

Paper-ID: VGI_191421



Die Hansen'sche Aufgabe mit überschüssigen Beobachtungen

A. Härpfer ¹

¹ *Prag*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **12** (11, 12), S. 225–230, 241–248

1914

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Haerpfer_VGI_191421,  
Title = {Die Hansen'sche Aufgabe mit {\u}bersch{\u}ssigen Beobachtungen},  
Author = {H{\a}rpfer, A.},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {225--230, 241--248},  
Number = {11, 12},  
Year = {1914},  
Volume = {12}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. II.

Wien, 1. November 1914.

XII. Jahrgang.

Die Hansen'sche Aufgabe mit überschüssigen Beobachtungen.

Von Privatdozent Dr. A. Haerpfer in Prag.

Aus den durch ihre rechtwinkligen Koordinaten gegebenen Festpunkten A, B, C, \dots sind die ausgeglichenen Werte der Koordinatenunterschiede der beiden Neupunkte P und Q gegen einen dieser Festpunkte, z. B. A , durch Messung der Winkel $1, 3, 5 \dots$ in P und durch jene der Winkel $2, 4, 6, \dots$ in Q abzuleiten. (Fig. 1).

Man verschafft sich zunächst Näherungswerte für diese Koordinatenunterschiede

$$\begin{aligned} \Delta x_P &= x_P - x_A & \text{bzw.} & & \Delta x_Q &= x_Q - x_A \\ \Delta y_P &= y_P - y_A & & & \Delta y_Q &= y_Q - y_A \end{aligned}$$

indem man entweder in der bekannten Weise aus den Koordinaten von zwei der gegebenen Festpunkte und den in P und Q nach diesen und nach Q , bzw. P gemessenen Winkeln Näherungswerte für die Koordinaten x_P und y_P , sowie x_Q und y_Q rechnet und mit diesen die obigen Differenzen bildet, oder indem man aus den orthogonalen Projektionen der Dreiecke ABP , bzw. ABQ auf die X - und auf die Y -Achse vier Gleichungen entwickelt, die unmittelbar nach Näherungswerten $\Delta_0 x_P, \Delta_0 y_P, \Delta_0 x_Q$ und $\Delta_0 y_Q$ der Koordinatenunterschiede als Unbekannten aufzulösen sind.*)

Die zur Ausgleichung dieser Koordinatenunterschiede erforderlichen Bedingungsgleichungen ergeben sich, wenn man die für die Hansen'sche Aufgabe charakteristischen aufrechten oder verschränkten Vierecke, die sich über die Neupunkte P und Q , ferner über den Festpunkt A und über einen der übrigen gegebenen und in die Winkelmessung einbezogenen Festpunkte als jeweiligen vierten Punkt erstrecken, d. s. nach Fig. 1 die Linienzüge $ABQPA, ACQPA, \dots$,

*) Vergl. d. Verf. Schrift „Die Probleme von Hansen und Snellius“, Leipzig u. Berlin 1910.

auf die X - und Y -Achse orthogonal projiziert. Darnach beträgt für n gegebene, bzw. angezielte Festpunkte die Anzahl der Bedingungsgleichungen

$$2(n - 1).$$

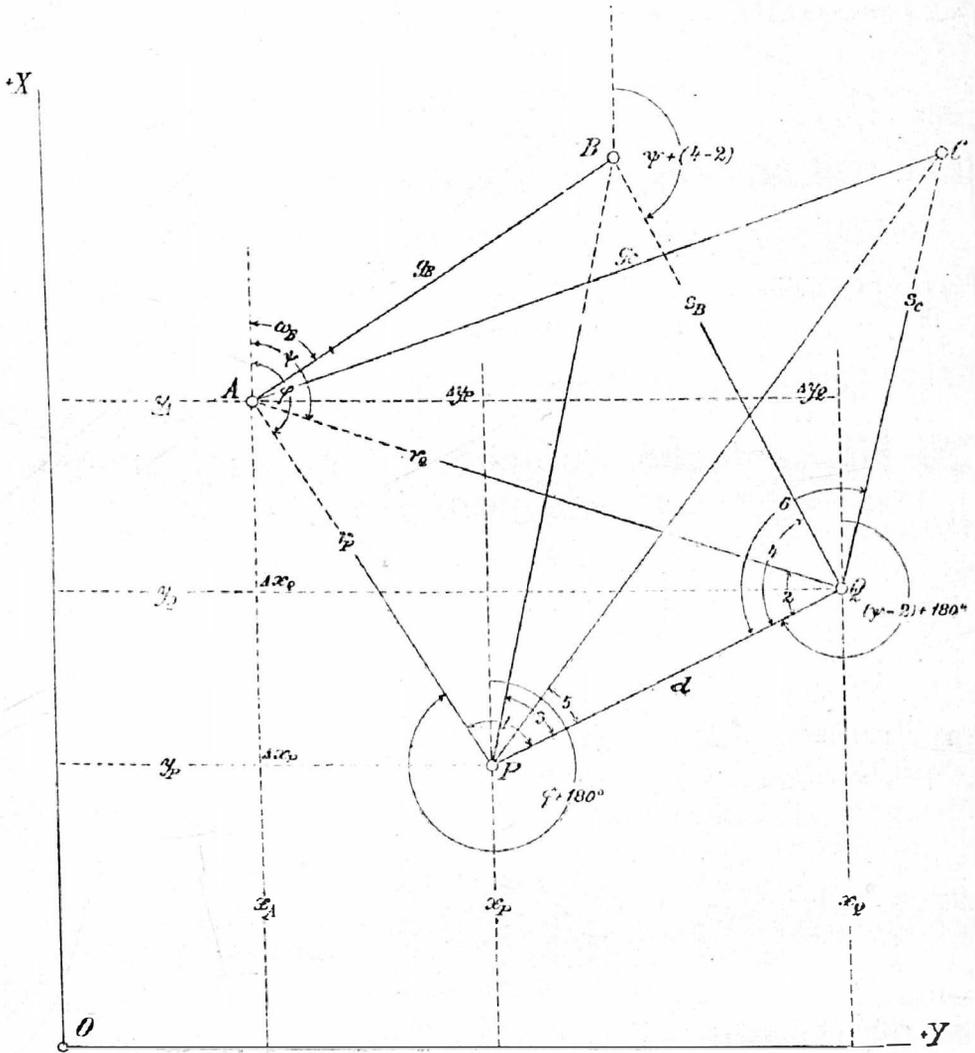


Fig. 1.

