

Paper-ID: VGI_191710



Über eine Lösung des Rückwärtseinschneidens

Erich Liebitzky ¹

¹ *k. k. Bauadjunkt in Prag*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **15** (5, 6), S. 70–73, 89–92

1917

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Liebitzky_VGI_191710,  
Title = {{\U}ber eine L{"o}sung des R{"u}ckw{"a}rtseinschneidens},  
Author = {Liebitzky, Erich},  
Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {70--73, 89--92},  
Number = {5, 6},  
Year = {1917},  
Volume = {15}  
}
```



Über eine Lösung des Rückwärtseinschneidens.

Von Dr. techn. Erich Liebitzky, k. k. Bauadjunkt in Prag.

Während die bekannten geometrischen Lösungen des einfachen Rückwärtseinschneidens sich auf den Satz von der Gleichheit der Peripheriewinkel über derselben Sehne am Kreise gründen¹⁾, beruht die im folgenden mitgeteilte einfache Konstruktion auf dem Prinzip der reziproken Figuren, wie es in der graphischen Statik angewendet wird, und einer Tangenteneigenschaft der Parabel.²⁾ Von Interesse dürfte es auch sein, daß sich an der Hand der gewonnenen Konstruktionsfigur eine logarithmisch brauchbare trigonometrische Lösung ergibt, welche der bekannten Burckhardt'schen Lösung verwandt ist.

Die erwähnte Tangenteneigenschaft der Parabel, auf die sich unsere Konstruktion stützt, ergibt sich aus folgendem Satze:

«Der Winkel, unter welchem der Abschnitt einer beweglichen Parabeltangente zwischen zwei festen Tangenten vom Brennpunkte der Parabel erscheint, ist konstant.»

Sei in Figur 1 F der Brennpunkt, l die Leitlinie, s die Scheiteltangente, t_1 und t_2 zwei feste, t eine bewegliche Tangente einer Parabel und betrachtet man einmal t_1 und t_2 , das anderemal s und t_1 als die zwei festen Tangenten, so ist nach obigem Satze sowohl der Winkel $BFC = \alpha$ als auch der Winkel BFA konstant, und da das Dreieck ABF bei A rechtwinklig ist, so ist auch der Winkel $ABF = \beta$ konstant. Es sind also in dem beweglichen Dreiecke BFC die Winkel α und β , mithin alle drei Winkel konstant. Man erhält daher aus dem obigen Satze den folgenden, für unseren Zweck unmittelbar brauchbaren Folgesatz:

«Ändert ein Dreieck in der Ebene, sich ähnlich bleibend, seine Lage und Größe so, daß ein Eckpunkt fest bleibt und ein zweiter Eckpunkt eine feste Gerade beschreibt, so beschreibt auch der dritte Eckpunkt eine feste Gerade.»

«Der feste Eckpunkt ist der Brennpunkt einer Parabel, deren Tangenten die zwei festen Geraden und die dem festen Eckpunkte gegenüberliegenden Dreiecksseiten sind.»³⁾

Wenden wir uns nun unserer Aufgabe des Rückwärtseinschneidens zu, welche lautet: Drei feste Punkte A, B, C (Fig. 2a) sind gegeben, ein Neupunkt P ist durch bloße Messung der Winkel α und β zu bestimmen.

Denken wir uns zunächst den Punkt P gefunden und ziehen durch einen beliebigen Punkt O der Ebene drei Strahlen parallel zu den Seiten des gegebenen

¹⁾ Über die zahlreichen Lösungen dieser Aufgabe vergleiche die verschiedenen Lehr- und Handbücher der Geodäsie, vor allem Jordan — Reinhertz — Eggert, Handbuch der Vermessungskunde 2. Bd. 7. Aufl., Stuttgart 1908 bei J. B. Metzler; Hartner — Wastler — Doležal, Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie 9. Aufl., I. Bd., II. Hälfte, Wien 1904 bei L. W. Seidel u. Sohn; Reinhertz, Niedere Geodäsie. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen Band VI, Heft 1, Leipzig 1916 bei B. G. Teubner, und die in den angeführten Werken enthaltenen Literaturangaben.

²⁾ Vergleiche die Fußnote ad ¹⁾.

³⁾ Wir brauchen bloß den ersten Teil des Satzes. Der zweite Teil, in dem von der Parabel die Rede ist, wird nur der Vollständigkeit wegen angeführt. Am Schlusse dieses Aufsatzes wird der erste Teil dieses Satzes ohne Benützung der Parabel bewiesen.

