeme, möglichst einfache und sichere Bildung und Auflösung der Normalgleichungen sehr wichtig ist, daß alle Koeffizienten in den Verbesserungsgleichungen $a$, $b$, $l$ durchschnittlich (absolut) von derselben Größe sind und die $a$, $b$ als cos und sin von Winkeln echte Brüche sind, so ist es methodisch nicht richtig, die $l$ in *m* zu lassen, oder sie z. B. in *cm* als — 4,8, . . . zu nehmen; es ist vielmehr angezeigt, für die $l$ und damit für alle andern Längen der Ausgleichung das *dm* als Einheit zu wählen. Die $l$ sind also zu

(5') — 0,48 — 0,51 — 1,50 (*dm*)

anzusetzen. Auch die von Dokulil gewählten Gewichtszahlen, die mit Rücksicht nur auf die unregelmäßigen Fehler der Messungen $L$ einfach umgekehrt proportional den Strecken $L$ genommen werden, sind mit den Zahlen

13 14 17,

gegen deren Abrundung nichts einzuwenden ist (s. u.), für die Rechenschieberrechnung nicht die bequemsten; es ist vielmehr besser diese Gewichte zu

(6) 1,3 1,4 1,7

anzusetzen, womit sich die

(7) Gewichtseinheit $p = 1$ auf die Streckenmessung 100 *m* bezieht. Die Koeffizienten $a$, $b$ der $x$, $y$ in (3) sind unmittelbar am Rechenschieber ($A/B$ Skale) nur auf 1 $\text{Einh}_3$ abgerundet abgelesen. Stellen wir hienach alle Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen zusammen*) und auch gleich die durchaus mit dem Rechenschieber (Skale $C/D$) auf bekannte Art mit möglichst wenigen Einstellungen abgeschobenen Einzelposten für die $paa$, $pab$, . . . ., so ergibt sich die folgende Übersicht (8) und (9), die weiterer Erläuterung nicht bedarf:

| | $p$ | $a$ | $b$ | $l(dm)$ | $paa$ | $pab$ | $pal$ | $pbb$ | $pbl$ | $pll$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (8) | 1,3 | —0,736 | +0,677 | —0,48 | 0,704 | —0,647 | +0,459 | 0,595 | —0,424 | $0{,}299_5$ | (9) |
| | 1,4 | —0,911 | —0,413 | —0,51 | 1,161 | +0,528 | +0,650 | 0,239 | +0,295 | $0{,}364_1$ | |
| | 1,7 | —0,038 | —0,999 | —1,50 | 0,002 | +0,065 | +0,097 | 1,697 | +2,548 | 3,825 | |
| | | | | | 1,867 | —0,056 | +1,206 | 2,531 | +2,419 | 4,489 | |

*) Das Vorzeichen + bei $\alpha_1$ Seite 68 ist Druckfehler und in — zu ändern.

Die bequeme Anordnung der Normalgleichungen zur Auflösung mit dem R e c h e n s c h i e b e r (die Skalen $A/B$ genügen vollständig, vielfach sogar Kopfrechnen ganz ohne Werkzeug, weil eben für kleine Zahlen gesorgt ist) sieht nun bekanntlich so aus, wobei die am Rechenschieber stets mit e i n e r Ablesung sich ergebenden Zahlen hier in Cursiv gesetzt sind:

$$
(10)\left\{
\begin{array}{r|r||r|r}
\underline{1{,}867}x - 0{,}056y + 1{,}206 = 0 & \underline{4{,}489} & \underline{2{,}531}y - 0{,}056x + 2{,}419 = 0 & \underline{4{,}489} \\
\underline{2{,}531} \;+ 2{,}419 & \mathit{0{,}780} & \underline{1{,}867} \;+ 1{,}206 & \mathit{2{,}31} \\
-\,\mathit{0{,}002} \;+ \mathit{0{,}036} & & -\,\mathit{0{,}001} \;+ \mathit{0{,}053} & \\
\hline
\underline{2{,}529} \;+ 2{,}455 & \underline{3{,}709} & \underline{1{,}866} \;+ 1{,}259 & \underline{2{,}18} \\
y = -\dfrac{2{,}455}{2{,}529} = -\,0{,}97\,dm & \dfrac{\mathit{2{,}38}}{1{,}33} & x = -\dfrac{1{,}259}{1{,}866} = -\,0{,}67_5\,dm & \dfrac{\mathit{0{,}85}}{1{,}33} \\
= -\,9{,}7\ cm;\ p_y = 2{,}53. & =[pvv] & = -\,6{,}7\ cm;\ p_x = 1{,}87 & =[pvv]
\end{array}
\right\}(11)
$$