Im folgenden mögen die aus den Projektionen von $ABQIA$ auf die X - und Y -Achse hervorgehenden beiden Bedingungsgleichungen entwickelt werden.

Mit Beachtung der Richtungswinkel in Figur 1 ergibt die Projektion auf die X -Achse:

$$s_n \cos \omega_n + s_n \{\psi + (4 - 2)\} + d \cos \{(\psi - 2) + 180^\circ\} + r_r \cos (\varphi + 180^\circ) = 0$$

und jene auf die Y -Achse:

$$s_n \sin \omega_n + s_n \sin \{\psi + (4 - 2)\} + d \sin \{(\psi - 2) + 180^\circ\} + r_r \sin (\varphi + 180^\circ) = 0.$$

Nach entsprechender Vereinfachung ist:

$$\left. \begin{aligned} s_n \cos \omega_n + s_n \cos \{\psi + (4 - 2)\} - d \cos (\psi - 2) - r_r \cos \varphi &= 0 \\ s_n \sin \omega_n + s_n \sin \{\psi + (4 - 2)\} - d \sin (\psi - 2) - r_r \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots 1)$$

Hierin setzen wir der Kürze wegen für die bekannten Stücke:

$$g_b \cos \omega_b = x_b - x_a = b_1$$

$$g_b \sin \omega_b = y_b - y_a = b_2.$$

Ferner drücken wir s_b durch r_q aus und erhalten hiezu aus Dreieck BQP :

$$s_b \sin (3 + 4) = d \sin 3 \quad \dots \dots \dots 2)$$

und aus Dreieck AQP :

$$r_q \sin (1 + 2) = d \sin 1 \quad \dots \dots \dots 3)$$

Somit ist

$$s_b = \frac{\sin (1 + 2) \sin 3}{\sin 1 \sin (3 + 4)} r_q \quad \text{oder}$$

$$s_b = K r_q, \quad \text{wenn}$$

$$\frac{\sin (1 + 2) \sin 3}{\sin 1 \sin (3 + 4)} = K \quad \text{gesetzt wird. Aus}$$

$$K = \frac{\frac{\sin (1 + 2)}{\sin 1}}{\frac{\sin (3 + 4)}{\sin 3}} = \frac{Z}{N} \quad \dots \dots \dots 4)$$

wird die für die unten folgenden Differentiationen dieses Ausdruckes (und seine Berechnung mit der Rechenmaschine) bequemere Form bekommen.

$$K = \frac{\sin 2 \cotg 1 + \cos 3}{\sin 4 \cotg 3 + \cos 4} \quad \dots \dots \dots 5)$$

Damit ist

$$s_b \cos \{ \psi + (4 - 2) \} = K \cos (4 - 2) \cdot r_q \cos \psi - K \sin (4 - 2) \cdot r_q \sin \psi$$

oder, weil $r_q \cos \psi = \Delta x_q$ und $r_q \sin \psi = \Delta y_q$,

$$s_b \cos \{ \psi + (4 - 2) \} = K \cos (4 - 2) \cdot \Delta x_q - K \sin (4 - 2) \cdot \Delta y_q \quad \dots \dots 6)$$

Ebenso erhält man für

$$s_b \sin \{ \psi + (4 - 2) \} = K \cos (4 - 2) \cdot r_q \sin \psi + K \sin (4 - 2) \cdot r_q \cos \psi$$

$$s_b \sin \{ \psi + (4 - 2) \} = K \sin (4 - 2) \cdot \Delta x_q + K \cos (4 - 2) \cdot \Delta y_q \quad \dots \dots 7)$$

Aus 3) folgt mit der Bezeichnung von 4):

$$d = Z \cdot r_q.$$

Daher ist

$$d \cos (\psi - 2) = Z \cos 2 \cdot r_q \cos \psi + Z \sin 2 \cdot r_q \sin \psi \quad \text{und}$$

$$d \sin (\psi - 2) = Z \cos 2 \cdot r_q \sin \psi - Z \sin 2 \cdot r_q \cos \psi \quad \text{oder}$$

$$d \cos (\psi - 2) = Z \cos 2 \cdot \Delta x_q + Z \sin 2 \cdot \Delta y_q \quad \dots \dots 8)$$

$$d \sin (\psi - 2) = -Z \sin 2 \cdot \Delta x_q + Z \cos 2 \cdot \Delta y_q \quad \dots \dots 9)$$

Werden die in 6) bis 9) gefundenen Werte in die Gleichungen 1) eingeführt, so entsteht unter Beachtung von $r_r \cos \varphi = \Delta x_r$ und $r_r \sin \varphi = \Delta y_r$:

$$\left\{ \begin{aligned} K \cos (4 - 2) - Z \cos 2 \} \Delta x_q - \{ K \sin (4 - 2) + Z \sin 2 \} \Delta y_q - \Delta x_r + b_1 &= 0 \\ K \sin (4 - 2) + Z \sin 2 \} \Delta x_q + \{ K \cos (4 - 2) - Z \cos 2 \} \Delta y_q - \Delta y_r + b_2 &= 0 \end{aligned} \right. \quad 10)$$

Hierin sind die linken Seitenfunktionen der Winkel 1, 2, 3 und 4, deren gemessene Werte mit den Verbesserungen

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ und } \lambda_4$$

einzuführen sind, und der Unbekannten $\Delta x_Q, \Delta y_Q$ und Δx_P bzw. Δy_P , die durch die früher ermittelten Näherungswerte und deren unbekannte Verbesserungen ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \Delta x_P &= \Delta_0 x_P + \xi_1 & \Delta x_Q &= \Delta_0 x_Q + \xi_2 \\ \Delta y_P &= \Delta_0 y_P + \eta_1 & \Delta y_Q &= \Delta_0 y_Q + \eta_2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 10) würden dann — in allgemeiner Form geschrieben — lauten:

$$\begin{aligned} F_1 \{(\Delta x_P + \xi_1), (\Delta_0 x_Q + \xi_2), (\Delta_0 y_Q + \eta_2), (1 + \lambda_1), (2 + \lambda_2), (3 + \lambda_3), (4 + \lambda_4)\} &= 0 \\ F_2 \{(\Delta y_P + \eta_1), (\Delta_0 x_Q + \xi_2), (\Delta_0 y_Q + \eta_2), (1 + \lambda_1), (2 + \lambda_2), (3 + \lambda_3), (4 + \lambda_4)\} &= 0 \end{aligned}$$