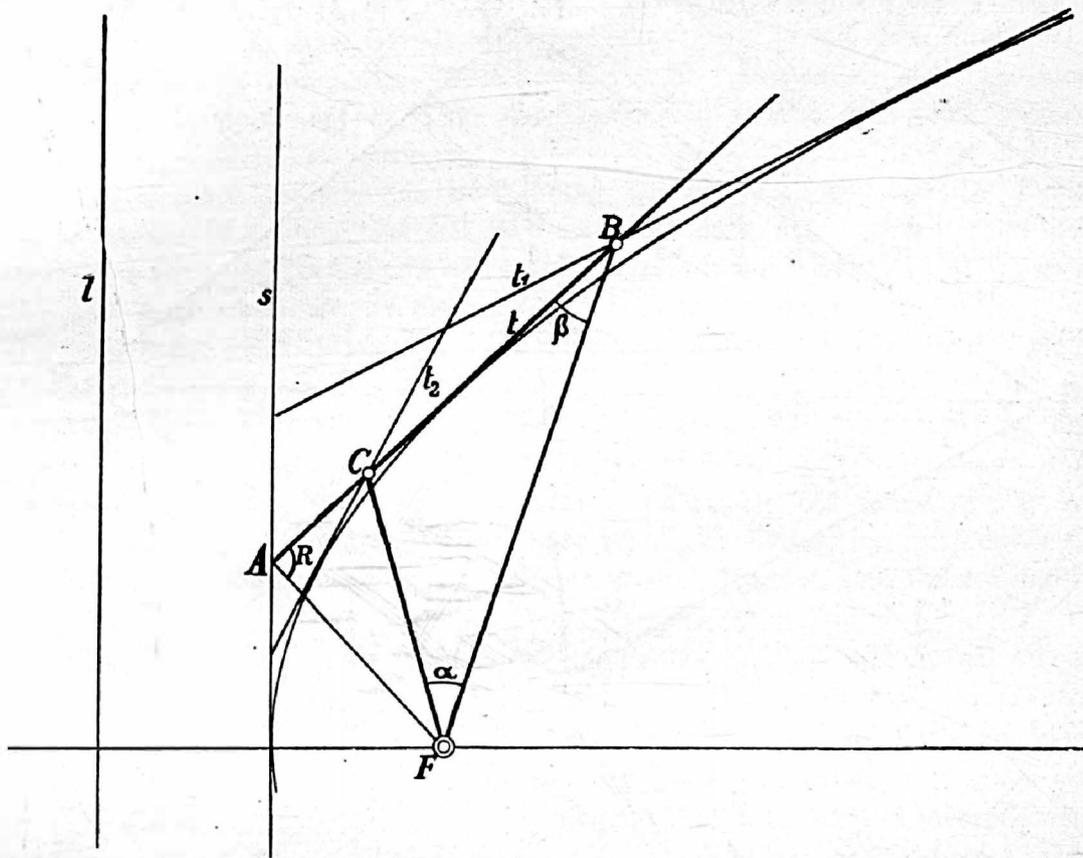


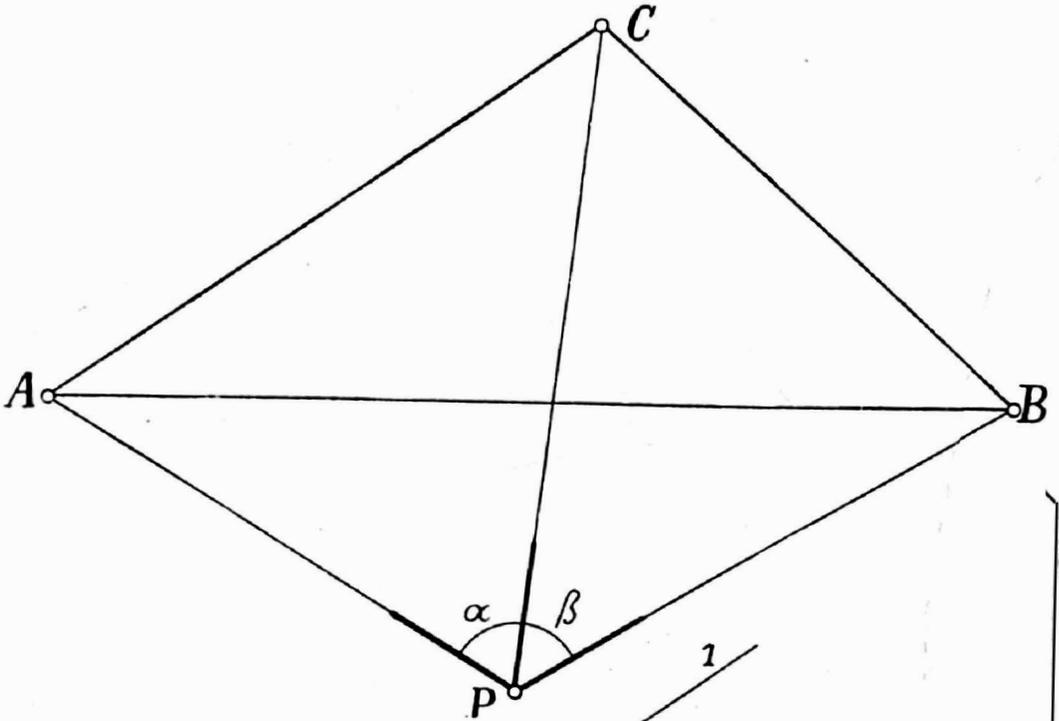
Fig. 1.