$$
(12)\left\{
\begin{array}{l}
m_1 \text{ (m. F. der Gew. Einh., d. h. der gemess. Strecke 100 } m\text{)} \\
\qquad = \sqrt{\dfrac{1{,}33}{3-2}} = \pm\, 1{,}15\ dm = \pm\, 11{,}5\ cm, \\
m_y = \dfrac{1{,}15}{\sqrt{2{,}53}} = \pm\, 0{,}72\,dm = \pm\, 7{,}2\,cm;\ m_x = \dfrac{1{,}15}{\sqrt{1{,}87}} = \pm 0{,}84\,dm = \pm\, 8{,}4\,cm.
\end{array}
\right.
$$

Fügt man den Näherungswerten $y_0$ und $x_0$, vgl. (4), die Korrektionen $y$ und $x$, nebst den berechneten m. F. bei, so ergibt sich also:

$$
(13)\left\{
\begin{array}{l}
\underline{y} = y_0 + y = -\quad 18055{,}887 \text{ mit dem m. F. } \pm\, 0{,}072\ m \\
\underline{x} = x_0 + x = -\ 111481{,}607_5 \text{ ,, ,, ,, ,, } \pm\, 0{,}084\ m
\end{array}
\right\}\begin{array}{l}\text{durchaus} \\ \text{auf } 1\ mm\end{array}
$$

mit den Zahlen bei D o k u l i l übereinstimmend und zwar bei einer Rechnungsgenauigkeit, die weit über die sachlich begründete hinausgeht. Es ist dabei für diese Art der Rechnung mit dem R e c h e n s c h i e b e r, selbst bei nicht weitgehender Uebung, kaum möglich, für die gesamte Rechnung von (5) bis zu (13), d. h. n a c h Berechnung der Näherungswerte der Koordinaten und Berechnung der $L_{0,k}$, also der Geschäfte, die für alle Ausgleichungsverfahren, ob streng oder genähert oder graphisch, dieselben bleiben, länger als eine Viertelstunde zu brauchen; diese Zeit läßt sich bei guter Uebung leicht auf weniger als die Hälfte abkürzen, wobei im vorliegenden Beispiel allerdings die kleine Zahl der Messungen (nur e i n e «überschüssige», womit der Wert der berechteten «m. F.» problematisch wird) ihre Rolle spielt.

Die Unbekannten $x$ und $y$ sind oben deshalb so übertrieben scharf berechnet, weil man eine fast die ganze Rechnung prüfende Probe bekanntlich dadurch erhalten kann, daß man mit Hilfe jener scharfen Werte die Beträge der $v$ nach den Verbesserungsgleichungen ausrechnet (selbstverständlich abermals mit dem Rechenschieber, $A/B$ Skale genügend) und mit diesen $v$ (mit je e i n e r Einstellung bei Verbindung der Skalen $D$ und $A$) die einzelnen Posten $p\,v\,v$. Man erhält folgende Zahlen für die einzelnen $v$, damit für die verbesserten Strecken $\underline{L}$ und für die $[p\,v\,v]$:

| | alle Glieder sind *dm*: | bei Dokulil | $\underline{L}$ | |
|---|---|---|---|---|
| (14) | $v_1 = +0{,}496 - 0{,}656 - 0{,}48 = -0{,}64_0\ dm$ | $-6{,}4\ cm$ | $\underline{75{,}356}$ | |
| | $v_2 = +0{,}615 + 0{,}401 - 0{,}51 = +0{,}50_6\ dm$ | $+5{,}1\ cm$ | $\underline{72{,}181}$ | (15) |
| | $v_3 = +0{,}026 + 0{,}969 - 1{,}50 = -0{,}50_5\ dm$ | $-5{,}0\ cm$ | $\underline{58{,}180}$ | |

(16) $[p\,v\,v] = 0{,}533 + 0{,}358 + 0{,}435 = \underline{1{,}33}$, übereinstimmend mit den Zahlen $[p\,l\,l \cdot 2]$ bei (10) und (11) in der Auflösung der Normalgleichungen. Die Uebereinstimmung aller Zahlen mit den bei Dokulil vorhandenen zeigt, daß die Abrundungsfehler der Rechenschieberrechnung ganz ohne Bedeutung sind, diese vielmehr an Genauigkeit mehr als hinreicht und demnach eine Ausgleichungsrechnung mit Zahlen bei auf 1 $\text{Einh}_5$ und 1 $\text{Einh}_6$ zum mindesten recht überflüssig ist.