Zur Berechnung der unbekanntenen Verbesserungen sind die beiden Funktionen durch Entwicklung nach Taylors Satze zunächst in die lineare Form überzuführen:

$$\begin{aligned} F_1(\Delta_0 x_P, \Delta_0 x_Q, \Delta_0 y_Q, 1, 2, 3, 4) + \frac{\partial F_1}{\partial (\Delta_0 x_P)} \xi_1 + \frac{\partial F_1}{\partial (\Delta_0 x_Q)} \xi_2 + \frac{\partial F_1}{\partial (\Delta_0 y_Q)} \eta_2 + \\ + \frac{\partial F_1}{\partial 1} \lambda_1 + \frac{\partial F_1}{\partial 2} \lambda_2 + \frac{\partial F_1}{\partial 3} \lambda_3 + \frac{\partial F_1}{\partial 4} \lambda_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\Delta_0 y_P, \Delta_0 x_Q, \Delta_0 y_Q, 1, 2, 3, 4) + \frac{\partial F_2}{\partial (\Delta_0 y_P)} \eta_1 + \frac{\partial F_2}{\partial (\Delta_0 x_Q)} \xi_2 + \frac{\partial F_2}{\partial (\Delta_0 y_Q)} \eta_2 + \\ + \frac{\partial F_2}{\partial 1} \lambda_1 + \frac{\partial F_2}{\partial 2} \lambda_2 + \frac{\partial F_2}{\partial 3} \lambda_3 + \frac{\partial F_2}{\partial 4} \lambda_4 = 0 \end{aligned}$$

(Hierin sind die höheren Potenzen vernachlässigt.)

$$\text{Aus } \left. \begin{aligned} F_1(\Delta_0 x_P, \Delta_0 x_Q, \Delta_0 y_Q, 1, 2, 3, 4) &= w_1 \\ F_2(\Delta_0 y_P, \Delta_0 x_Q, \Delta_0 y_Q, 1, 2, 3, 4) &= w_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 10a$$

ergeben sich die Absolutglieder w_1 und w_2 der beiden Fehlergleichungen.

Zur Berechnung der partiellen Differentialquotienten empfiehlt es sich, die Gleichungen 10) durch Einführung der Werte für K und Z aus 5) bzw. 4) in ausführlicher Form zu schreiben und durch Multiplikation mit dem Nenner N von K zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} (\sin 2 \cotg 1 + \cos 2) \{ \cos(4 - 2) - \cos 2 (\sin 4 \cotg 3 + \cos 4) \} (\Delta_0 x_Q + \xi_2) - \\ - (\sin 2 \cotg 1 + \cos 2) \{ \sin(4 - 2) + \sin 2 (\sin 4 \cotg 3 + \cos 4) \} (\Delta_0 y_Q + \eta_2) - \\ - (\sin 4 \cotg 3 + \cos 4) (\Delta_0 x_P + \xi_1 - b_1) = 0^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sin 2 \cotg 1 + \cos 2) \{ \sin(4 - 2) + \sin 2 (\sin 4 \cotg 3 + \cos 4) \} (\Delta_0 x_Q + \xi_2) + \\ + (\sin 2 \cotg 1 + \cos 2) \{ \cos(4 - 2) - \cos 2 (\sin 4 \cotg 3 + \cos 4) \} (\Delta_0 y_Q + \eta_2) - \\ - (\sin 4 \cotg 3 + \cos 4) (\Delta_0 y_P + \eta_1 - b_2) = 0^* \end{aligned}$$

Nach weiterer geringer Vereinfachung folgt:

$$\begin{aligned} (\sin 2 \cotg 1 + \cos 2) \sin 4 \{ (\sin 2 - \cos 2 \cotg 3) (\Delta_0 x_Q + \xi_2) - \\ - (\cos 2 + \sin 2 \cotg 3) (\Delta_0 y_Q + \eta_2) \} - (\sin 4 \cotg 3 + \cos 4) (\Delta_0 x_P + \xi_1 - b_1) = 0 \\ \dots 11a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sin 2 \cotg 1 + \cos 2) \sin 4 \{ (\cos 2 + \sin 2 \cotg 3) (\Delta_0 x_Q + \xi_2) + \\ + (\sin 2 - \cos 2 \cotg 3) (\Delta_0 y_Q + \eta_2) \} - (\sin 4 \cotg 3 + \cos 4) (\Delta_0 y_P + \eta_1 - b_2) = 0 \\ \dots 11b \end{aligned}$$

*1) Um nicht zu weitläufig zu werden, sind die Winkelverbesserungen λ hierin weggelassen.

Die partiellen Differentialquotienten sind erstens aus 11 a):

$$\frac{\partial F_1}{\partial(\Delta_0 x_P)} = - \frac{\sin(3+4)}{\sin 3} \dots \dots \dots 12)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial(\Delta_1 x_Q)} = - \frac{\sin(1+2) \cos(2+3) \sin 4}{\sin 4 \sin 3} \dots \dots \dots 13)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial(\Delta_0 y_Q)} = - \frac{\sin(1+2) \sin(2+3) \sin 4}{\sin 1 \sin 3} \dots \dots \dots 14)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial 1} = + \frac{\sin 2 \sin 4}{\sin^2 1 \sin 3} \{ \Delta_0 x_Q \cos(2+3) + \Delta_0 y_Q \sin(2+3) \} \dots \dots \dots 15)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial 2} = - \frac{\sin 4}{\sin 1 \sin 3} \{ \Delta_0 x_Q \cos(1+2+2+3) + \Delta_0 y_Q \sin(1+2+2+3) \} \dots \dots 16)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial 3} = \frac{\sin 4}{\sin^2 3} \left\{ \frac{\sin(1+2)}{\sin 1} (\Delta_0 x_Q \cos 2 + \Delta_0 y_Q \sin 2) + \Delta x_P - b_1 \right\} \dots \dots 17)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial 4} = - \frac{1}{\sin 3} \left\{ \frac{\sin(1+2) \cos 4}{\sin 1} [\Delta_0 x_Q \cos(2+3) + \Delta_0 y_Q \sin(2+3)] + (\Delta_0 x_P - b_1) \cos(3+4) \right\} \dots \dots \dots 18)$$

zweitens aus 11 b):

