Paper-ID: VGI_191618

Eine direkte Ermittlung des Trägheitsmomentes einer ebenen Figur mittels des Polarplanimeters

Walter Tschuppik [1]

[1] *Prag-Smichow*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **14** (12), S. 177–179

1916

BibTeX:

```
@ARTICLE{Tschuppik_VGI_191618,
Title = {Eine direkte Ermittlung des Tr{\"a}gheitsmomentes einer ebenen Figur
    mittels des Polarplanimeters},
Author = {Tschuppik, Walter},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {177--179},
Number = {12},
Year = {1916},
Volume = {14}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Baurat S. Wellisch.

Nr. 12. **Wien, 1. Dezember 1916.** **XIV. Jahrgang.**

Eine direkte Ermittlung des Trägheitsmomentes einer ebenen Figur mittels des Polarplanimeters.

Von **Dr. techn. Walter Tschuppik** in Prag-Smichow.

Das größte Anwendungsgebiet des Polarplanimeters liegt in der Vermessungstechnik. Gleichwohl ist der Gebrauch des Instrumentes über seinen ihm ursprünglich zugedachten Wirkungskreis hinausgewachsen und es findet verbreitete Anwendung in allen anderen Gebieten des Ingenieurwesens, vor allem im Maschinenbau als Dynamometer, im Erd- und Straßenbau zur Bestimmung der Masse, im Schiffbau und in der angewandten Statik. Eine besondere Anwendung erfährt es bei der harmonischen Analyse[1]). Das Polarplanimeter behält in allen diesen Fällen seinen alten Sinn und seinen Gebrauch zur Evakuation von beliebig begrenzten Figuren. In gewissen Fällen (wie auch vorliegend) liegt jedoch die Heranziehung des Instrumentes in einer besonderen Führung längs und durch die Figur, und es wird daher auch an dieser Stelle bei der Bedeutung und Universalität des Polarplanimeters im Vermessungswesen nicht uninteressant sein, ein Verfahren, mit seiner Hilfe das Trägheitsmoment einer ebenen Figur zu ermitteln, kennen zu lernen. Der hiebei eingeschlagene Weg weicht von den Methoden[2]) ab, Momente ebener Figuren mittels des Polarplanimeters zu erhalten, wo dieses zum Schlusse zur Flächenauswertung einer durch mehr oder minder langwierige graphische Konstruktionen resultierten Figur herangezogen wird. Nur hinsichtlich der Ermittlung des Schwerpunktes existiert ein Verfahren[3]), das dem folgenden, jedoch zur Ermittlung des Trägheitsmomentes einer ebenen Figur dienenden, einigermaßen verwandt ist, wobei hier zunächst mehr ein theoretisches als praktisches Interesse vorherrscht.