Will man nach (16) noch eine etwas weiter durchgreifende Probe haben, so ist bekanntlich die Wiederholung der Berechnung der $\underline{L}$ mit den endgültigen Zahlen für den Neupunkt zu empfehlen, die mit den $\underline{L}$ von (15) stimmen müssen. Man findet mit den Koordinaten von $\underline{N} = 83$ und bei abermals 6-stelliger Rechnung als Entfernungen von den gegebenen Punkten $\underline{\underline{79}}$, $\underline{\underline{80}}$, $\underline{\underline{81}}$ nach $\underline{N}$ die endgültigen Entfernungen

(17) $\underline{75{,}356}$; $\underline{72{,}181}$; $\underline{58{,}180}$, wie in (15).

Ich bitte den Leser, an der Hand der vorstehenden Niederschrift, in der keine einzige, in der Ausgleichungs-Rechnung zu schreibende Zahl weggelassen ist, einmal diese Ausgleichung vorzunehmen mit Hilfe des gewöhnlichen Rechenschiebers; ich glaube, er wird dann für derartige einfache Sachen nie mehr nach einem andern Rechenhilfsmittel greifen. Man darf sagen, daß die rationelle Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Messungen der Niedern Geodäsie soweit ausgedehnt werden kann, als die Anwendung des Rechenschiebers möglich ist (oder höchstens die Anwendung der Rechenschieber, um auch noch feinere mechanisch-logarithmische Werkzeuge einzuschließen.

Ich bitte den Leser ferner, diese Rechenschieber-Rechnung zu wiederholen, nachdem er die Koeffizienten $a$, $b$ in (8), wie die $l$ in derselben Zusammenstellung, je auf zwei statt drei Dezimalen abgerundet hat; er wird finden, daß er auch damit noch auf 1 *mm* genau dieselben $x$ und $y$ findet wie oben, daß $[p\,v\,v]$ aus der Auflösung der Normalgleichungen und aus der unmittelbaren Bildung der einzelnen $v$ und $p\,v^2$ übereinstimmend gleich 1,32 wird und demnach auch die Werte $m_1$, $m_x$ und $m_y$ dieselben bleiben wie oben. Und ich möchte ihn schließlich bitten, die Auflösung abermals zu wiederholen, nachdem die $a$, $b$ in (8) je auf eine Dezimale abgerundet und ebenso die $l$ daselbst auf $-0{,}5$, $-0{,}5$ und $-1{,}5$ abgerundet sind; er findet bei dieser Rechnung, die nun überhaupt keines besondern Rechenhilfsmittels mehr bedarf, daß immer noch praktisch genügend genaue Zahlen für $x$ und $y$ und ihre mittleren Fehler mit $[p\,v\,v] = 1{,}3$ sich ergeben!

**3.** Der einfache obige Ansatz (6), die Gewichte der Strecken $L$ umgekehrt proportional ihren Längen zu nehmen, d. h. also den m. F. der Streckenmessung proportional der Quadratwurzel aus der Streckenzahl und damit die Messung nur mit unregelmäßig wirkenden Fehlern behaftet zu denken

$$(18) \qquad m = c \cdot \sqrt{L},$$

wobei $c$ auf günstigem wagrechtem Boden und bei sorgfältiger Messung leicht auf 1 *mm* und weiter herabgedrückt werden kann, entspricht bekanntlich nicht den wirklichen Verhältnissen. Es soll hier nicht weiter auf die viel erörterte Frage der Fehler direkter Längenmessungen eingegangen und nicht untersucht werden, ob die Form der preußischen Katastervermessung

$$(19) \qquad m = \sqrt{c_1 \cdot L + c_2 \cdot L^2}$$

die zweckmäßigste ist; immerhin sei darauf aufmerksam gemacht, daß neben den unregelmäßigen und neben den regelmäßigen (systematischen) Fehlern, die (19) zu berücksichtigen sucht, in vielen Fällen meist noch k o n s t a n t e Fehler eine nicht zu unterschätzende Rolle spielen, z. B. bei Ablesung der *cm* am Endpunkt der Strecke durch Schätzung zwischen die *dm*-Punkte oder Ringe der letzten Latte hinein oder bei Anlegung der ersten Latte an einem der unsicher bezeichneten Anfangspunkte («Mitte» eines nicht sehr regelmäßig geformten Grenzsteins) u. s. w. Damit wäre die Form