$$\frac{\partial F_2}{\partial(\Delta_0 y_P)} = - \frac{\sin(3+4)}{\sin 3} \dots \dots \dots 19)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial(\Delta_0 x_Q)} = + \frac{\sin(1+2) \sin(2+3) \sin 4}{\sin 1 \sin 3} \dots \dots \dots 20)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial(\Delta_0 y_Q)} = - \frac{\sin(1+2) \cos(2+3) \sin 4}{\sin 1 \sin 3} \dots \dots \dots 21)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial 1} = - \frac{\sin 2 \sin 4}{\sin^2 1 \sin 3} \{ \Delta_0 x_Q \sin(2+3) - \Delta_0 y_Q \cos(2+3) \} \dots \dots \dots 22)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial 2} = + \frac{\sin 4}{\sin 1 \sin 3} \{ \Delta_0 x_Q \sin(1+2+2+3) - \Delta_0 y_Q \cos(1+2+2+3) \} \dots \dots 23)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial 3} = \frac{\sin 4}{\sin^2 3} \left\{ \frac{\sin(1+2)}{\sin 1} (-\Delta_0 x_Q \sin 2 + \Delta_0 y_Q \cos 2) + \Delta y_P - b_2 \right\} \dots \dots 24)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial 4} = \frac{1}{\sin 3} \left\{ \frac{\sin(1+2) \cos 4}{\sin 1} [\Delta_0 x_Q \sin(2+3) - \Delta_0 y_Q \cos(2+3)] - (\Delta_0 y_P - b_2) \cos(3+4) \right\} \dots \dots \dots 25)$$

Dieses Formelsystem, das für das über den Festpunkt B sich erstreckende Viereck abgeleitet wurde, kann leicht für jeden anderen Festpunkt C, D, ... eingerichtet werden, wenn jeweilig

- statt 3 5 bzw. 7, und
- statt 4 6 bzw. 8, geschrieben wird.

Durch die Aufstellung, bzw. Berechnung der beiden linearen Fehlergleichungen für jeden Festpunkt — mit Ausnahme von A — ist die Aufgabe auf die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen mit Unbekannten zurückgeführt.

Der nunmehr einzuhaltende Rechnungsvorgang richtet sich nach der Zahl n der gegebenen und zur Festlegung der Neupunkte verwendeten Festpunkte. Die Anzahl m der gemessenen Winkel ist dann gleich 2n, jene der Bedingungs-gleichungen nach früherem

$$\sigma = 2(n - 1) \dots \dots \dots 26)$$

Die Zahl der Unbekannten ist in allen Fällen gleich vier.

Die Zurückführung auf bedingte Beobachtungen erfordert, wenn von dem Fall $n = 3$ zunächst abgesehen wird, die Elimination der vier Unbekannten. Es erübrigen dann jeweilig

$$\sigma - 4 = 2n - 6$$

Bedingungsgleichungen zwischen den λ allein. Deren Anzahlen sind für $n = 3$ bis $n = 8$ in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Nr.	n	$2n - 6$	Nr.	n	$2n - 6$
1	3	0	5	7	8
2	4	2	6	8	10
3	5	4	7	9	12
4	6	6	8	10	14

Geht man auf vermittelnde Beobachtungen zurück, so lassen sich von den $(m + 4)$ Unbekannten, deren σ durch die übrigen

$$m + 4 - \sigma = 6$$

Unbekannten ausdrücken. Während also hier die Anzahl der aufzulösenden Normalgleichungen konstant und gleich 6 ist, wächst sie bei Zurückführung auf bedingte Beobachtungen von Null für $n=3$ auf 2, für $n=4$ auf 4, für $n=5$ auf 5 und endlich für $n = 6$ auf 6. Für $n > 6$ ist daher die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen bequemer, dagegen ist für $n < 6$ jene nach bedingten vorzuziehen. In dem Falle $n = 3$ entfällt die Elimination der vier Unbekannten und sind die 4 Bedingungsgleichungen (mit $4 + 6 = 10$ Unbekannten) nach der Korrelatenmethode aufzulösen. Hier sowie in allen übrigen Fällen ist der grundsätzlichen Verschiedenheit der λ einerseits und der ξ und η andererseits durch die Wahl entsprechend höherer Gewichte für die gemessenen Winkel Rechnung zu tragen. Den Koordinatenunterschieden Δx_p und Δy_p sowie Δx_q und Δy_q wird das gleiche Gewicht Eins beigelegt. Die Gewichte der gemessenen Winkel verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der hierbei begangenen Messungsfehler. Faßt man den Gesamtfehler des gemessenen Winkels in für die Gewichtsabschätzung genügender Annäherung unter dem Höchststand des Zentrierungsfehlers, d. i. z. B. für den Winkel 1 nach Fig. 1, S. 226, unter

$$\frac{r_p + d}{r_p d}$$

zusammen, so ist das Gewicht dieses Winkels

$$g_1 = \frac{(r_p d)^2}{(r_p + d)^2} \dots \dots \dots 27)$$

Ist der numerische Wert des Koeffizienten des einen oder anderen λ wesentlich kleiner als der Durchschnittswert der übrigen dieser Koeffizienten, so ist die Gewichtszahl des betreffenden Winkels im selben Verhältnis herabzusetzen. (Schluß folgt).

ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN
DES
VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 12.

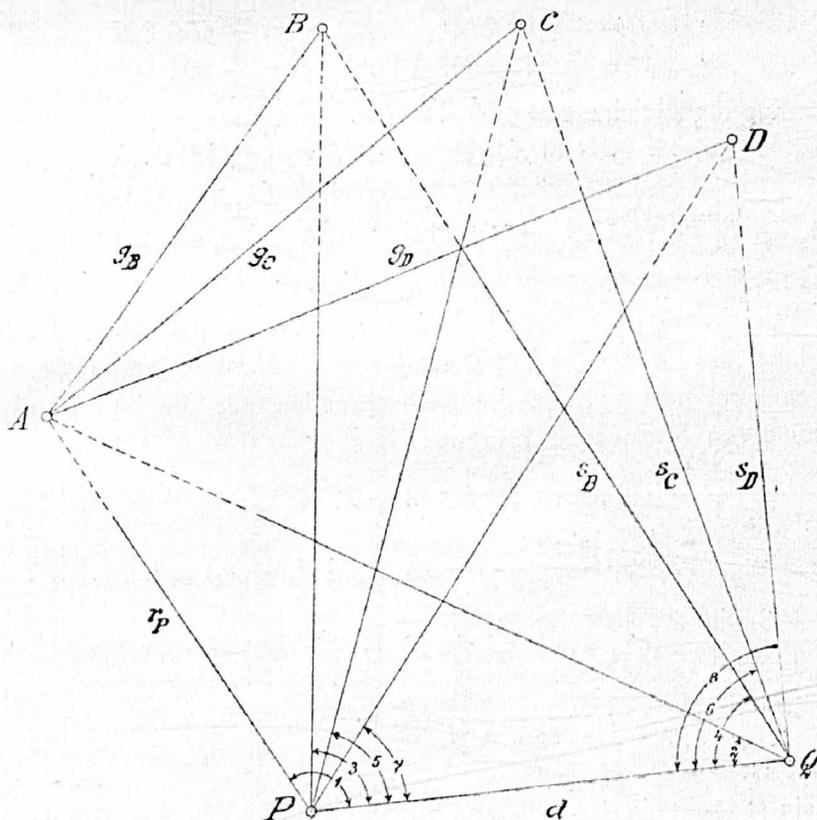
Wien, 1. Dezember 1914.