---

[1]) Finsterwalder: »Harmonische Analyse mittels des Polarplanimeters« in der »Zeitschrift für Mathematik und Physik« 1898.

[2]) Vojáček: »Das Auffinden von zu Festigkeitsberechnungen nötigen Angaben mittels des Planimeters« in der »Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure« 1869 und E. Mises: »Ermittlung von Momenten ebener Figuren« in der »Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines« 1873.

[3]) Tiralopolski: »Bestimmung des Schwerpunktes einer krummlinig begrenzten Fläche mit Hilfe des Polarplanimeters von Amsler« in der »Zeitschrift für Mathematik und Physik« 1903.

Unterteilen wir die Fläche F, um deren Trägheitsmoment bezüglich einer Achse X es sich handelt, in n Streifen f gleicher Höhe $\triangle$, parallel dieser Achse X, mit bezüglichen Schwerpunktsabständen y von dieser, dann ist das Trägheitsmoment t einer Partialfläche $f = \triangle \,.\, b$ nach der Steiner'schen Beziehung gegeben mit

$$t = \frac{b \,.\, \triangle^3}{12} + b \,.\, \triangle \,.\, y^2,$$

und daher das Trägheitsmoment T der ganzen Fläche

$$T = \sum_1^n \left(\frac{b \,.\, \triangle^3}{12} + b \,.\, \triangle \,.\, y^2\right) = \sum_1^n \frac{b \,.\, \triangle^3}{12} + \sum_1^n b \,.\, \triangle \,.\, y^2;$$

für $\triangle =$ konst. läßt sich schreiben:

$$T = \frac{\triangle^2}{12} \sum_1^n b \,.\, \triangle + \sum_1^n b \,.\, \triangle \,.\, y^2 = \frac{F \,.\, \triangle^2}{12} + \sum_1^n b \,.\, \triangle \,.\, y^2.$$

Der zweite Summenausdruck geht über in:

$$\sum_1^n b \,.\, \triangle \,.\, y^2 = b_1 \,.\, \triangle \,.\, y_1^2 + b_2 \,.\, \triangle \,.\, y_2^2 + \ldots\ldots + b_n \,.\, \triangle \,.\, y_n^2$$

$$= b_1 \,.\, \triangle \,.\, y_1^2 + b_2 \,.\, \triangle\,(y_1 + \triangle)^2 + b_3 \,.\, \triangle \,.\, (y_1 + 2\,\triangle)^2 + \ldots + b_n \,.\, \triangle\,[y_1 + (n-1)\,\triangle\,]^2.$$

$$= y_1^2 \sum_1^n \triangle\, b + 2 \,.\, \triangle\, y_1 \Big[1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-1)\Big] \,.\, \sum_2^n \triangle \,.\, b + \triangle^2 \Big[\triangle\, b_2 + 2.^2 \triangle\, b_3 + 3.^2 \triangle\, b_4 + 4.^2 \triangle . b_5 + \ldots + (n-1).^2 \triangle\, b_n\Big]$$

$$= F . y_1^2 + (F - f_1) \,.\, 2 \triangle \,.\, y_1 \,.\, \left(\frac{n^2 - n}{2}\right) + \triangle^2 \Big[f_2 + 4 f_3 + 9 f_4 + 16 f_5 + 25 f_6 + \ldots + (n-1)^2 f_n\Big]$$

