Paper-ID: VGI_191606

Legendre’s Theorem

Johannes Frischauf [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **14** (5, 6), S. 65–71, 86–90

1916

BibTeX:

```
@ARTICLE{Frischauf_VGI_191606,
Title = {Legendre’s Theorem},
Author = {Frischauf, Johannes},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {65--71, 86--90},
Number = {5, 6},
Year = {1916},
Volume = {14}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Baurat S. Wellisch.

Nr. 5. **Wien, 1. Mai 1916.** XIV. Jahrgang.

Legendre's Theorem.*)

Von **Johannes Frischauf** in Graz.

1. Der in der sphärischen Trigonometrie unter dem obigen Titel bekannte Satz lautet: Sind die Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks klein (der ersten Ordnung), A, B, C dessen Winkel, A', B', C' die Winkel eines ebenen Dreiecks mit denselben Seiten a, b, c, so ist (mit Fehlern vierter Ordnung)

$$A' = A - \tfrac{1}{3} E, \quad B' = B - \tfrac{1}{3} E, \quad C' = C - \tfrac{1}{3} E,$$

wo E den sphärischen Exzeß bedeutet.

Zur Geschichte der Beweise des (einfachen und erweiterten) Legendreschen Satzes möge folgendes mitgeteilt werden.

Der Satz wurde ohne Beweis zuerst von Legendre in Histoire de l'Academie royale des sciences, Paris 1787 in seinem »Mémoire sur les Opérations trigonometriques, dont les résultats dependent de la figure de la Terre«. (VI., S. 358—359) unter: »Théorème concernant les triangles sphériques, dont les côtés sont très petits par rapport au rayon de la sphère.« mitgeteilt.

Den ersten Beweis hat Legendre im Jahre 1798**) in dem Aufsatze »Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère« (Delambre's »Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien«, Paris VII, Note III, S. 12) geliefert.***) Von Legendre wurde der Satz erweitert in: »Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroide«. Mémoires de l'Institut national. T. VII, 1806. Der für den Winkelunterschied $A - A'$ mitgeilte Ausdruck ist in den Gliedern mit e^2 und vierter Ordnung unrichtig. Für das sphärische Dreieck lautet dieser bei Legendre:

$$A - A' = \tfrac{1}{6}\, b\, c \sin A + \tfrac{1}{72}\, b^2 c^2 \sin A \cos A.$$

*) Veranlassung zum vorliegenden Aufsatze boten mehrere in den letzten Jahren erschienene Beweise dieses Theorems, die verwickelter als die älteren sind, dabei als »einfacher«, ja sogar »die bisher bekannten an Einfachheit übertreffend« erklärt wurden. Dem einfachsten Beweise (dessen Ausgang auf die einfachste Art die Erweiterung gestattet) kann aber ein Alter von mehr als 60 Jahren nachgewiesen werden.

**) Le 9 nivose an VII, d. i. am 30. Dezember 1798.

***) Der Verfasser verdankt diese Angabe Herrn Baurat S. Wellisch.

Die Glieder vierter Ordnung wurden zuerst von K. H. J. Buzengeiger »Vergleichung zweier sehr kleinen Dreiecke von gleichen Seiten, von denen das eine sphärisch, das andere eben ist« (Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften von B. v. Lindenau und J. G. Bohnenberger, 6. Bd., 1818) richtig aufgestellt.*)

Die älteren Beweise gehen fast ausschließlich von der Formel aus

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

aber alle diese Beweise sind deshalb umständlich, daß im Ausdrucke für $\cos A : \cos A'$ die Glieder zweiter, vierter, . . Ordnung als Quotienten vierter : zweiter, sechster : zweiter, . . Ordnung erscheinen, wobei selbst die Beweise des einfachen Satzes sogenannte »Kunstgriffe« erfordern.

A. Winkler stellt (Crelle's Journal, Band 44, 1852 »Kurze Ableitung des Legendre'schen Satzes«) das Verhältnis $\tan \frac{1}{2} A : \tan \frac{1}{2} A'$ auf, wobei die Glieder zweiter Ordnung unmittelbar erhalten werden. Der Legendre'sche Satz kann dann leicht bewiesen werden.

2. Derselbe Ausgang liefert auch in einfachster Art den auf Glieder vierter Ordnung nach a, b, c (oder zweiter nach E) erweiterten Satz.

Setzt man

$$a + b + c = 2s,$$

der Kugelhalbmesser als Längeneinheit gewählt, so ist

$$\tan \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-a)}}$$

$$\tan \tfrac{1}{2} A' = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\varkappa = \frac{\tan \frac{1}{2} A}{\tan \frac{1}{2} A'} = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{(s-b)(s-c)} : \frac{\sin s \sin (s-a)}{s(s-a)}}.$$

Sollen in $A - A'$, . . . die Glieder vierter Ordnung berücksichtigt werden, so müssen für $\sin s$, $\sin (s-a)$ . . die Glieder fünfter Ordnung mitgenommen werden.