$$(20) \qquad m = \sqrt{c_4 + c_1 \cdot L + c_2 \cdot L^2}$$

anzunehmen. E i n systematischer, den gemessenen Längen proportionaler Fehler ist aber jedenfalls hier besonders zu würdigen: ist nicht eine merklich werdende Verschiedenheit zwischen dem Meter der Koordinaten der gegebenen Punkte oder also dem Meter der Entfernungen der fest gegebenen Punkte untereinander und dem Meter der Latten vorhanden, mit denen die Strecken nach dem zu bestimmenden Neupunkt gemessen sind? Gleichzeitig damit kann natürlich auch an eine a n d e r e Ursache gedacht werden, die die Messung aller Strecken systematisch nach der einen o d e r andern Seite hin entsellt. Man wird die Frage unbedingt mit Ja beantworten, wenn nach Durchführung der in **2.** angegebenen Rechnung die $v$ sämtlich dasselbe Vorzeichen erhalten und zudem in ihrer Größe Abhängigkeit vom Betrag der $L$ zeigen; selbst wenn z. B. bei im ganzen 5 gemessenen $L$ sich zwei $v$ als kleine negative Beträge ergeben, die drei andern als mit der Größe von $L$ verschiedene positive Werte, wird man, obwohl noch andere Einflüsse sich geltend machen können, insbesondere Fehler in den als fehlerfrei angesehenen Koordinaten der gegebenen Punkte, es als ziemlich sicher ansehen, daß ein systematischer «Fehler» in den $L$ vorliegt: die gemessenen Strecken wären hier im Vergleich mit den Maßen im Netz der gegebenen Punkte etwas zu kurz, d. h ein Lattenmeter wäre als etwas länger anzusehen denn ein Koordinatenmeter (oder es wäre eine die Messungen in diesem Sinne beeinflussende systematische Ursache vorhanden). Ein solcher systematischer Unterschied wächst selbst bei geringem Einheitsbetrag bekanntlich rasch zu bedeutenden Werten an; ist der Unterschied zwischen dem Lattenmeter und dem Koordinatenmeter nur $1/_2$ *mm*, so beträgt für je 100 *m* gemessener Strecke die Differenz 5 *cm*. Diese am Schluß der Rechnung sich zeigende mittelbare Vergleichung zwischen 1 $m_L$ und 1 $m_K$ ist bekanntlich unter Umständen wertvoller als die unmittelbare Feststellung des

Lattenmeters, schon deshalb, weil jene nicht nur die Länge des Lattenmeters feststellt, sondern gleichzeitig auch die systematischen Fehler der Messung berücksichtigt.

In dem angedeuteten Falle ist der errechnete «wahrscheinlichste» Punkt nicht der beste; es ist vielmehr die Rechnung zu wiederholen, nachdem die den $L$ proportionalen notwendigen Aenderungen an diesen angebracht sind; es ist leicht zu sehen, wie diese zweite Rechnung mit Benützung der ersten abgekürzt werden kann, ich brauche hier darauf nicht weiter einzugehen. Dagegen sei noch betont, welch große Vorteile im Sinn der Erkennung und Berechnung dieser systematischen Fehler hier wieder die graphische Behandlung der Aufgabe in ihrer unmittelbaren Anschaulichkeit bietet. Eine solche graphische Ausgleichung, die sich von andern mir bekannt gewordenen unterscheidet, habe ich a. a. O. S. 111—114 mitgeteilt und es sei hierauf verwiesen. Dabei sei besonders noch auf die von mir so genannten Nebenlinien (Parallelen zu den Bestimmungslinien [Oertern] für den zu berechnenden Punkt) aufmerksam gemacht, die ich vor mehreren Jahrzehnten eingeführt habe («Zur graphischen Ausgleichung beim trigonometrischen Einschneiden von Punkten», Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart, 1896) und von denen auch hier mit Vorteil Gebrauch gemacht werden kann; und ferner sei noch hingewiesen auf die Leichtigkeit, mit der diese graphische Ausgleichung die gelegentliche Kombination der Bestimmung eines Neupunkts durch Winkelmessung (Vorwärts- oder Rückwärtseinschneiden) und Streckenmessung ermöglicht.