XII. Jahrgang.

Die Hansen'sche Aufgabe mit überschüssigen Beobachtungen.

Von Privatdozent Dr. A Haerpfer in Prag.

(Schluß)



Maßstab 1:10 000.

Fig. 2.

Beispiel.

Die Koordinaten der angezielten Festpunkte sind:

	<i>x</i>	<i>y</i>
<i>A</i>	0	0
<i>B</i>	− 312,936	− 451,806
<i>C</i>	− 549,963	− 461,060
<i>D</i>	− 806,125	− 327,518

Aus $n = 4$ folgt die Zahl der Bedingungsgleichungen $\sigma = 2(n - 1) = 6$.

In jedem der Neupunkte *P* und *Q* wurden zwei Sätze mit einem Mikroskoptheodolit gemessen. Im Mittel ergab sich

in <i>P</i> :				in <i>Q</i> :			
<i>A</i>	0°	0'	0,0"	<i>P</i>	0°	0'	0,0"
<i>B</i>	34	28	24,5	<i>A</i>	30	04	08,0
<i>C</i>	48	57	32,0	<i>B</i>	61	41	57,0
<i>D</i>	66	39	13,0	<i>C</i>	74	14	07,0
<i>Q</i>	119	11	29,0	<i>D</i>	89	09	29,5

Aus den Projektionen der Dreiecke *ACP* und *BCP* auf die *X*- und *Y*-Achse wurden die nachstehenden Näherungswerte für die unbekanntenen Koordinatenunterschiede gerechnet:

$$\begin{aligned} \Delta_0 x_P &= + 459,272 & \Delta_0 x_Q &= + 400,527 \\ \Delta_0 y_P &= - 322,488 & \Delta_0 y_Q &= - 892,100. \end{aligned}$$

I. Bedingungsgleichungen für *ABQP*:

$$\begin{aligned} \sphericalangle 1 &= 119^\circ 11' 29,0'' & \sphericalangle 3 &= 84^\circ 43' 04,5'' \\ \sphericalangle 2 &= 30 04 08,0 & \sphericalangle 4 &= 61 41 57,0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= x_B - x_A = - 451,806 & \Delta_0 x_P - b_1 &= + 911,078 \\ b_2 &= y_B - y_A = - 312,936 & \Delta_0 y_P - b_2 &= - 9,552. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Absolutglieder w_1 und w_2 (Gl. 10a, S. 228), sowie zur Vornahme der später zu erwähnenden Schlußproben empfiehlt es sich, die Gleichungen 11a) und 11b) in die nachstehenden, für die logarithmische Rechnung bequemerer Formen zu bringen:

$$\begin{aligned} & - \frac{\sin(1+2) \sin 4}{\sin 1 \sin 3} \{(\Delta_0 x_Q + \xi_2) \cos(2+3) + (\Delta_0 y_Q + \eta_2) \sin(2+3)\} - \\ & \quad - \frac{\sin(3+4)}{\sin 3} (\Delta_0 x_P + \xi_1 - b_1) = 0 \dots\dots\dots 28^*) \\ & \frac{\sin(1+2) \sin 4}{\sin 1 \sin 3} \{(\Delta_0 x_Q + \xi_2) \sin(2+3) - (\Delta_0 y_Q + \eta_2) \cos(2+3)\} - \\ & \quad - \frac{\sin(3+4)}{\sin 3} (\Delta_0 y_P + \eta_1 - b_2) = 0 \dots\dots\dots 29^*) \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} w_1 &= - \frac{\sin(1+2) \sin 4}{\sin 1 \sin 3} \{ \Delta_0 x_Q \cos(2+3) + \Delta_0 y_Q \sin(2+3) \} - \\ & \quad - \frac{\sin(3+4)}{\sin 3} (\Delta_0 x_P - b_1) \dots\dots\dots 30) \end{aligned}$$

*) Die Winkelverbesserungen λ sind wieder weggelassen!

$$w_2 = \frac{\sin(1+2) \sin 4}{\sin 1 \sin 3} \left\{ \Delta_2 x_Q \sin(2+3) - \Delta_0 y_Q \cos(2+3) \right\} - \frac{\sin(3+4)}{\sin 3} (\Delta_0 y_P - b_2) \dots 31).$$

Nach Einführung der Zahlenwerte erhält man:

$$w_1 = + 0,1324$$

$$w_2 = - 0,0669.$$

Hiezu wurden siebenstellige Logarithmentafeln verwendet.

Ebenso ergeben sich aus den Gleichungen 12), 13), 14), bzw. 19), 20), 21) Seite 229 mittels fünfstelliger Rechnung die Koeffizienten der ξ und η , und zwar ist

$$\frac{\partial F_1}{\partial(\Delta_0 x_P)} = - 0,555 \quad \frac{\partial F_2}{\partial(\Delta_0 y_P)} = - 0,555$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial(\Delta_0 x_Q)} = + 0,217 \quad \frac{\partial F_2}{\partial(\Delta_0 x_Q)} = + 0,470$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial(\Delta_0 y_Q)} = - 0,470 \quad \frac{\partial F_2}{\partial(\Delta_0 y_Q)} = + 0,217.$$

Ebenso folgen aus 15) bis 18) Seite 229 und aus 22) bis 25) die Koeffizienten der i . Es ist:

$$\frac{\partial F_1}{\partial 1} = - 568,441 \quad \frac{\partial F_2}{\partial 1} = + 6,030$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial 2} = - 856,631 \quad \frac{\partial F_2}{\partial 2} = - 497,202$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial 3} = + 756,862 \quad \frac{\partial F_2}{\partial 3} = - 514,229$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial 4} = + 1034,833 \quad \frac{\partial F_2}{\partial 4} = - 10,883$$

Die Zusammenstellung der beiden Bedingungsgleichungen selbst erfolgt am Schlusse dieser Berechnungen gemeinsam mit den übrigen Gleichungen.