Zur Vereinfachung der Entwicklung möge bemerkt werden: Ist

$$\tan y = \alpha \tan x, \ \alpha \text{ nahe} = 1,$$

so ist

$$\tan (y-x) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{\sin 2x}{1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \cos 2x},$$

also mit Fehler β^3

$$y - x = \beta \sin 2x + \tfrac{1}{2} \beta^2 \sin 4x, \ \beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1};$$

---

*) Buzengeiger erklärt, daß man mit Weglassung der Glieder höherer Ordnung den »berühmten Legendre'schen Satz erhält, welcher hier zum erstenmal so bewiesen ist, daß man seine wahre Beschaffenheit erkennen kann«. Daraus folgt, daß ihm der Beweisversuch Legendre's 1806 unbekannt geblieben ist.

ist
$$\alpha^2 = \frac{1+u+v}{1+x+y},$$
wo u und x von der ersten Ordnung, v und y von der zweiten Ordnung sind, so ist mit Fehlern dritter Ordnung
$$\alpha^2 = 1 + u - x + v - y - x(u-x)$$
$$\alpha = 1 + \tfrac{1}{2}(u-x) + \tfrac{1}{2}(v-y) - \tfrac{1}{2}x(u-x) - \tfrac{1}{8}(u-x)^2$$
$$\beta = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = \tfrac{1}{4}\,\frac{u-x+v-y-x(u-x)-\tfrac{1}{4}(u-x)^2}{1+\tfrac{1}{4}(u-x)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\left[u-x+v-y-\tfrac{1}{2}(u+x)(u-x)\right].$$

Im vorliegenden Falle ist
$$u = -\tfrac{1}{6}\left[(s-b)^2+(s-c)^2\right],\quad x = -\tfrac{1}{6}\left[s^2+(s-a)^2\right]$$
$$v = \tfrac{1}{120}\left[(s-b)^4+(s-c)^4\right] + \tfrac{1}{36}(s-b)^2(s-c)^2$$
$$y = \tfrac{1}{120}\left[s^4+(s-a)^4\right] + \tfrac{1}{36}s^2(s-a)^2.$$
Damit erhält man
$$6(u-x) = 2s(b+c-a)+a^2-b^2-c^2 = 2bc$$
$$-6(u+x) = 4s^2-2s(a+b+c)+a^2+b^2+c^2$$
$$= a^2+b^2+c^2;$$
für die Teile von $v-y$ mit dem Nenner 120 ist
$$\left[(s-b)^2+s^2\right]\left[(s-b)^2-s^2\right] + \left[(s-c)^2+(s-a)^2\right]\left[(s-c)^2-(s-a)^2\right]$$
$$= -\left[2s^2-b(a+c)\right]b(a+c) - \left[2s^2-2ac-b(a+c)\right]b(c-a)$$
$$= -bc(3a^2+b^2+c^2),$$
für die Teile von $v-y$ mit dem Nenner 36 ist
$$\left[(s-b)(s-c)+s(s-a)\right]\left[(s-b)(s-c)-s(s-a)\right]$$
$$= bc\left[bc-2s(s-a)\right] = -\tfrac{1}{2}bc(-a^2+b^2+c^2).$$
Es ist daher
$$\beta = \tfrac{1}{12}bc\left[1+\tfrac{1}{60}(3a^2+b^2+c^2)\right]$$
$$A - A' = \tfrac{1}{6}bc\sin A'\left[1+\tfrac{1}{120}(a^2+7b^2+7c^2)\right],$$
und analog für $B-B'$ und $C-C'$. Damit wird
$$E = \tfrac{1}{2}bc\sin A'\left[1+\tfrac{1}{24}(a^2+b^2+c^2)\right].$$
Daraus erhält man
$$\tfrac{1}{2}bc\sin A' = E\left[1-\tfrac{1}{24}(a^2+b^2+c^2)\right],$$
damit wird
$$A - A' = \tfrac{1}{3}E\left[1+\tfrac{1}{60}(b^2+c^2-2a^2)\right].$$

3. Um in diesen Formeln den Winkel A' durch den sphärischen Winkel A auszudrücken, genügt es bei der vorgesetzten Genauigkeit in $\sin A'$
$$A' = A - \tfrac{1}{6}bc\sin A$$
zu setzen; damit erhält man
$$E = \tfrac{1}{2}bc\sin A\left[1+\tfrac{1}{24}(3a^2-b^2-c^2)\right]$$
$$A - A' = \tfrac{1}{6}bc\sin A\left[1+\tfrac{1}{120}(11a^2-3b^2-3c^2)\right].$$

Für die Berechnung der Glieder vierter Ordnung genügt es, in der Gleichung

$$a : b : c = \sin A' : \sin B' : \sin C',$$

$$A' = A,\ B' = B,\ C' = C,\ A + B + C = 180^0$$

zu setzen. Für diese Glieder ist daher gestattet

$$E = \tfrac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A}, \qquad a^2 = 2E \frac{\sin A}{\sin B \sin C},$$

$$\frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \frac{\sin (B + C)}{\sin B \sin C} = \cot B + \cot C$$

zu setzen. Damit wird

$$b^2 + c^2 - 2a^2 = 2E\,(2 \cot A - \cot B - \cot C),$$

$$A' = A - \tfrac{1}{3} E - \tfrac{1}{90} E^2\,(2 \cot A - \cot B - \cot C).$$

Die Winkel und die Größe E sind in Teilen des Halbmessers vorausgesetzt. Ist E in Sekunden gegeben und sollen $A - A'$, $B - B'$, $C - C'$ in Sekunden erhalten werden, so ist dem Gliede mit E^2 der Faktor $\sin 1''$ beizufügen.