Dreieckes ABC : $\overline{O1} \parallel \overline{AC}$, $\overline{O2} \parallel \overline{AB}$ und $\overline{O3} \parallel \overline{CB}$ (Fig. 2b). Nehmen wir auf $\overline{O1}$ einen beliebigen Punkt Q an und ziehen durch denselben $\overline{QR} \parallel \overline{AP}$ bis zum Schnitte R mit $\overline{O2}$ und $\overline{QS} \parallel \overline{CP}$ bis zum Schnitte S mit $\overline{O3}$, so ist auch $\overline{RS} \parallel \overline{BP}$.

Die Figuren 2a und 2b sind reziprok. Jeder Geraden der Figur 2a entspricht eine hierzu parallele Gerade von 2b und umgekehrt. Je drei Geraden in der Fig. 2a, die durch einen Punkt gehen, entspricht ein Dreieck in der Fig. 2b und jedem Dreieck von 2a entsprechen drei durch einen Punkt gehende Geraden von 2b. Den drei Strahlen, die durch den Punkt P in Fig. 2a gehen und die Winkel α und β bilden, entspricht das Dreieck QRS in Fig. 2b mit den Winkeln α und β . Unsere Aufgabe ist transformiert in die Aufgabe: ein Dreieck QRS , dessen Winkel gegeben sind, ist in der Ebene so zu orientieren, daß die drei Eckpunkte, Q , R und S auf drei gegebene, durch einen Punkt hindurchgehende Strahlen $\overline{O1}$, $\overline{O2}$ und $\overline{O3}$ fallen.

Man denke sich ein Hilfsdreieck $Q'R'S'$ von beliebiger Größe gezeichnet, dessen Winkel $R'Q'S' = \alpha$ und $Q'S'R' = \beta$ sind. Nimmt man in Fig. 2b auf $\overline{O1}$ einen Punkt Q , auf $\overline{O2}$ einen Punkt R_x beliebig an, zieht die Verbindungsgerade $\overline{QR_x}$ und trägt an dieselbe in Q den Winkel α , in R_x den Winkel $Q'R'S' = 180 - (\alpha + \beta)$ ab, so gelangt man zum Schnittpunkt S_x und $QR_x S_x$ ist unserem gedachten Hilfsdreieck ähnlich. Läßt man nun den Punkt R_x den Strahl $\overline{O2}$ durchlaufen, hält Q auf $\overline{O1}$ fest und trägt an jede Lage von QR_x in

