Gemeinsame Tangente an zwei Kreisbögen

Hans Ecker [1]

[1] *Konstrukteur an der k. k. technischen Hochschule in Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **13** (4), S. 53–56

1915

BibTEX:

```
@ARTICLE{Ecker_VGI_191506,
Title = {Gemeinsame Tangente an zwei Kreisb{\"o}gen},
Author = {Ecker, Hans},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {53--56},
Number = {4},
Year = {1915},
Volume = {13}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

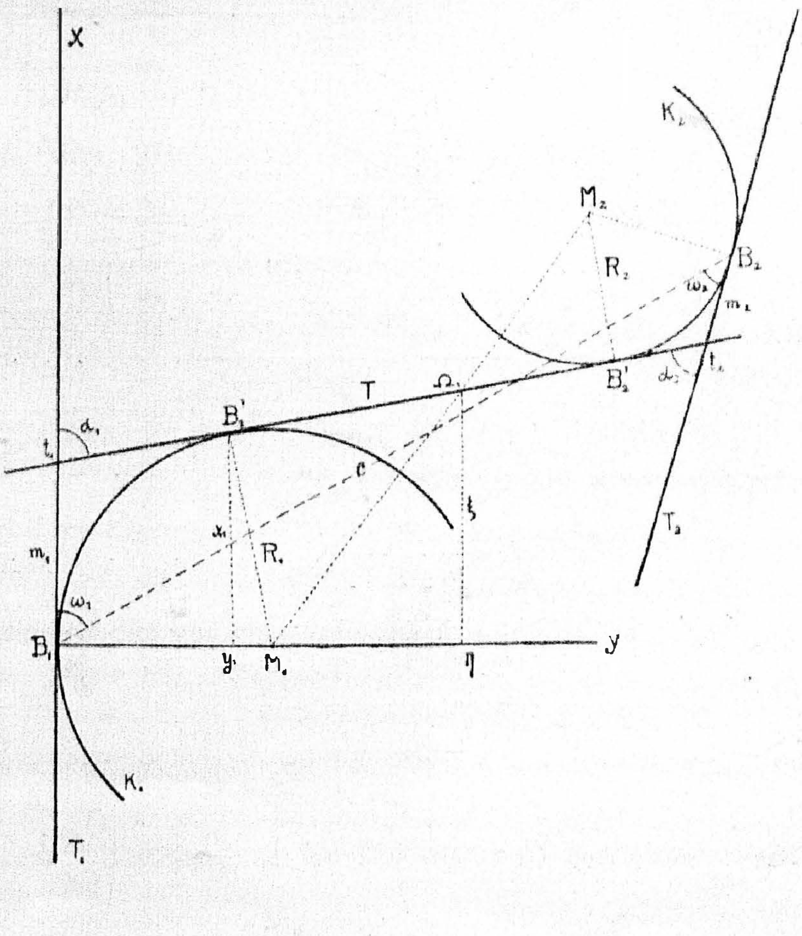
Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 4. **Wien, 1. April 1915.** **XIII. Jahrgang.**

Gemeinsame Tangente an zwei Kreisbögen.

Von Ing. **H. Ecker,** Konstrukteur an der k. k. Technischen Hochschule in Graz.

Die vorliegende Aufgabe kann auf verschiedene Arten gelöst werden, und ist die Art der Lösung teils durch die zur Verfügung stehenden Instrumente, teils durch den Grad der Genauigkeit, den man erzielen will, bedingt. Die Aufgabe läßt vier Lösungen zu, von welchen diejenige nicht zweifelhaft sein wird, die in Frage kommt.



Von dem Kreisbogen K_1 sei der Halbmesser R_1 gegeben und die Tangente T_1 mit dem Berührungspunkt B_1 abgesteckt; vom Kreisbogen K_2 sind die gleichen Bestimmungsstücke R_2, T_2 und B_2 bekannt.

Die im Nachstehenden gegebene Lösung geht darauf aus, mit Hilfe der analytischen Geometrie die Winkel α_1 und α_2, unter welchen die gemeinsame Tangente T die beiden Anschlußtangenten T_1 und T_2 schneidet, und die Abschnitte m_1 und m_2 auf diesen Tangenten von den entsprechenden Berührungspunkten B_1 und B_2 zu bestimmen. Es sei bemerkt, daß das Innenzentrum Ω_1 (oder das Außenzentrum Ω_2) lediglich für Rechnungszwecke nicht aber für die Absteckung selbst benützt wird.