II. Bei den Berechnungen für $ACQP$ ist darauf zu achten, daß statt 3 der Winkel 5 und statt 4 der Winkel 6 in die Formeln einzuführen ist:

$$\sphericalangle 5 = 70^\circ 13' 57'' \quad \sphericalangle 6 = 74^\circ 14' 07''$$

An die Stelle von b_1 und b_2 treten c_1 und c_2 :

$$c_1 = x_C - x_A = - 461,060 \quad \Delta_0 x_P - c_1 = + 920,332$$

$$c_2 = y_C - y_A = - 549,963 \quad \Delta_0 y_P - c_2 = + 227,475$$

Dann erhält man aus den Gleichungen 28) und 29), Seite 229:

$$w_3 = + 0,0822 \quad w_4 = - 0,0427$$

und aus 12) bis 14), bzw. 19) bis 21), Seite 229:

$$\frac{\partial F_3}{\partial(\Delta x_P)} = - 0,617 \quad \frac{\partial F_4}{\partial(\Delta_0 y_P)} = - 0,617$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial(\Delta_0 x_Q)} = - 0,107 \quad \frac{\partial F_4}{\partial(\Delta_0 x_Q)} = 0,589$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial(\Delta_0 y_Q)} = - 0,589 \quad \frac{\partial F_4}{\partial(\Delta_0 y_Q)} = 0,107$$

Die Koeffizienten von λ_1 , λ_2 , λ_5 und λ_6 folgen aus 15) bis 18), bzw. 22) bis 25), Seite 229):

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial F_3}{\partial 1} = -638,358 & \frac{\partial F_4}{\partial 1} = -157,715 \\ \frac{\partial F_3}{\partial 2} = -815,401 & \frac{\partial F_4}{\partial 2} = -804,573 \\ \frac{\partial F_3}{\partial 5} = +936,247 & \frac{\partial F_4}{\partial 5} = -371,704 \\ \frac{\partial F_3}{\partial 6} = +956,322 & \frac{\partial F_4}{\partial 6} = +236,355. \end{array}$$

III. Für $ADQP$ endlich ist in den Formeln 3 durch 7 und 4 durch 8 zu ersetzen:

$$\angle 7 = 52^\circ 32' 16'' \quad \angle 8 = 89^\circ 09' 29.5'',$$

ferner b_1 und b_2 durch d_1 und d_2 :

$$\begin{array}{ll} d_1 = x_D - x_A = -327,518 & \Delta_0 x_P - d_1 = +786,790 \\ d_2 = y_D - y_A = -806,125 & \Delta_0 y_P - d_2 = +483,637. \end{array}$$

Aus den Gleichungen 28) und 29), Seite 229, folgen wieder:

$$w_5 = +0,0913 \quad w_6 = -0,0450.$$

Die Koeffizienten der ξ und η sind:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial F_5}{\partial (\Delta_0 x_P)} = -0,781 & \frac{\partial F_6}{\partial (\Delta_0 y_P)} = -0,781 \\ \frac{\partial F_5}{\partial (\Delta_0 x_Q)} = -0,095 & \frac{\partial F_6}{\partial (\Delta_0 x_Q)} = +0,731 \\ \frac{\partial F_5}{\partial (\Delta_0 y_Q)} = -0,731 & \frac{\partial F_6}{\partial (\Delta_0 y_Q)} = -0,095. \end{array}$$

Und jene von λ_1 , λ_2 , λ_7 und λ_8 :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial F_5}{\partial 1} = -689,993 & \frac{\partial F_6}{\partial 1} = -424,022 \\ \frac{\partial F_5}{\partial 2} = -655,671 & \frac{\partial F_6}{\partial 2} = -1249,490 \\ \frac{\partial F_5}{\partial 7} = +1155,409 & \frac{\partial F_6}{\partial 7} = -136,319 \\ \frac{\partial F_5}{\partial 8} = +786,876 & \frac{\partial F_6}{\partial 8} = +483,688. \end{array}$$

Die sechs Bedingungsgleichungen lauten jetzt:

$$\begin{array}{l} -0,555 \xi_1 \quad +0,217 \xi_2 \quad -0,470 \gamma_2 \quad -568,441 \lambda_1 \quad -856,631 \lambda_2 \quad +756,862 \lambda_3 \\ -0,555 \gamma_1 \quad +0,470 \xi_2 \quad +0,217 \gamma_2 \quad +6,030 \lambda_1 \quad -497,202 \lambda_2 \quad -514,229 \lambda_3 \\ -0,617 \xi_1 \quad +0,107 \xi_2 \quad -0,589 \gamma_2 \quad -638,358 \lambda_1 \quad -815,401 \lambda_2 \\ -0,617 \gamma_1 \quad +0,589 \xi_2 \quad +0,107 \gamma_2 \quad -157,715 \lambda_1 \quad -804,573 \lambda_2 \\ -0,781 \xi_1 \quad -0,095 \xi_2 \quad -0,731 \gamma_2 \quad -689,993 \lambda_1 \quad -655,671 \lambda_2 \\ -0,781 \gamma_1 \quad +0,731 \xi_2 \quad -0,095 \gamma_2 \quad -424,022 \lambda_1 \quad -1249,490 \lambda_2 \\ \hline -1,953 \xi_1 \quad -1,953 \gamma_1 \quad +2,019 \xi_2 \quad -1,561 \gamma_2 \quad -2472,499 \lambda_1 \quad -4878,968 \lambda_2 \quad +242,633 \lambda_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 +1034,833 \lambda_4 & & +0,1314 = 0 \dots 32) \\
 -10,883 \lambda_4 & & -0,0669 = 0 \dots 33) \\
 +936,247 \lambda_5 + 956,322 \lambda_6 & & +0,0822 = 0 \dots 34) \\
 -371,704 \lambda_5 + 236,355 \lambda_6 & & -0,0427 = 0 \dots 35) \\
 & +1155,409 \lambda_7 + 786,876 \lambda_8 & +0,0913 = 0 \dots 36) \\
 & -136,319 \lambda_7 + 483,688 \lambda_8 & -0,0450 = 0 \dots 37) \\
 \hline
 +1023,950 \lambda_4 + 564,543 \lambda_5 + 1192,677 \lambda_6 + 1019,090 \lambda_7 + 1270,564 \lambda_8 + 0,1513 = 0 \dots 38)
 \end{array}$$

Wird hier z. B. aus der ersten und fünften dieser Gleichungen das ξ_1 , aus der zweiten und sechsten das η_1 eliminiert, so entstehen zwei neue Gleichungen, die nur noch ξ_2 und η_2 enthalten. Nach Elimination von η_2 ist

$$\xi_2 = -449,888 \lambda_1 + 1565,995 \lambda_2 - 2889,578 \lambda_3 - 3533,789 \lambda_4 + 2859,907 \lambda_7 - 1700,617 \lambda_8 - 0,2509 \dots \text{a)}$$