a,



b,

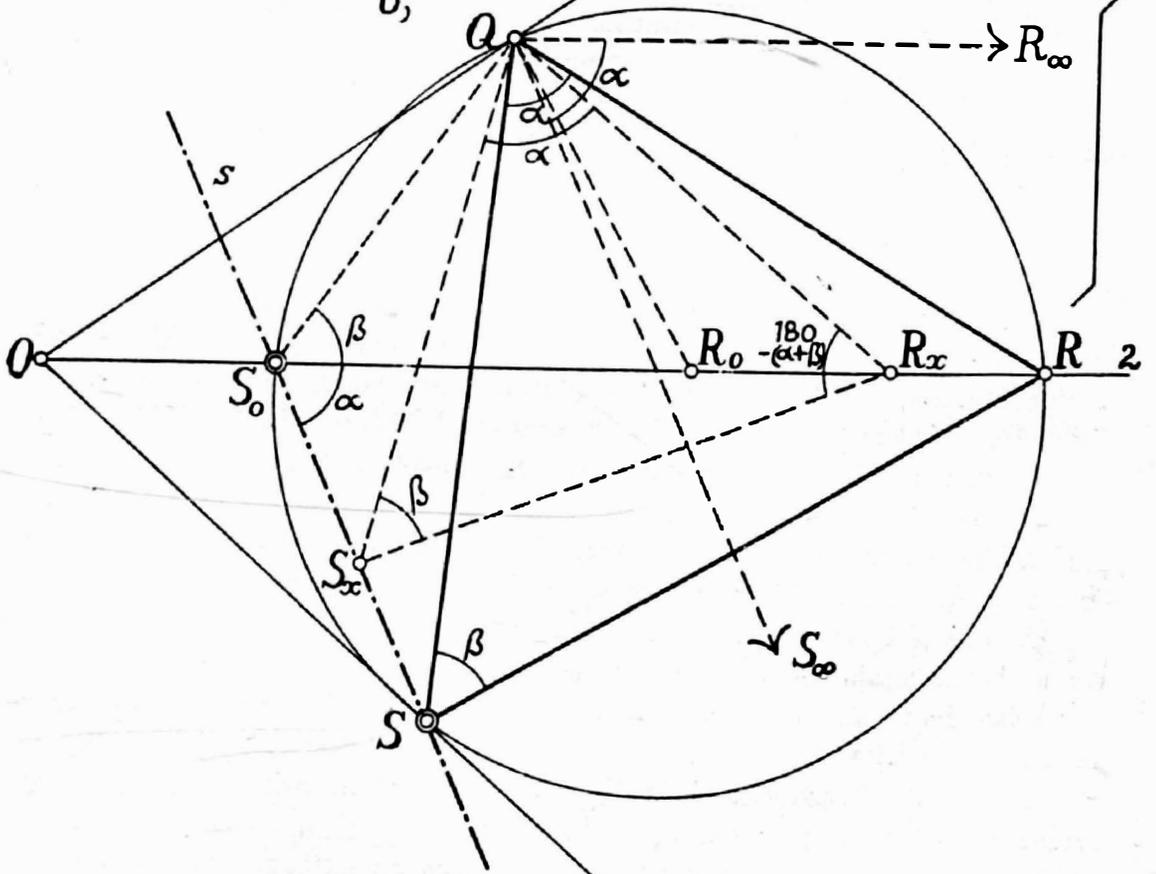


Fig. 2.

Q den Winkel α , in R_x den Winkel $Q'R'S'$ ab, so beschreibt nach obigem Satze der Punkt S_x eine Gerade s , deren Schnittpunkt S mit dem Strahle $\overline{O3}$ ein Eckpunkt des orientierten Dreieckes QRS ist. Es handelt sich also bloß darum, die Richtung und die Lage der Geraden s , welche den geometrischen Ort von S_x darstellt, zu bestimmen.

Hiezu führt uns folgende Betrachtung der Fig. 2b. Gelangt der Punkt R_x bei seiner Wanderung auf $\overline{O2}$ ins Unendliche nach R_∞ , so fällt auch der zugehörige Punkt S_x ins Unendliche nach S_∞ , wobei der Winkel $R_\infty Q S_\infty = \alpha$ ist. Das heißt aber: die Gerade s bildet mit dem Strahle $\overline{O2}$ den Winkel α . Wir kennen nun die Richtung von s , brauchen also bloß einen Punkt zu bestimmen. Als solchen wählen wir den Schnittpunkt S_0 von s mit $\overline{O2}$, der sich wieder sofort aus folgender Betrachtung der Figur 2b ergibt. Fällt der Punkt S_x bei seiner Wanderung auf s nach S_0 (auf $\overline{O2}$) und heißt die zugehörige Lage von R_x R_0 , so fällt die Dreieckseite $R_0 S_0$ mit dem Strahle $\overline{O2}$ zusammen; es ist mithin der Winkel $Q S_0 2 = \beta$. Das heißt: um S_0 zu finden, hat man durch Q eine Gerade zu ziehen, welche mit $\overline{O2}$ den Winkel β bildet, und ihren Schnittpunkt mit $\overline{O2}$ zu bestimmen.