Ist f die Fläche des sphärischen Dreiecks, so ist

$$E = \frac{f}{R^2}.$$

4. Für die Berechnung von E — einer kleinen Größe zweiter Ordnung — genügen Näherungswerte der gegebenen Stücke des sphärischen Dreiecks.

Sind a, B, C gegeben, so ist genau

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$= -\cos (B + C) - 2 \sin B \sin C \sin \tfrac{1}{2} a^2;$$

wird $A = 180^0 - (B + C - E)$ gesetzt, so folgt

$$\sin \tfrac{1}{2} E = \frac{\sin B \sin C}{\sin (B + C - \tfrac{1}{2} E)} \sin \tfrac{1}{2} a^2.$$

Aus dieser Gleichung kann [durch wiederholte Berechnung von $\sin (B + C - \tfrac{1}{2} E)$] E mit jeder beliebigen Genauigkeit erhalten werden, wenn E nicht groß ist. Man beginnt mit der ersten Näherung

$$E_0 = \tfrac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin (B + C)}.$$

Vernachlässigt man die Glieder mit E^3, so ist

$$E = E_0 [1 + \tfrac{1}{2} E_0 \cot (B + C) - \tfrac{1}{12} a^2];$$

setzt man

$$a^2 = 2 E_0 (\cot B + \cot C)$$

$$A = 180^0 - (B + C),$$

so wird

$$E = E_0 [1 - \tfrac{1}{6} E_0 (3 \cot A + \cot B + \cot C)].$$

$$B' = B - \tfrac{1}{3} E_0 + \tfrac{1}{90} E_0^2 (16 \cot A + 3 \cot B + 6 \cot C)$$

$$C' = C - \tfrac{1}{3} E_0 + \tfrac{1}{90} E_0^2 (16 \cot A + 6 \cot B + 3 \cot C).$$

Mit Fehler siebenter Ordnung nach a, b, c ist dann

$$b=\frac{a\sin B'}{\sin A'}, \qquad c=\frac{a\sin C'}{\sin A'}.$$

Für geodätische Rechnungen reicht in der Regel der einfache Legendre'sche Satz aus. In der vorliegenden Aufgabe wird dann

$$B'=B-\tfrac{1}{3}E_0,\ C'=C-\tfrac{1}{3}E_0.$$

Die Berücksichtigung der Glieder mit E^2 erfordert nach den obigen Formeln nur eine unbedeutende Rechnung, wenn dazu Peters »dreistellige Tafeln« benützt werden.

Sind A, B, C (durch Beobachtung bestimmt) und a gegeben, so ist $A+A+C-180^0$ der beobachtete Wert des Exzesses. Aus den beobachteten Winkeln und a erhält man durch Rechnung den Exzeß mit hohem Grade der Genauigkeit. Der Unterschied wird auf die drei Winkel gleichmäßig verteilt.

Den Legendre'schen Satz noch mehr zu erweitern, muß für geodätische Rechnungen als unpraktisch erklärt werden.

5. Im 22. Bande von Crelle's Journal hat Gauß eine Abhandlung unter dem Titel: »Elementare Ableitung eines zuerst von Legendre aufgestellten Lehrsatzes der sphärischen Trigonometrie« geliefert, die erläutert von Grunert im 1. Bande seines Archivs mitgeteilt ist.