4. Eine Schlußbemerkung vom a. O., S. 114/115, möchte ich hier noch andeutungsweise wiederholen: sie betrifft die Abbildungsart des kleinen Stücks der Kugeloberfläche auf die Ebene, in der die rechtwinkligen Koordinaten der Festpunkte gegeben sind. Nach einer frühern Entwicklung Jordans hätten die gewöhnlichen rechtwinkligen sphärischen (Soldner'schen) Koordinaten einen Vorteil vor der Veränderung der Soldner'schen Ordinaten, die die Abbildung zur Gauß'schen «konformen» Abbildung macht, wenn die Einschaltung von Neupunkten ins Punktnetz in der Hauptsache durch Streckenmessung auf Grund der hier behandelten Aufgabe, nicht durch Horizontalwinkelmessung zu geschehen hätte; und eine ähnliche Behauptung ist neuerdings wieder einmal aufgetaucht. Es ist leicht einzusehen, daß dies nicht zutrifft. Im Soldner'schen System ist in einem bestimmten Punkt der Abbildung, der die Ordinate $y$ haben mag, das differentielle Längenverstreckungsverhältnis in verschiedenen Richtungen verschieden: Minimum 0 in der Richtung senkrecht zur $x$-Achse (Richtungswinkel $90^0$ und $270^0$), Maximum $\frac{y^2}{2R^2}$ in der Richtung der $x$-Achse (Richtungswinkel $0^0$ und $180^0$), in beliebiger Richtung; R · W · $\pm \alpha$ oder $180^0 \pm \alpha$ beträgt es $\frac{y^2}{2R^2}\cos^2\alpha$. Die zum richtigen Eintragen in das «Projektionssystem» erforderliche, mit der Richtung der Strecke wechselnde, geringe Vergrößerung der einzelnen gemessenen Strecken ist also sehr leicht zu überschlagen, falls sie überhaupt in Betracht kommt; sie hat immerhin für $y = 90000\ m$ und für $y =$

100000 $m$ Entfernung von der $x$-Achse einen Größtwert (parallel zur $x$-Achse) von rund $\frac{1}{10000}$ und rund $\frac{1}{8100}$ der Länge, wird also neben andern regelmässigen Fehlern selbst gewöhnlicher sorgfältiger Längenmessungen merklich. Da es sich hier stets nur um verhältnismäßig sehr kurze $L$ handelt, die jedenfalls nicht wie die Zielungen beim Einschneiden durch Horizontalwinkelmessung 1 $Km$ oder mehrere bis viele $Km$ Länge erreichen, so kommt der Unterschied zwischen Länge der Sehne und Länge des schwach gekrümmten entsprechenden Bogens, in den sich jedes der $L$ im Projektionssystem abbildet, unter keinen Umständen in Betracht; der Unterschied zwischen beiden Längen ist Kleine III. O., wenn der Bruch Länge : Krümmungshalbmesser I. O. ist. In dem oben angedeuteten Gauß'schen Koordinatensystem (für die sphärische Berechnung transversale Mercatorkarte) dagegen ist die Projektionsverstreckung der gemessenen L in dem behandelten Punkt nach allen Richtungen hin dieselbe und also noch einfacher zu berücksichtigen als in Soldner'schen Koordinaten. Und mit Rücksicht auf die erwähnte geringe Krümmung der Großkreisbilder in der Abbildung bei den stets vorhandenen nicht großen Entfernungen der Messungsstelle vom Grundkreis oder Hauptpunkt der Abbildung und die Kleinheit der $L$ gilt die für diese «konforme» Abbildung gemachte Bemerkung auch für andere winkeltreue Abbildungen, z. B. für die (ebenfalls von Gauß untersuchte) winkeltreue konische Abbildung, die Paschen in Mecklenburg verwendet hat, für die winkeltreue azimutale Abbildung (s. g. stereographische Projektion), die in Ungarn gebraucht worden ist, u. s. f.

---

# Fachgruppe für Vermessungswesen

### im Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereine in Wien.

Im Anschlusse an unseren Bericht des verflossenen Jahres (Siehe: Ö. Z. f. V. 1916. S. 60—63), in welchem über die Gründung einer Fachgruppe für Vermessungswesen im Oesterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereine sowie ihre Tätigkeit vom Jahre 1913 bis Jänner 1916 Näheres gebracht wurde, wollen wir nachstehend weitere Mitteilung machen über die Veranstaltungen und das fachliche Wirken dieser den Interessen des Vermessungswesens dienenden Körperschaft des ersten technischen Vereines in Oesterreich, in welcher die k. k. Vermessungsbeamten gern gesehene Gäste und alle Freunde unserer Wissenschaft herzliche Aufnahme finden, und wir erfüllen gerne die uns von einem Geometer aus dem Felde gegebene Anregung, im heurigen Berichte kurze Inhaltsangaben der gehaltenen Vorträge zu veröffentlichen.

Jahr 1916.

1. Fachgruppenversammlung am 20. März 1916. Vortrag des Direktors des lithographischen Institutes Emmerich Hunna: »Das lithographische Institut des österreichischen Grundsteuerkatasters, seine Gründung, Aufgaben und Leistungen.«