Aus Fig. 2b ist zu entnehmen, daß die Punkte Q, R, S und S_0 auf einem Kreis liegen, da \overline{QR} von S und S_0 unter dem Winkel β und \overline{RS} von Q und von S_0 unter dem Winkel α erscheint. Es ist übrigens derselbe Kreis, auf dem die Eckpunkte R, S, S_0 des Tangentendreieckes und der Brennpunkt Q der (in der Figur 2b nicht gezeichneten) Parabel liegen. Dies wird nur des theoretischen Interesses und der Vollständigkeit wegen erwähnt. Wir verwenden diesen Kreis weiter nicht.

Verschiebt man die Figur 2b parallel zu sich selbst, so daß der Punkt O von 2b mit dem Punkte A von 2a zusammenfällt und wählt überdies $Q = C$, so kommen einige der einander entsprechenden Geraden der beiden reziproken Figuren 2a und 2b zur Deckung und es ergibt sich nach dem vorstehenden folgende endgültige Konstruktion.

(Schluß folgt)

Neugestaltung des österreich. Vermessungswesens.

Angeregt durch die Denkschrift der «Ständigen Delegation des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Tages» und eine Studie seiner Exzellenz, des Feldzeugmeisters Otto Frank, (veröffentlicht im Hefte Nr. 10 — 1916 dieser Zeitschrift), hat die Leitung des Zweigvereines Steiermark der k. k. österreichischen Vermessungsbeamten in einem Rundschreiben seine Mitglieder aufgefordert, ihre Ansichten und Vorschläge für eine Neugestaltung des Vermessungswesens mitzuteilen und zu den oben genannten Kundgebungen Stellung zu nehmen.

Aus den eingelangten Zuschriften ist folgendes zu entnehmen: Mit großer Begeisterung haben die Staatsgeometer den Ruf nach einer Neugestaltung des Vermessungswesens vernommen. Die k. k. Evidenzhaltung des Grundsteuerkatasters in ihrer heutigen Form ist sowohl was Organisation, Geschäftsführung und auch Umfang ihres Wirkungskreises betrifft, keine zeitgemäße, vollwertige und

die zu 22 gehörigen Normalgleichungen, die zu den in 13a enthaltenen Werten von a und b führen.

Es hat den Anschein, als ob dem Ivory'schen Gedankengang vielleicht doch mehr Inhalt zukommt, als die Kritik ihm zugesteht.

6.

Der Beziehung

$$\Sigma \Delta = 0$$

die hier nur als Rechenkontrolle für gewisse Fälle gewertet wird, wurde früher eine weit größere Bedeutung zugeschrieben. Laplace*) hat vor Einführung der Methode der kleinsten Quadrate gelegentlich einer bestimmten Aufgabe ein Rechenprinzip aufgestellt (ohne Begründung), das auf den beiden Forderungen beruhte, daß einerseits die Summe der Fehler gleich Null und andererseits die Summe der Absolutwerte der Fehler ein Minimum sei. Er ist in seinem speziellen Falle zu einem Ergebnis gelangt und hat dieses als das „wahrscheinlichste“ bezeichnet. Estienne**) ist bei Aufstellung seiner Regel zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes einer direkt beobachteten Größe auf dieses Prinzip, das er die Methode der kleinsten arithmetischen Summe nennt, zurückgekommen. Ferner hat Lamont***) den Umstand, daß $\Sigma \Delta$ nicht notwendig gleich Null wird, als einen Mangel der Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet.

Tatsache ist, daß die Bedingung $\Sigma \Delta = 0$ als Prinzip einer Ausgleichungsmethode nicht hinreicht, und überdies gibt die Methode der kleinsten Quadrate in jedem Falle die größten Gewichte.

Über eine Lösung des Rückwärtseinschneidens.

Von Dr. techn. Erich Liebitzky, k. k. Bauadjunkt in Prag.

(Fortsetzung und Schluß.)