Der Gesamtausdruck für das Trägheitsmoment wird daher lauten:

$$T = \frac{F . \triangle^2}{12} + F . y_1^2 + (F - f_1) \,.\, 2 \,.\, \triangle \,.\, y_1 \,.\, \left(\frac{n^2 - n}{2}\right) + \triangle^2 \Big[f_2 + 4 f_3 + 9 f_4 + 16 f_5 + 25 f_6 + \ldots (n-1)^2 f_n\Big]$$

Wir wenden diesen Ausdruck nun zunächst auf eine durch den Schwerpunkt des Partialstreifens f_1 zur X parallele Achse X' im Abstande η von dieser an; für diese Achse wird sodann $y_1 = o$ und daher geht der Ausdruck für $T = T'$ in die einfache Form über:

$$T' = \frac{\triangle^2}{12} \,.\, F + \triangle^2 \Big[f_2 + 2^2 f_3 + 3^2 f_4 + 4^2 f_5 + 5^2 f_6 + \ldots + (n-1)^2 f_n\Big]$$

Setzen wir $\triangle =$ konst. $= 1$, dann ist

$$T' = \frac{F}{12} + f_2 + 4 f_3 + 9 f_4 + 16 f_5 + 25 f_6 + \ldots + (n-1)^2 f_n,$$

ein Ausdruck, der sämtlich Größen enthält, die mit dem Planimeter zu ermitteln sind. Hiebei kann (ähnlich wie bei Tiralopolski) der Ausdruck

$$f_2 + 4 f_3 + 9 f_4 + \ldots + (n-1)^2 f_n$$

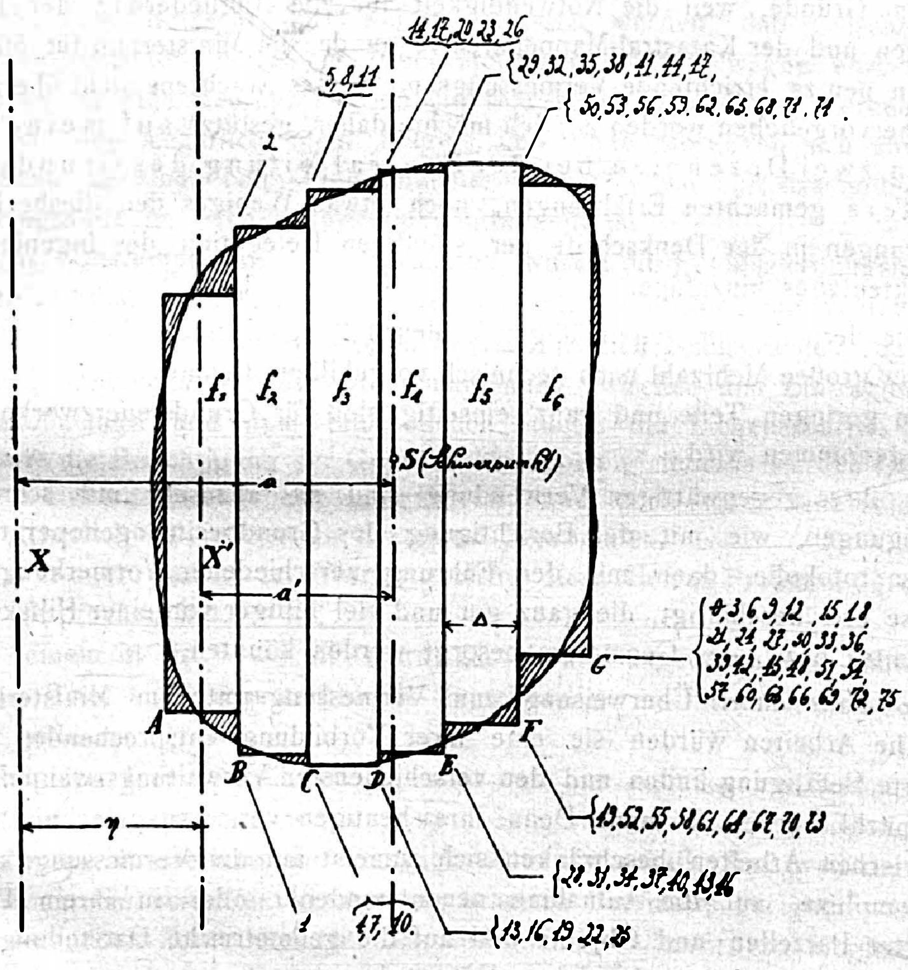
in einer ununterbrochenen Umfahrung gewonnen werden, zu welchem Resultate die durch 12 geteilte Ablesung für die Umfahrung der Gesamtfläche F hinzugenommen werden muß.

Ist der Schwerpunkt der Fläche F bekannt, dessen Abstand von der X-Achse a und von der X'-Achse a' sein möge, so ergibt sich damit

$$T = T' + F(a^2 - a'^2) = T' + F(a + a') \cdot \eta.$$

Einfaches schematisches Beispiel. (Mit Figur).

Die Fläche F wäre in sechs Streifen von $\triangle = 1$ Zentimeter parallel der X-Achse geteilt worden. Wir beginnen mit der Umfahrung im Punkte 0 und folgen den fortlaufenden Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 . . . . Daher wird der Punkt A nicht berührt, B wird einmal durchlaufen (man beachte die Formel $f_2 + 4 f_3 + 9 f_4 + \ldots$),



der Punkt C . . . $(4-1)$ = dreimal, analog D . . . $(9-4)$ = fünfmal, der Punkt E . . . $(16-9)$ = siebenmal und so fort. Die Koëffizienten der Partialflächen f sind die Quadrate der natürlichen ganzen Zahlen, bilden demnach die höhere arithmetische Reihe mit der Differenzenreihe der ungeraden ganzen Zahlen und der Differenz 2. Das Gesetz, nach dem die Fläche F, beziehungsweise die Partialflächen umfahren werden müssen, ist also recht einfach.