Die nötige Feldarbeit beschränkt sich auf die Bestimmung der Entfernung $\overline{B_1 B_2} = c$ der beiden gegebenen Berührungspunkte und der beiden Winkel w_1 und w_2. Wäre etwa die direkte Bestimmung der eben angeführten Stücke umständlich oder überhaupt nicht möglich, so liefert ein die Punkte B_1 und B_2 verbindender Polygonzug die gewünschten Größen c, w_1 und w_2.

Der Berechnung wird ein rechtwinkeliges Koordinatensystem zu Grunde gelegt, dessen Ursprung mit dem Berührungspunkte B_1, dessen Abszissenachse mit der betreffenden Tangente T_1 und dessen Ordinatenachse mit dem dazu senkrechten Durchmesser des Kreises K_1 zusammenfällt. Für die Folge sei $R_1 > R_2$ vorausgesetzt.

Es ergeben sich nun die Koordinaten der Berührungspunkte B_1, B_2 sowie jene der Kreismittelpunkte M_1 und M_2 wie folgt:

$$\left.\begin{array}{ll} B_1 \ldots y_b' = 0; & x_b' = 0 \\ B_2 \ldots y_b'' = c \sin w_1 & x_b'' = c \cos w_1 \\ M_1 \ldots y_m' = R_1 & x_m' = 0 \\ M_2 \ldots y_m'' = y_b'' + R_2 \sin (B_2 M_2); & x_m'' = x_b'' + R_2 \cos (B_2 M_2) \end{array}\right\} \ldots 1)$$

Dabei ist $(B_2 M_2) = (B_2 B_1) + \sphericalangle B_1 B_2 M_2$ und $\sphericalangle B_1 B_2 M_2 = 90 - w_2$.

Ebenso erhält man die Entfernung der beiden Kreismittelpunkte $\overline{M_1 M_2} = e$ aus:

$$e = \frac{y_m'' - y_m'}{\sin (M_1 M_2)} = \frac{x_m''}{\cos (M_1 M_2)} \ldots \ldots \ldots \; 2)$$

Wegen der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke $\Omega_1 M_1 B_1'$ und $\Omega_1 M_2 B_2'$ erhält man, wenn $\overline{M_1 \Omega_1} = d$ gesetzt wird:

$$d = \frac{R_1}{R_1 \pm R_2} e \ldots \ldots \ldots \ldots \; 3)$$

In diesem Ausdrucke bezieht sich das obere Zeichen auf die inneren Tangenten, das untere Zeichen auf die äußeren Tangenten. Es genügt, den Rechnungsvorgang für die inneren Tangenten zu zeigen.

Die Koordinaten ξ und η des Innenzentrums Ω_1 erhält man aus:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = d \cos (M_1 M_2) \\ \eta = R_1 + d \sin (M_1 M_2) \end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots \; 4)$$

Wir nennen nun die Koordinaten des Berührungspunktes B_1' der gemeinsamen Tangente T mit dem Kreise K_1, x_1 und y_1. Dieselben müssen sowohl der Gleichung des Kreises K_1 als auch jener der Tangente durch den Punkt Ω_1 genügen. Man hat daher:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2 R_1 y_1 = 0$$
$$\xi x_1 + y_1 (\eta - R_1) - R_1 \eta = 0.$$

Daraus folgt:

$$x_1 = \frac{R_1}{d^2} [R_1 \xi \pm (\eta - R_1) \sqrt{d^2 - R_1^2}] \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

$$y_1 = \frac{R_1 \eta - \xi x_1}{\eta - R_1} \quad \ldots \ldots \quad 6)$$

Da nunmehr von den beiden Punkten Ω_1 und B_1' die Koordinaten bekannt sind, so ist auch die Gleichung der gemeinsamen Tangente T bestimmt durch:

$$y - y_1 = \frac{\eta - y_1}{\xi - x_1} (x - x_1) \quad \ldots \ldots \quad 7)$$

Diese läßt sich nun 'urch Einsetzen der bekannten Werte aus 4), 5), 6) in der allgemeinen Form

$$y = a x + b \quad \ldots \ldots \quad 8)$$

darstellen, wobei

$$a = \frac{\eta - y_1}{\xi - x_1} \text{ und } b = y_1 - \frac{\eta - y_1}{\xi - x_1} x_1 \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

ist.

Für $y = 0$ erhält man aus 8) mit Benützung von 9) den Abschnitt $\overline{B_1 t_1} = m_1$ auf der Tangente T_1:

$$m_1 = x_1 - \frac{\xi - x_1}{\eta - y_1} y_1 \quad \ldots \ldots \quad 10)$$

In 8) bedeutet a den Richtungskoeffizienten von T. Man erhält daher aus 9):

$$a = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\eta - y_1}{\xi - x_1} \quad \ldots \ldots \quad 11)$$

In bekannter Weise ergeben sich dann die Absteckungsdaten von der zweiten Tangente aus. Der Winkel β zwischen den beiden Anschlußtangenten T_1 und T_2 folgt zunächst aus:

$$\beta = w_1 - w_2. \quad \ldots \ldots \quad 12)$$

Man erhält dann

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \beta, \quad \ldots \ldots \quad 13)$$

sowie den Abschnitt $B_2 t_2 = m_2$ auf der Tangente T_2 mit:

$$m_2 = R_2 \operatorname{ctg} (90 - \frac{\alpha_2}{2} \quad \ldots \ldots \quad 14)$$

Nunmehr sind alle Daten bekannt, um die gemeinsame Tangente T von den beiden Anschlußtangenten T_1 und T_2 abzustecken.

Zu einem Rechnungsbeispiel nehmen wir:

$R_1 = 150\,m$; $\quad w_1 = 56^0\ 40'$;

$R_2 = 100\,m$; $\quad w_2 = 43^0\ 50'$; $\quad \overline{B_1 B_2} = c = 550{\cdot}00\,m$

Man erhält aus 1):

$B_1 \ldots y_b' = 0{\cdot}00\,m$; $\quad B_2 \ldots y_b'' = 459{\cdot}52\,m$

$x_b' = 0{\cdot}00\,m$; $\quad x_b'' = 302{\cdot}23\,m$

$M_1 \ldots y_m' = 150{\cdot}00\,m$; $\quad M_2 \ldots y_m'' = 362{\cdot}02\,m$

$x_m' = 0{\cdot}00\,m$; $\quad x_m'' = 324{\cdot}44\,m$.

Aus 2) und 3) berechnet man

$$e = 387{\cdot}58\,m, \quad \text{bezw.} \quad d = 232{\cdot}55\,m.$$

Schließlich geben die Gleichungen 4) bis 6) und 10) bis 14) der Reihe nach:

$$\xi = 194{\cdot}67\,m; \quad \eta = 277{\cdot}21\,m;$$
$$x_1 = 143{\cdot}70\,m; \quad y_1 = 106{\cdot}98\,m;$$
$$m_1 = 111{\cdot}67\,m; \quad \alpha_1 = 73^0\,19'\,50'';$$
$$\beta = 12^0\,50'; \quad \alpha_2 = 60^0\,29'\,50''; \quad m_2 = 58{\cdot}32\,m.$$

Untersuchungen über die Genauigkeit des Zielens mit Fernröhren.

Von **Alfred Noetzli**, Dipl. Ing. aus Höngg (Zürich).

(Fortsetzung.)

Die obige Berechnungsart des Mittelwertes der mittleren Fehler ist allerdings nicht ganz einwandfrei, so lange nicht nachgewiesen ist, daß die inneren Genauigkeiten der einzelnen Fehlerwerte ungefähr die gleichen sind, d. h. daß die mittleren Fehler der mittleren Fehler für alle Reihen nur so viel von einander verschieden sind, als es die Gesetze der reinen Zufälligkeit zulassen. Eine ge-

Tabelle Nr. 28.

1. Gruppe.

Nr. der Reihe	Vergrößerung $V = 12$ m_1''	Vergrößerung $V = 24$ m_2''
20 u. 18	0·75	0·49
23 u. 22	0·51	0·49
27 u. 26	0·40	0·41
40 u. 37	0·50	0·50
39 u. 38	0·66	0·35
224 u. 223	0·78	0·49
231 u. 232	0·65	0·38
	$m_{12} = 0{\cdot}62$	$m_{24} = 0{\cdot}45$
	$m\,V = 7{\cdot}45$ (7·28)	10·79 (10·65)
	$m\sqrt{V} = 2{\cdot}15$ (2·10)	2·20 (2·18)
	$m\sqrt[5]{V} = 1{\cdot}42$	1·30

Tabelle Nr. 29.

2. Gruppe.

Nr. der Reihe	Vergrößerung $V = 24$ m_1''	Vergrößerung $V = 37$ m_2''
130 u. 128	0·56	0·51
136 u. 135	0·34	0·47
137 u. 138	0·84	0·68
140 u. 139	0·42	0·41
141 u. 142	0·50	0·32
144 u. 143	0·68	0·53
153 u. 154	0·45	0·35
155 u. 156	0·70	0·46
	$m_{24} = 0{\cdot}58$	$m_{37} = 0{\cdot}48$
	$m\,V = 14{\cdot}15$ (13·47)	17·37 (17·24)
	$m\sqrt{V} = 2{\cdot}84$ (2·75)	2·92 (2·84)
	$m\sqrt[8]{V} = 1{\cdot}67$	1·60