Sind in Figur 3 A, B, C die drei gegebenen Punkte und zieht man durch A eine Parallele $\overline{A3}$ zu \overline{CB} und durch C eine Parallele $\overline{C2'}$ zu \overline{BA} , so hat man, um den Punkt S der «mittleren Visur» zu erhalten, einfach durch C einen Strahl unter dem Winkel β gegen $\overline{C2'}$ und durch dessen Schnittpunkt S_0 mit \overline{AB} einen zweiten Strahl unter dem Winkel α gegen \overline{AB} zu ziehen, welcher im Schnitte S mit $\overline{A3}$ den gesuchten Punkt der «mittleren Visur» CS ergibt. Zieht man durch A bzw. B je einen Strahl unter dem Winkel α bzw. β gegen die mittlere Visur, so müssen sich beide auf \overline{CS} in dem Punkte P schneiden, der zu bestimmen war.

Die eben entwickelte Konstruktion hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der bekannten Methode von Collins. Nach dieser ergibt sich der «Collins'sche Hilfspunkt» Z als Schnitt zweier Strahlen, welche durch A und B unter dem Winkel β bzw. α gegen \overline{AB} gezogen werden. An die Stelle des «Collins'schen Hilfspunktes»

*) Mécanique céleste, II, art. 39—42.

**) Étude sur les erreurs d'observ., p. 9 und 23 ff (C. R. CX, p. 512).

***) Meteorolog. Wochenbericht Nr. 203—210, 1869

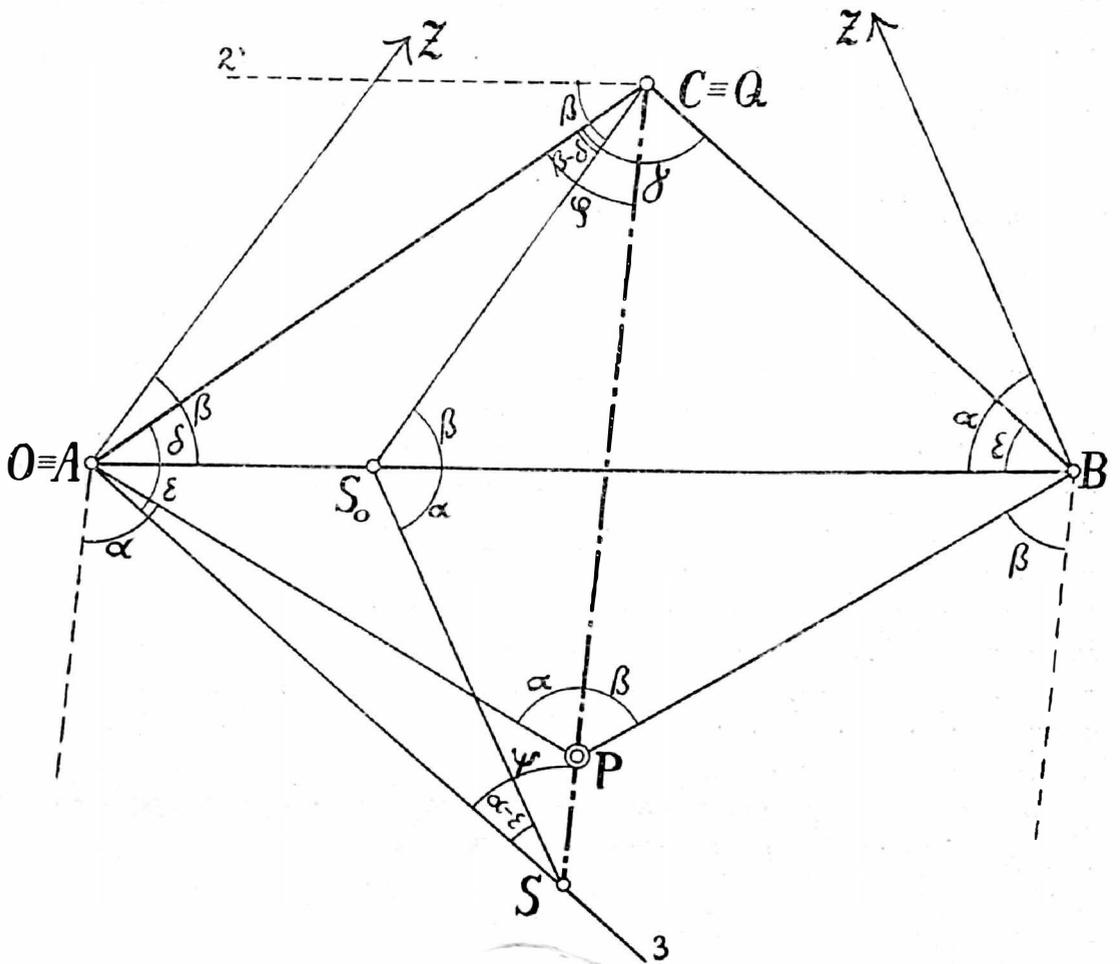


Fig. 3.