Als Ausgang diente Gauß wahrscheinlich

$$\sin x = x\sqrt[3]{\cos x}, \text{ oder } x=\sin x : \sqrt[3]{\cos x},$$

mit Fehler vierter Ordnung ist daher

$$\frac{a}{b}=\frac{\tfrac{1}{2}a}{\tfrac{1}{2}b}=\frac{\sin\tfrac{1}{2}a : \sqrt[3]{\cos\tfrac{1}{2}a}}{\sin\tfrac{1}{2}b : \sqrt[3]{\cos\tfrac{1}{2}b}}.$$

Setzt man $A+B+C=2S$, so ist genau

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}a : \sqrt[3]{\cos\tfrac{1}{2}a}}{\sin\tfrac{1}{2}b : \sqrt[3]{\cos\tfrac{1}{2}b}}=\sqrt[3]{\frac{\sin A\cos(S-A)^2}{\sin B\cos(S-B)^2}},$$

$$S-A=90^0-(A-\tfrac{1}{2}E),\ \cos(S-A)=\sin(A-\tfrac{1}{2}E),$$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}a : \sqrt[3]{\cos\tfrac{1}{2}a}}{\sin\tfrac{1}{2}b : \sqrt[3]{\cos\tfrac{1}{2}b}}=\sqrt[3]{\frac{\sin A\sin(A-\tfrac{1}{2}E)^2}{\sin B\sin(B-\tfrac{1}{2}E)^2}},$$

also mit Fehler vierter Ordnung nach a, b (oder zweiter nach E)

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin(A-\tfrac{1}{3}E)}{\sin(B-\tfrac{1}{3}E)}.$$

Daraus folgt strenge: Sind a, b, c die Seiten, A, B, C die Winkel eines sphärischen Dreiecks auf der Kugel vom Halbmesser R, dabei a, b, c klein der ersten Ordnung gegen R, so kann man zur Berechnung der Verhältnisse $a:b:c$ mit Fehler vierter Ordnung

$$a : b : c = \sin A' : \sin B' : \sin C'$$

setzen, wo

$$A' = A - \tfrac{1}{3} E,\ B' = B - \tfrac{1}{3} E,\ C' = C - \tfrac{1}{3} E$$

ist, also A', B', C' die Winkel eines ebenen Dreiecks sind.

Mit anderen Worten: Alle (ebenen) ähnlichen Dreiecke, deren Seitenverhältnisse durch $a : b : c$ der Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks bestimmt sind, haben (bei obiger Fehlergröße) die Winkel $A - \frac{1}{3} E$, $B - \frac{1}{3} E$, $C - \frac{1}{3} E$, wo A, B, C die Winkel des sphärischen Dreiecks mit den Seiten a, b, c der Kugel vom gegebenen Halbmesser R sind. Unter diesen ähnlichen Dreiecken ist auch jenes enthalten, dessen Seiten den zugehörigen Seiten des sphärischen gleich sind. Mit Fehler E^2 kann aber auch

$$A' = A - \tfrac{1}{3} E + \tfrac{1}{3} k E \tan A,\ k \text{ beliebig,}$$

und analog B' und C' gesetzt werden, um

$$a : b : c = \sin A' : \sin B' : \sin C'$$

zu erhalten. Denn es ist

$$\begin{aligned} \sin A' &= \sin (A - \tfrac{1}{3} E) + \tfrac{1}{3} k E \tan A \cos (A - \tfrac{1}{3} E) \\ &= \sin (A - \tfrac{1}{3} E)(1 + \tfrac{1}{3} k E), \end{aligned}$$

ebenso $\sin B'$ und $\sin C'$. Daraus folgt

$$A' + B' + C' = 180^0 + \tfrac{1}{3} k E (\tan A + \tan B + \tan C).$$

Setzt man

$$\tan A + \tan B + \tan C = K,$$

so kann in K mit Fehler E^2 im Resultate

$$A = 180^0 - B - C, \text{ also } \tan A = - \tan (B + C)$$

gesetzt werden; damit wird

$$K = \tan A \tan B \tan C,$$

$$A' + B' + C' = 180^0 + \tfrac{1}{3} k K E.$$

Ist das Dreieck $A\,B\,C$ spitz, so ist K positiv, also das Dreieck mit den Seiten a, b, c und Winkeln A', B', C' ein sphärisches für einen positiven Wert von k, hingegen ein pseudosphärisches für einen negativen Wert von k. Das umgekehrte findet statt, wenn das Dreieck $A\,B\,C$ ein stumpfes ist. Für $k = 0$ erhält man ein ebenes.

Ist $k K$ positiv, so ist $\frac{1}{3} k K E$ der sphärische Exzeß E' des Dreiecks $A'\,B'\,C'$ mit den Seiten a, b, c auf einer Kugel vom Halbmesser R'; wird

$$E = \frac{f}{R^2},\quad E' = \frac{f}{R'^2}$$

gesetzt, so erhält man

$$R'^2 = \frac{3 R^2}{k K}$$

den zum Dreiecke $A'\,B'\,C'$ (mit den Seiten a, b, c) gehörigen Kugelhalbmesser R'.

Ist das Dreieck ABC bei A rechtwinkelig, so setze man k in der Form

$$k = k' \cot A$$

voraus. Damit wird

$$A' = A - \tfrac{1}{3} E + \tfrac{1}{3} k' E$$
$$B' = B - \tfrac{1}{3} E$$
$$C' = C - \tfrac{1}{3} E,$$

das Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln A', B', C' ist ein ebenes, sphärisches oder pseudosphärisches, je nachdem $k' = 0$, positiv oder negativ ist.