Dann erhält man weiter:

$$\eta_2 = -1001,944 \lambda_1 - 1100,094 \lambda_2 + 1297,379 \lambda_3 - 585,442 \lambda_4 + 163,928 \lambda_7 + 1509,479 \lambda_8 + 0,0779 \dots \text{b)}$$

Ferner ist aus den ersten der ursprünglichen Bedingungsgleichungen 32):

$$\xi_1 = +0,177 \lambda_1 + 0,421 \lambda_2 - 863,986 \lambda_3 + 977,783 \lambda_4 + 978,495 \lambda_7 - 612,819 \lambda_8 + 0,0745 \dots \text{c)}$$

und ebenso aus Gleichung 37):

$$\eta_1 = -0,141 \lambda_1 + 0,355 \lambda_2 - 2864,070 \lambda_3 - 3238,632 \lambda_4 + 2484,127 \lambda_7 + 2028,768 \lambda_8 - 0,3021 \dots \text{d)}$$

Werden diese Werte in die dritte und vierte Bedingungsgleichung 34) und 35) eingeführt, so ergeben sich zwei Gleichungen, die nur noch die Winkelverbesserungen λ enthalten:

$$-0,0391 \lambda_1 + 0,1223 \lambda_2 - 540,248 \lambda_3 - 637,366 \lambda_4 + 936,247 \lambda_5 + 956,322 \lambda_6 - 394,494 \lambda_7 - 328,682 \lambda_8 - 0,03658 = 0 \dots 39)$$

$$-0,0816 \lambda_1 - 0,0850 \lambda_2 + 205,262 \lambda_3 - 144,601 \lambda_4 - 371,704 \lambda_5 + 236,355 \lambda_6 + 168,380 \lambda_7 - 89,266 \lambda_8 + 0,00438 = 0 \dots 40)$$

Vor Inangriffnahme der Ausgleichung sind noch die den gemessenen Winkeln 1 bis 8 zukommenden Gewichtszahlen abzuschätzen. Für deren Berechnung nach der Formel 27), Seite 229, werden vorerst einer Triangulierungskarte etwa im Maßstab 1 : 10.000 die beiläufigen Werte der Entfernungen der Neupunkte P und Q (von den gegebenen Festpunkten und von einander — auf Zehner von m abgerundet — entnommen:*)

Strecke	Länge in m	Strecke	Länge in m
r_r	560	AQ	980
BP	910	s_p	1030
CP	950	s_c	930
DP	920	s_d	730
d	570		

*) Vergleiche hierzu Fig. 2, Seite 241.

Wird das Gewicht des Winkels 1 mit g_1 , jenes von 2 mit g_2 , usw. bezeichnet, so liefert die Formel 27) die nachstehenden, stark abgerundeten Werte:

$$\begin{array}{ll} g_1 = 80.000 & g_5 = 127.000 \\ g_2 = 130.000 & g_6 = 125.000 \\ g_3 = 123.000 & g_7 = 124.000 \\ g_4 = 134.800 & g_8 = 102.200. \end{array}$$

Nun sind aber die Koeffizienten der Verbesserungen λ_1 und λ_2 in den Gleichungen 39) und 40) erheblich kleiner als jene der übrigen λ . Während der beiläufige Durchschnittswert der letzten 400 beträgt, ist im Mittel der Koeffizient von λ_1 gleich 0,06, jener von λ_2 gleich 0,10 (bei Außerachtlassung der Vorzeichen).

Die oben berechnete Gewichtszahl g_1 von λ_1 ist demnach

$$\frac{4 \cdot 0 \cdot 0}{0 \cdot 0 \cdot 0} = 7000 \text{ mal,}$$

jene von λ_2

$$\frac{4 \cdot 0 \cdot 0}{0 \cdot 1 \cdot 0} = 4000 \text{ mal}$$

kleiner zu nehmen.

Damit erhalten wir endlich nach weiterer zweckmäßiger Abrundung:

$$\begin{array}{ll} g'_1 = 10 & g'_2 = 30 \\ g'_3 = g'_4 = g'_5 = g'_6 = g'_7 = g'_8 = 100.000. \end{array}$$

Die folgende Tabelle enthält die Berechnung der Koeffizienten der Normalgleichungen (mit Summenproben):

	a	b	s	g	$\frac{1}{g}$	$\frac{aa}{g}$	$\frac{ab}{g}$	$\frac{bb}{g}$	$\frac{as}{g}$	$\frac{bs}{g}$
λ_1	- 0·039 ₁	- 0·081 ₆	- 0·120 ₇	10	19 ⁻¹	0·000153	+0·000319	0·000666	0·000472	+0·000985
λ_2	+ 0·122 ₃	- 0·085	+ 0·037 ₄	30	0·0333	0·000499	-0·000346	0·000241	0·000152	-0·000106
λ_3	-540·248	+205·262	- 334·986	10 ⁵	10 ⁻⁵	2·918679	-1·108924	0·421325	1·809755	-0·687599
λ_4	-637·366	-144·601	- 781·967	10 ⁵	10 ⁻⁵	4·062354	+0·921638	0·209094	4·983992	+1·130732
λ_5	+936·247	-371·704	+ 564·543	10 ⁵	10 ⁻⁵	8·765584	-3·480068	1·381639	5·285517	-2·098429
λ_6	+956·322	+236·355	+1192·677	10 ⁵	10 ⁻⁵	9·145518	+2·260315	0·558637	11·405833	+2·818952
λ_7	-394·494	+168·380	- 226·114	10 ⁵	10 ⁻⁵	1·556255	-0·664249	0·283518	0·892006	-0·380731
λ_8	-328·682	- 89·266	- 417·948	10 ⁵	10 ⁻⁵	1·080319	+0·293401	0·079684	1·373720	+0·373085
	- 8·137 ₈	+ 4·259 ₄	- 3·878 ₄			27·529361	-1·777914	2·934804	+25·751447	+1·156889

Die Normalgleichungen sind:

$$\begin{array}{l} + 27,52936 k_1 - 1,77791 k_2 - 0,03658 = 0 \\ - 1,77791 k_1 + 2,93480 k_2 + 0,00418 = 0 \\ + 25,75145 k_1 + 1,15689 k_2 - 0,03220 = 0. \end{array}$$

Daraus folgt die reduzierte Normalgleichung:

$$+ 2,81998 k_2 + 0,00202 = 0.$$

Für die Korrelaten wird erhalten:

$$\begin{array}{l} k_1 = + 0,0012825 \\ k_2 = - 0,0007163. \end{array}$$

In der folgenden Tabelle sind die Winkelverbesserungen nach

$$\lambda_i = \frac{1}{g_i} (a_i k_1 + b_i k_2)$$

im Bogenmaß berechnet und durch Multiplikation mit g'' im Winkelmaß ausgedrückt.

	$a_i k_1$	$b_i k_2$	$\hat{\lambda}$ in m	λ''	$\lambda \lambda g$
			$10^{-9} \times$		$10^{-10} \times$
λ_1	-0,000050	+0,000058	+ 800	+ 0,165	0
λ_2	+0,000157	+0,000061	+ 7270	+ 1,499	16
λ_3	-0,692868	- 0,147033	- 8399	- 1,732	70543
λ_4	-0,817422	+0,103580	- 7138	- 1,472	50951
λ_5	+1,200737	+0,266258	+ 14670	+ 3,026	215209
λ_6	+1,226483	- 0,169305	+ 10572	+ 2,181	111767
λ_7	-0,505939	- 0,120613	- 6266	- 1,292	39263
λ_8	-0,421535	+0,063943	- 3576	- 0,738	12788
					500537

Zur Erprobung der λ ist

$$[\lambda \lambda g] = 500537 \times 10^{-10}$$

bestimmt, das mit

$$- [av k] = 500513 \times 10^{-10}$$

gut übereinstimmt. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{50054 \times 10^{-10}}{2}} = \pm 0,005.$$

Werden die linearen Werte der λ in die Gleichungen a), b), c) und d), Seite 245, eingeführt, so werden die Verbesserungen für die Koordinatenunterschiede erhalten:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= + 0,0709 \text{ m} & \xi_2 &= - 0,2137 \text{ m} \\ \eta_1 &= - 0,2777 \text{ m} & \eta_2 &= + 0,0560 \text{ m}. \end{aligned}$$

Die gemeinsame Erprobung dieser Verbesserungen und der Verbesserungen λ erfolgt durch deren Einführung in die summarische Bedingungsgleichung 38), S. 245, wodurch

$$- 0,1518$$

erhalten wird, das mit dem Absolutglied dieser Gleichung

$$+ 0,1513$$

eine genügende Übereinstimmung ergibt.

Werden endlich mit den ausgeglichenen Werten der Koordinatenunterschiede

$$\begin{aligned} \Delta x_p &= + 459,343 \text{ m} & \Delta x_q &= + 400,313 \text{ m} \\ \Delta y_p &= - 322,766 & \Delta y_q &= - 892,044 \end{aligned}$$

und der gemessenen Winkel:

$$\begin{aligned} < 1 &= 119^\circ 11' 29.17'' & < 5 &= 70^\circ 14' 00.03'' \\ < 2 &= 30 04 09.50 & < 6 &= 74 14 09.18 \\ < 3 &= 84 43 02.77 & < 7 &= 52 32 14.71 \\ < 4 &= 61 41 55.53 & < 8 &= 89 09 28.76 \end{aligned}$$

die Bedingungsgleichungen 28) und 29) noch einmal für die drei Relationen berechnet, so ergibt diese durchgreifende Probe die nachstehenden geringfügigen, lediglich auf die unvermeidlichen Abrundungen zurückzuführenden Schlußfehler:

$$\begin{array}{lll} f_1 = + 0,0008 \text{ m} & f_3 = - 0,0050 \text{ m} & f_5 = - 0,0003 \text{ m} \\ f_2 = - 0,0014 \text{ m} & f_4 = - 0,0025 \text{ m} & f_6 = - 0,0002 \text{ m}. \end{array}$$

Untersuchungen über die Genauigkeit des Zielens mit Fernröhren.

Von Alfred Noetzli, Dipl. Ing. aus Höngg (Zürich).

(Fortsetzung.)

7. Bewegungen der Instrumente:

Eine wesentliche Beeinflussung der erreichten Zielgenauigkeit könnte herbeigeführt worden sein durch un stabile Aufstellung der verwendeten Instrumente. Da bei meinen Versuchen drei verschiedene Instrumente: Fernrohr, Spiegel und Verschiebeapparat zur Verwendung kamen, will ich diesen Punkt einer näheren Prüfung unterwerfen. Wie bei den Versuchen selbst mitgeteilt, befanden sich die verwendeten Fernröhren (mit Ausnahme von Fernrohr $V=1$) jeweilen auf den zugehörigen Theodolit-Untergestellen, die ihrerseits auf einem isolierten Pfeiler ruhten. Während der ganzen Beobachtungsreihe wurde das Fernrohr nie berührt, so daß jede Beeinflussung von dieser Seite ausgeschlossen ist. Auf demselben Pfeiler, aber völlig unabhängig vom Theodolit, befand sich der Verschiebeapparat, bei dem aber wegen der sehr leicht laufenden Mikrometerschraube jede schädliche Erschütterung vermieden werden konnte. Der Spiegel endlich war in einem Metallgehäuse gefaßt und ruhte während der Versuche das ein mal auf einem soliden harthölzernen Untergestell, das ander mal auf einem zweiten isolierten Pfeiler. Die systematischen Verfälschungen von dieser Seite sind also jedenfalls auch nur von sehr geringer Größe.

8. Bewegungen der Luft:

Diese spielen bekanntlich bei Messungen mit Zielfernröhren eine große Rolle, sei es, daß solche Luftbewegungen das Fernrohrbild rasch oszillieren lassen, sei es, daß vorbeistreichende Luftschichten verschiedener Dichte mehr oder weniger unregelmäßige Schwankungen herbeiführen; in den meisten Fällen werden aber diese Bewegungen kombiniert auftreten. Solche Einflüsse suchte ich dadurch möglichst zu verhindern, daß ich meine Versuche in sorgfältig temperiertem, nach außen ganz abgeschlossenem Raume vornahm. Trotzdem beobachtete ich hie und da ganz leichte Schwankungen, deren Ursache ich mir nicht recht erklären konnte. Obschon bei sichtbar unruhiger Luft keine Beobachtungen ausgeführt wurden, liegt doch die Vermutung nahe, daß solche dem direkten Empfinden verborgenen Luftschwankungen trotzdem haben vorhanden sein können.

Geben wir uns nun Rechenschaft darüber, in welchem Grade jeder einzelne dieser Umstände den Wert des Zielfehlers bei den verschiedenen Vergrößerungen beeinflussen konnte.