tritt unser Hilfspunkt S und die Mehrarbeit, die unsere Konstruktion gegenüber dem Verfahren von Collins erfordert, besteht im Zeichnen der zwei Strahlen $\overline{A3} \parallel \overline{BC}$ und $\overline{C2'} \parallel \overline{AB}$. Das Collins'sche Verfahren ist also einfacher als das unsere, weshalb man im allgemeinen bei demselben bleiben wird. Häufig aber versagt die Collins'sche Methode bei ihrer Anwendung auf dem Meßtisch, indem der Collins'sche Hilfspunkt Z außerhalb der Zeichnung fällt, wie in unserer Fig. 3 angedeutet; und in diesem Falle wird man vielleicht unsere Methode mit Vorteil verwenden können.

Unsere Konstruktion wird unbrauchbar, wenn der Hilfspunkt S außerhalb der Zeichnung fällt oder wenn der Winkel ASS_0 zu spitz und dadurch die Bestimmung von S zu unscharf wird. Letzteres wird dann eintreten, wenn der Punkt P in der Nähe des «gefährlichen Kreises» liegt. Fällt P auf den «gefährlichen», d. h. den durch die Punkte A , B und C hindurchgehenden Kreis, so wird die Konstruktion natürlich unbestimmt, indem bei $\beta = \delta$ und $\alpha = \varepsilon$ der Punkt S_0 mit A und die Gerade $\overline{S_0S}$ mit $\overline{A3}$ zusammenfällt. (δ ist der Winkel BAC und ε der Winkel ABC in Figur 3).

Bei der Anwendung der beschriebenen Konstruktion auf dem Meßtisch wäre eine zweimalige Zentrierung, nämlich von C und S_0 über P notwendig. Man wird sich daher in der Praxis mit einer genäherten Lösung begnügen, bei welcher

auch das Zeichnen der Geraden $C2'$ entfällt. Werden die den Feldpunkten A, B, C und P entsprechenden Punkte auf dem Meßtischblatt mit a, b, c und p bezeichnet, so ergibt sich folgendes Näherungsverfahren:

Zentrierung von c über P ¹⁾. Die Kippregel an \overline{ab} angeschoben und \overline{ab} nach \overline{PB} orientiert, so daß der Punkt a gegen B zu liegen kommt. Kippregel an c anlegen, den Punkt C anzielen, rayonnieren und \overline{ab} in S_0 schneiden. Dadurch, daß die Gerade \overline{ab} statt $\overline{C2'}$ zur Orientierung benützt wird, entsteht eine Parallaxe, die aber infolge der Kleinheit der Zeichnung gegenüber der Natur nur gering ist und daher vernachlässigt werden kann. Der weitere Vorgang besteht in der Orientierung von \overline{ab} nach \overline{PA} und zwar so, daß b gegen A liegt. Dann Kippregel an S_0 anlegen, zielen und rayonnieren nach C , schneiden von \overline{ab} in S . Dadurch, daß die Zentrierung von c über P beibehalten und eine neue Zentrierung von S_0 über P , wie es der genaue Vorgang erheischen würde, unterbleibt, entsteht natürlich wieder eine Parallaxe, welche wieder vernachlässigt wird. Wird nun die Kippregel an \overline{cS} angeschoben und \overline{cS} nach \overline{cC} orientiert, wobei c gegen C zu richten ist, so ist der Meßtisch in «orientierter Lage», das heißt, die einander entsprechenden Seiten in der Natur und auf der Zeichnung sind parallel. Zur Bestimmung des Punktes P hat man dann bloß die Kippregel in a bzw. b anzulegen, A bzw. B anzuziehen, zu rayonnieren und mit der mittleren Visur cS zu schneiden. Statt des Punktes P wird sich aber in der Regel ein Fehlerdreieck ergeben und man kann dann weiter nach Lehmann und Netto vorgehen.

Aus der Figur 3 ergibt sich folgende trigonometrische Lösung.