(Schluß folgt)

---

212 Tachymeterpunkte in einer Stunde.

Von **E. Hammer**, Stuttgart.

Der Inhalt einiger Mitteilungen im vorigen Jahrgang (1914) der amerikanischen Zeitschrift »Engineering Record« (Nummern vom 6. Juni, 18. Juli, 10. Oktober) verdient auch bei uns allgemein bekannt und mit Erfahrungen in Deutschland oder Österreich-Ungarn verglichen zu werden.

Es handelt sich um erreichte oder erreichbare Höchstleistungen bei technisch-topographischen Messungen, besonders um Höchstzahlen von in einer Stunde oder in einem Arbeitstag tachymetrisch aufgenommenen Punkten; es könnten deshalb wohl Gründe dafür sprechen, die wünschenswerte Erörterung über die folgenden Zeilen lieber in bauwissenschaftlichen als in vermessungstechnischen Zeitschriften geführt zu sehen, doch ist auch vielleicht für diese genügendes Interesse an der Sache vorhanden.

Natürlich kommt nur die Arbeit mit dem gröbern Tachymeter-Theodolit und der Arbeitsvorgang nach $T\,II$ meiner seit 25 Jahren aufgestellten Einteilung in Betracht ($T\,I$ = Präzisions- oder Fein-Tachymetrie, $T\,II$ = »gewöhnliche« Tachymetrie mit Lattenabschnittsablesung an der *dm*- oder Halb-*dm*-Latte auf 1 *cm*, bei Vorarbeiten für Bahnbau u. dgl. die wichtigste Art der »Schnellmessung«). Denn in der Fein-Tachymetrie darf nicht die geleistete Arbeitsmenge fast allein den Ausschlag geben wie es bei $T\,II$ der Fall ist, wo 1000 Punkte mit einem mittlern Höhenfehler von $\pm$ 0·1 *m* und einem Lagefehler von $\pm$ $^1/_2$ *m* in der Regel viel mehr wert sind als auf etwa derselben Fläche 500 Punkte mit dem mittlern Höhenfehler von $\pm$ 0·05 *m* und einem mittlern Lagefehler von vielleicht 2 *dm*.

Ich gebe nun zunächst die wichtigsten Teile des Inhalts der einzelnen Veröffentlichungen a. a. O., wobei in Fällen, in denen es angeht und angezeigt ist, die englischen Maße durch metrische ersetzt sind. Die erste Mitteilung stellt als »Rekord«-Schnelligkeit in topographisch-technischer Arbeit die Aufnahme von 600 Tachymeterpunkten in 8 Stunden auf; die Leistung, die die übliche Durchschnittsleistung verdopple, sei einem Beobachter der »Morgan Engineering Co.«, Memphis, Tenn., gelungen (bei Wasserbauvorarbeiten im Mississippital) durch besondere feste Stellung zum Instrument, möglichst wenige und einfache Bewegungen und den abwechslungsweisen Gebrauch beider Hände und beider Augen bei den Einstellungen. Es sind dabei zwei Lattenträger verwendet worden, zu

Da man S in kleinen Höhenwinkeln beobachten wird, um Triangulierungsinstrumente verwenden zu können, kann man mit $a \doteq b$ mit Rücksicht auf den kleinen Wert von c auch einfacher setzen

$$\mu'' = \frac{c''}{\sin a}, \quad \nu''_1 = 2\,(s - a)''\,\mathrm{tg}\,\frac{s}{2}.$$

So erhält man beispielsweise für $\varphi = 47^0$, also $\log R = 6{\cdot}8047425$, mit $a \doteq b = 70^0$ und

	$\overline{AB} =$	1	3	5	8 *km*
	$\mu =$	34·4	103·2	172·1	175·5 „
	$\nu_1 =$	22·6	67·9	113·3	181·3 „
also	$\mu - \nu_1 =$	11·8	35·3	58·8	94·0 „

Diese Verbesserung bezieht sich lediglich auf die Bestimmung der Winkel ε an den Leitpunkten, während die Vierecke $A\,B\,L\,P$ (Fig. 2) als ebene angesehen werden können, da es sich doch nur um Einschaltungen von Netzpunkten niederer Ordnung handelt.

Die Feldarbeit wird natürlich von dieser Rechnung nicht weiter berührt, nur sind die gleichzeitigen Sterneinstellungen behufs Gewinnung der Zenitdistanzen im Schnittpunkt der Fäden, oder wenigstens in der Nähe des Querfadens vorzunehmen, und daher auf den Höhenkreisen abzulesen.

Im übrigen genügen zwei Beobachter, welche eben für die gleichzeitigen Sterneinstellungen nötig sind, während die in den einzelnen Standpunkten durchzuführenden Sätze natürlich auch von einem Beobachter erledigt werden können, sowie dies immer der Fall ist, wenn es sich um die Einstellung unveränderlicher dauernd sichtbarer Punkte handelt.

Die hier kurz angegebene Art der Punktbestimmung setzt eben genügend Hilfskräfte, Instrumente und zeitgemäße Verständigungsmittel voraus und dürfte sich dieselbe daher mehr für militärische als für ziviltechnische Zwecke eignen.

Legendre's Theorem.

Von **Johannes Frischauf** in Graz.

(Schluß.)

6. Die Bestimmung der Verhältnisse der Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln A, B, C wird aus der Gleichung

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

und den analogen, erhalten.

Mit Fehler vierter Ordnung nach a, b, c ist

$$\frac{a\,(1 - \frac{1}{6}\,a^2)}{b\,(1 - \frac{1}{6}\,b^2)} = \frac{\sin A}{\sin B}, \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin A\,(1 + \frac{1}{6}\,a^2)}{\sin B\,(1 + \frac{1}{6}\,b^2)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A\,[1 + \frac{1}{3} E\,(\cot B + \cot C - k)]}{\sin B\,[1 + \frac{1}{3} E\,(\cot A + \cot C - k)]}$$

$$= \frac{\sin\,[A + \frac{1}{3} E\,(\cot B + \cot C - k) \tan A]}{\sin\,[B + \frac{1}{3} E\,(\cot A + \cot C - k) \tan B]},$$

sohin erhält man aus dieser Gleichung

$$A' = A + \tfrac{1}{3} E\,(\cot B + \cot C - k) \tan A,$$

und analog B' und C', wo k beliebig ist.

Setzt man $k = k_0$, wo

$$k_0 = \cot A + \cot B + \cot C$$

ist, so sind A', B', C' die Winkel eines ebenen Dreiecks. Setzt man $k = k_0 - k'$ und ersetzt dann k' durch k, so erhält man

$$A' = A - \tfrac{1}{3} E + \tfrac{1}{3} k E \tan A$$

und analog B' und C', sohin

$$A' + B' + C' = 180^0 + \tfrac{1}{3} k K E,$$

wodurch diese Bestimmung von A', B', C' aus

$$a : b : c = \sin A' : \sin B' : \sin C'$$

auf die vorige zurückgeführt ist.

7. Zur obigen Gauß'schen Ausgang-Formel möge bemerkt werden: Es ist mit Fehler a^7

$$\sin \tfrac{1}{2} a : \sqrt[3]{\cos \tfrac{1}{2} a} = \tfrac{1}{2} a\,(1 + \tfrac{1}{720} a^4).$$

Mit Fehler E^3 ist

$$\sin A \sin\,(A - \tfrac{1}{2} E)^2 = \sin A^3\,[1 - E \cot A + \tfrac{1}{4} E^2\,(\cot A^2 - 1)];$$

setzt man diesen Ausdruck $= \sin\,[A - (\frac{1}{3} E + x)]^3$, so wird

$$x = \frac{E^2}{18 \sin 2A}.$$

Damit erhält man aus der genauen Gleichung

$$\frac{\sin \frac{1}{2} a : \sqrt[3]{\cos \frac{1}{2} a}\,(1 - \frac{1}{720} a^4)}{\sin \frac{1}{2} b : \sqrt[3]{\cos \frac{1}{2} b}\,(1 - \frac{1}{720} b^4)} = \sqrt[3]{\frac{\sin A \sin\,(A - \frac{1}{2} E)^2}{\sin B \sin\,(B - \frac{1}{2} E)^2}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{720} a^4}{1 - \frac{1}{720} b^4},$$

mit Beiziehung von

$$\sin \alpha + y \sin \alpha = \sin\,(\alpha + y \tan \alpha),$$

mit Fehler sechster Ordnung nach a, b, c

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\left(A - \frac{1}{3} E - \frac{1}{18} \frac{E^2}{\sin 2A} - \frac{1}{720} a^4 \tan A\right)}{\sin\left(B - \frac{1}{3} E - \frac{1}{18} \frac{E^2}{\sin 2B} - \frac{1}{720} b^4 \tan B\right)}.$$

Daraus folgt aber nur, daß für die Berechnung des Verhältnisses $a:b$ mittels

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A'}{\sin B'}$$

$$A' = A - \tfrac{1}{3} E - \tfrac{1}{18} \frac{E^2}{\sin 2A} - \tfrac{1}{720} a^4 \tan A$$

$$= W - \tfrac{1}{3} E - \tfrac{1}{180} E^2 \left(\frac{5}{\sin A^2} + (\cot B + \cot C^2) \right) \tan A,$$

und analog für B' gesetzt werden darf. Die Verhältnisse $\sin A' : \sin B' : \sin C'$, wo A', B', C' nicht die Winkel eines ebenen Dreiecks sind, liefern für $a : b : c$ denselben Wert, wie der erweiterte Legendre'sche Satz. Dies kann so bewiesen werden: Aus diesem Satze folgt

$$\frac{\sin A'}{\sin B'} = \frac{\sin (A - \tfrac{1}{3} E)}{\sin (B - \tfrac{1}{3} E)} \cdot \frac{1 - \tfrac{1}{90} E^2 (2 \cot A - \cot B - \cot C) \cot A}{1 - \tfrac{1}{90} E^2 (2 \cot B - \cot A - \cot C) \cot B}$$

$$= \frac{\sin (A - \tfrac{1}{3} E)}{\sin (B - \tfrac{1}{3} E)} [1 - \tfrac{1}{90} E^2 (\cot A - \cot B) (2 \cot A + 2 \cot B - \cot C)]$$

Aus der Gauß'schen Formel folgt

$$\frac{\sin A'}{\sin B'} = \frac{\sin (A - \tfrac{1}{3} E)}{\sin (B - \tfrac{1}{3} E)} (1 - \tfrac{1}{180} E^2 X),$$

$$X = 5 \left(\frac{1}{\sin A^2} - \frac{1}{\sin B^2} \right) + \frac{\sin A^2}{\sin B^2 \sin C^2} - \frac{\sin B^2}{\sin A^2 \sin C^2}.$$

Der Faktor X läßt sich umformen

$$X = 5 (\cot A^2 - \cot B^2) + (\cot B + \cot C)^2 - (\cot A + \cot C)^2,$$

$$(\cot B + \cot C)^2 - (\cot A + \cot C)^2$$

$$= \cot B^2 - \cot A^2 + 2 \cot C (\cot B - \cot A),$$

also

$$X = 4 (\cot A^2 - \cot B^2) + 2 \cot C (\cot B - \cot A),$$

woraus die Gleichheit der beiden Ausdrücke von $\sin A' : \sin B'$ folgt.

Mit Fehler E^3 kann ohne Schädigung der Genauigkeit der Verhältnisse $a : b : c$ dem Ausdrucke A' (und analog dem von B' und C') der Zusatz

$$\tfrac{1}{180} k E^2 \tan A$$

beigefügt werden, wo k beliebig ist, also

$$A' = A - \tfrac{1}{3} E - \tfrac{1}{180} E^2 \left(\frac{5}{\sin A^2} + (\cot B + \cot C)^2 - k \right) \tan A$$

gesetzt werden (analog B' und C'). Wird k aus der Bedingung bestimmt, daß in der Summe

$$A' + B' + C'$$

der Kooffizient von E^2 Null wird, so sind A', B', C' die Winkel eines ebenen Dreiecks. Diese Bedingung lautet, wenn

$$\tan A + \tan B + \tan C = K$$

$$\tan A \cot A^2 + \tan B \cot B^2 + \tan C \cot C^2$$

$$= \cot A + \cot B + \cot C = L$$

gesetzt wird,

$$5 K + 5 L + \tan A (\cot B + \cot C)^2$$

$$+ \tan B (\cot A + \cot C)^2 + \tan C (\cot A + \cot B)^2 = k K,$$

oder

$$5K + 4L + K(\cot A^2 + \cot B^2 + \cot C^2)$$
$$+ 2\left(\frac{\cot B \cot C}{\cot A} + \frac{\cot A \cot C}{\cot B} + \frac{\cot A \cot B}{\cot C}\right) = k K.$$

$$\cot(B + C) = -\cot A = \frac{\cot B \cot C - 1}{\cot B + \cot C}$$

$$\cot B \cot C = 1 - \cot A(\cot B + \cot C)$$

$$\cot B \cot C + \cot A \cot C + \cot A \cot B = 1$$

$$\frac{\cot B \cot C}{\cot A} = \tan A - (\cot B + \cot C),$$

daraus folgt

$$k = 7 + \cot A^2 + \cot B^2 + \cot C^2$$
$$= 5 + (\cot A + \cot B + \cot C)^2.$$

Setzt man diesen Wert von k in dem obigen Ausdruck für A', so erhält man

$$A' = A - \tfrac{1}{3} E - \tfrac{1}{180} E^2 [4 \cot A^2 - 2 \cot A(\cot B + \cot C)] \tan A$$
$$= A - \tfrac{1}{3} E - \tfrac{1}{90} E^2 (2 \cot A - \cot B - \cot C),$$

also nach Art. 3 den richtigen Wert.

Setzt man statt k die Größe $k_0 + 2k$, wo k_0 den obigen Wert bedeutet, so wird

$$A' = A - \tfrac{1}{3} E - \tfrac{1}{90} E^2 (2 \cot A - \cot B - \cot C - k \tan A),$$

und analog B' und C'. Damit erhält man

$$A' + B' + C' = 180^0 + \tfrac{1}{90} K k E^2,$$

also (mit Fehler E^3) das Resultat von 5.

Schlußbemerkungen.

Der Gauß'sche Ausgang für den Beweis des (einfachen) Legendre'schen Satzes gestattet also auch die Bestimmung der Winkel des ebenen Dreiecks bei Einschluß der Größen mit E^2.

Aus den Beweisen ist auch zu ersehen, daß für den einfachen Satz die Übereinstimmung der Seiten des ebenen und sphärischen Dreiecks nur bis einschließlich Größen vierter, beim erweiterten Satz bis einschließlich Größen fünfter Ordnung nötig ist, falls nur die erste Näherung der Verbesserung des Legendre'schen Satzes gefordert wird. Diese Tatsache gestattet die Erweiterung des Legendre'schen Satzes für die Lösung der Aufgaben sphäroidischer Dreiecke mit kleinen Seiten. Ist P die Breite des Normalparallels, so gewählt, daß die Abstände der Ecken des Dreiecks nicht größer als dessen Seiten sind, so unterscheiden sich bei der Uebertragung des Dreiecks auf die Kugel vom Halbmesser

$$A = a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin P^2}$$

die Seiten des Hilfsdreiecks von den zugehörigen des Urdreiecks um kleine Größen vierter Ordnung mit einem Faktor e^2, also um kleine Größen bez. fünfter und sechster Ordnung, je nachdem e^2 bez. e klein der ersten Ordnung vorausgesetzt wird.*) Die Unterschiede der zugehörigen Winkel sind kleine Größen bez. vierter und fünfter Ordnung.**) Bei der vorausgesetzten Genauigkeit kann daher mit Benützung des Halbmessers A das sphäroidische Dreieck als ein sphärisches betrachtet werden.

Da die Formeln der Sphärik, indem man a, b, c durch ai, bi, ci (also E durch $-E$) ersetzt, in jene der für konstant negativ gekrümmte Flächen übergehen so gilt der Legendre'sche Satz auch für pseudosphärische Dreiecke, wenn E durch $-E$ ersetzt wird.

Dessen Beweis soll aber nicht auf das Verhältnis $a : b : c$ gestützt werden, sondern es muß der Winkel A des pseudosphärischen Dreiecks mit seinem zugehörigen A' des ebenen Dreiecks in Beziehung gesetzt werden, wo Art. 2 fast ungeändert beibehalten werden kann.

Sondier-Tachygraph System Reich-Ganser.

Von **Ing. Karl Linsbauer**, Oberingenieur des n.-ö. Staatsbaudienstes.

Einleitung.

Der stetig wachsende Verkehr hat es mit sich gebracht, daß an eine Ausgestaltung der bereits bestehenden Verkehrsadern geschritten werden mußte; der Bau neuer Schienenwege, künstlicher Wasserstraßen und die Regulierung natürlicher Wasserläufe zum Zwecke der Verbesserung der Schiffahrtsrinne war die natürliche Folge.

Um letztgenanntem Ziele näher zu rücken, ist es unbedingt erforderlich, an einzelnen Stellen des natürlichen Wasserlaufes eine genaue Aufnahme der Stromsohle vorzunehmen, insbesonders dort, wo infolge einer starken Geschiebeführung größere, auf die Schiffahrt nachteilig wirkende Veränderungen in der Stromsohle zu gewärtigen sind. Bisher war es nahezu allgemein üblich, Stromgrundaufnahmen dadurch zu bewirken, daß in gewissen Abständen direkte Querprofilaufnahmen durch Peilungen vorgenommen wurden. Wenn dieser Vorgang bei kleineren Flüssen, insbesonders kleineren Gefällen immerhin zweckdienlich sein mag, so muß er jedoch vollständig versagen, bezw. sehr kostspielig werden, wenn es sich um Stromgrundaufnahmen bei größeren Strömen mit stärkeren Gefällen handelt. So nahm beispielsweise bei der n.-ö. Donau die Peilung eines einzigen Querprofiles oft einen ganzen Tag in Anspruch, da die für die Querdistanzmessung bestimmte Meßleine auf mehreren im Strome verankerten Kähnen aufgelegt werden mußte, eine Arbeit, zu der unter Umständen 15 eventuell noch mehr geübte Schiffsleute notwendig waren. Da die Dampfschiffahrt bezw. Ruderschiffahrt im Strome durch solche Peilungen nicht unterbrochen werden durfte, so ereignete es sich oft, daß das mit vieler Mühe und Geldaufwand über die Donau gespannte Querseil während der vorzunehmenden Peilung wieder geöffnet werden mußte, um einem in der Fahrt begriffenen Schiffe die Durchfahrt

---

*) J. Frischauf: «Die mathematischen Grundlagen der Landesaufnahme und Kartographie des Erdsphäroids.» (Stuttgart, 1913.) Art. 58.

**) Ebenda. Art. 57.