Aus dem Dreiecke ACS_0 folgt

$$AS_0 = AC \cdot \frac{\sin(\beta - \delta)}{\sin \beta}$$

und aus dem Dreiecke ASS_0 :

$$AS = AS_0 \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \epsilon)} = AC \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin(\beta - \delta)}{\sin \beta \cdot \sin(\alpha - \epsilon)}$$

Im Dreiecke ACS sind nun die zwei Seiten \overline{AC} und \overline{AS} und der von ihnen eingeschlossene Winkel $(\delta + \epsilon) = 180 - \gamma$ bekannt. Es ergeben sich daher die zwei Winkel φ und ψ nach dem Tangentensatze wie folgt:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \frac{\overline{AS} - \overline{AC}}{\overline{AS} + \overline{AC}}$$

Dividiert man in dem Bruche auf der rechten Seite Zähler und Nenner durch AS und berücksichtigt, daß $\varphi + \psi = \gamma$, so ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{1 - \frac{AC}{AS}}{1 + \frac{AC}{AS}} \dots \dots \dots 1)$$

Wird

$$\frac{AC}{AS} = \frac{\sin \beta \cdot \sin(\alpha - \epsilon)}{\sin \alpha \cdot \sin(\beta - \delta)} = \operatorname{tg} \mu$$

¹⁾ Da es sich nur um eine Näherungsmethode handelt, genügt wohl auch nur eine näherungsweise Zentrierung.

gesetzt, wo μ ein Hilfswinkel ist, so geht 1) in

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \mu}{1 + \operatorname{tg} \mu} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{cotg} (\mu + 45^\circ) \dots 2)$$

über. Da $\frac{\varphi + \psi}{2}$ bekannt ist, so ist die Aufgabe hiemit im wesentlichen gelöst.

Die Berechnung der Entfernungen \overline{AP} , \overline{CP} und \overline{BP} kann nach dem Sinussatz erfolgen.

Man sieht, daß dieser Rechnungsvorgang seinem Wesen nach der bekannten Burckhardt'schen Lösung verwandt ist. In der Praxis sind die drei Punkte A , B und C in der Regel durch ihre Koordinaten gegeben und da ist, wie man sich durch Vergleich der beiden Methoden leicht überzeugen kann, die Berechnung unseres Hilfswinkels etwas umständlicher als des Burckhardt'schen. Es ist also kein Grund vorhanden von der Verwendung der Burckhardt'schen Methode in der Praxis abzugehen. Die hier entwickelte trigonometrische Lösung ist nur von theoretischem Interesse, insoferne, als die zu berechnenden Winkel φ und ψ Winkel eines Dreieckes sind und sich als solche nach dem Tangentensatze berechnen lassen, während die Bestimmung der entsprechenden Winkel bei Burckhardt nur auf analytischem Wege möglich ist.

Zur Ableitung des geometrischen Satzes, auf welchen sich die im vorstehenden Aufsätze behandelte Konstruktion stützt, wurde eine Tangenteneigenschaft der Parabel benützt. Da die Parabel selbst nicht weiter verwendet wird, dürfte die folgende Ableitung, die sich unmittelbar aus der Figur 2b ergibt, zweckmäßiger sein.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke (QRS) , $(QR_x S_x)$ und $(QR_o S_o)$ folgt die Proportion $QR : QR_x : QR_o = QS : QS_x : QS_o$. Da die Strahlen von Q nach den Punkten R , R_x und R_o miteinander dieselben Winkel einschließen wie die Strahlen von Q nach den entsprechenden Punkten S , S_x und S_o und da die Punkte R , R_x und R_o auf einer Geraden liegen, so müssen nach einem elementaren Satze der Planimetrie auch die Punkte S , S_x und S_o auf einer Geraden liegen. Da ferner je zwei entsprechende Strahlen mit einander immer den Winkel α bilden, so folgt überdies, daß auch die Gerade s mit dem Strahle $\overline{O2}$ den Winkel α einschließt.

Daß sich an der Hand der Figur 2b auch interessante projektive Betrachtungen anstellen lassen, sei noch erwähnt, ohne daß hierauf näher eingegangen werden soll.

Ueber die böhmische Elle.

Von Baurat Ing. S. Wellisch.

Unter der Regierung der Kaiserin Maria Theresia wurde mit dem Patente vom 14. Juli 1756 eine Untersuchung der nieder-österreichischen Maße zum Zwecke der Feststellung neuer Urmaße angeordnet und mit dem Patente vom 30. Juli 1764 das damit festgesetzte Wienermaß eingeführt. Hiebei wurden folgende Umrechnungsverhältnisse gesetzlich vorgeschrieben: