Verlauf der geodätischen Linie auf dem Erdsphäroid

Johannes Frischauf [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **12** (6), S. 97–102

1914


```
@ARTICLE{Frischauf_VGI_191409,
Title = {Verlauf der geod{\"a}tischen Linie auf dem Erdsph{\"a}roid},
Author = {Frischauf, Johannes},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {97--102},
Number = {6},
Year = {1914},
Volume = {12}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN
DES
VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 6. **Wien, 1. Juni 1914.** XII. Jahrgang.

Verlauf der geodätischen Linie auf dem Erdsphäroid.

Von **Johannes Frischauf** in Graz.

1. Zwei Arten von Operationen kommen bei der Vermessung der Erde zur Anwendung: astronomische und trigonometrische, für letztere wurde dann die Bezeichnung «geodätische» gewählt. Clairaut war wohl der erste Autor, der für Flächenkurven das Analogon der Geraden in der Ebene aufstellte*) und für diese Linie die Eigenschaft der Kürzesten nachwies. Der daraus gefolgerte «Clairaut'sche Satz» war wohl Veranlassung der Verwendung der Bezeichnung kürzeste Linien auf krummen Flächen, für welche aber, zunächst für das Sphäroid, dann für Flächen zweiter Ordnung, zuletzt für alle Flächen die Bezeichnung geodätische gewählt wurde.

Eine geodätische Linie auf einer krummen Fläche ist durch ihr Anfangselement in dem ganzen Verlaufe bestimmt; zwischen ihr und der kürzesten Verbindung zweier Punkte wurde nicht unterschieden, was in der Praxis deshalb gestattet war, da man nur solche Stücke in Betracht zog, die man gegen den Meridianquadranten als klein der ersten Ordnung voraussetzen konnte. Allein bei unbegrenzter Fortsetzung der geodätischen Linie auf einer endlichen geschlossenen Fläche oder auf einer unendlichen Fläche kann, wie zuerst C. G. J. Jacobi hingewiesen hat, die geodätische Linie zwischen zwei Punkten aufhören, die kürzeste Verbindung dieser Punkte zu sein.

Es sei gestattet, den von Jacobi in seinen «Vorlesungen über Dynamik»**) gegebenen Ausspruch hier anzuführen: «Wenn man von einem Punkte einer Oberfläche nach allen Richtungen kürzeste Linien zieht, so können zwei Fälle eintreten: zwei unendlich nahe kürzeste Linien laufen entweder fortwährend nebeneinander, ohne sich zu schneiden, oder sie schneiden sich wiederum, und alsdann bildet die Kontinuität aller Durchschnittspunkte ihre einhüllende Kurve.

*) In der Einleitung zu seinem Lehrsatze als jene Kurve, deren Schmiegungsebenen die zugehörigen Flächennormalen enthalten.

**) Herausgegeben von Clebsch (Berlin 1866).

Im ersten Falle hören die kürzesten Linien nie auf, kürzeste zu sein, im zweiten sind sie es nur bis zum Berührungspunkte mit der einhüllenden Kurve. . . . . . Ein Beispiel der zweiten Art gibt das Revolutionsellipsoid.»

2. Der Verlauf der geodätischen Linie auf dem Sphäroid wird am leichtesten aus der Zurückübertragung ihres Bildes auf der Hilfskugel (vom Halbmesser $b = 1$) nach der Du Séjour-Clairaut'schen Abbildung erhalten*). Beginnt man die geodätische Linie in einem Punkte des Äquators und läßt dieselbe unbegrenzt fortsetzen, so ist ihr Bild eine fortgesetzte Wiederholung eines Großkreises, den der Äquator unter dem Winkel $90^0 - \mathfrak{a}$ schneidet, wo $\mathfrak{a}$ das Azimut der Geodätischen am Ausgange ist. Dabei kann man immer die Voraussetzung machen, daß $\mathfrak{a}$ ein spitzer Winkel und der Verlauf am Beginne nordöstlich ist. Dabei ist

$$\sin \mathfrak{a} = \sin \alpha_0 \cos u_0 = \sin \alpha \cos u = \sin m,$$

wo m die kleinste Poldistanz der Bildkurve bedeutet.

Den kongruenten Bildteilen von $\sigma = \pi$ bis $\sigma = 2\pi$ entsprechen kongruente Urbilder der Geodätischen; jeder dieser Teile besteht aus zwei symmetrischen, die Länge $\frac{1}{4} S$ eines solchen (für $\sigma = \frac{1}{2}\pi$) ist

$$S = \frac{2\pi b}{1 - 2} B_0,$$

der zugehörige Wert von w (für $\sigma = \frac{1}{2}\pi$, $\omega = \frac{1}{2}\pi$)

$$w = \tfrac{1}{2}\pi \, (1 - 2p \sin m \, B'_0).$$

Für $m = 0$ ist ε und B_0 am größten, der zugehörige Wert von S ist gleich dem Umfange der Meridian-Ellipse; gleiches gilt auch für den Wert $w = \frac{1}{2}\pi$.

Für $m = 90^0$ ist $\varepsilon = 0$, $B_0 = 1$, $\varepsilon' = 0$, $B'_0 = \frac{1}{2}$,

$$S = 2\pi b, \qquad w = \tfrac{1}{2}\pi \, (1 - p) = \tfrac{1}{2}\pi \frac{b}{a}.$$

Einschließlich der Glieder mit e^4 ist

$$S = 2\pi b \, (1 + \varepsilon + \tfrac{5}{4}\varepsilon^2)$$

und der zugehörige Wert von w (für $\omega = 2\pi$)

$$w = 2\pi \, (1 - p \sin m \, [1 - \tfrac{2}{3}\varepsilon']).$$

Schneidet die geodätische Linie den Äquator in den Punkten A und A', so ist die Länge des Äquatorbogens

$$AA' = a\pi \, (1 - p \sin m \, [1 - \tfrac{2}{3}\varepsilon']),$$

die Länge der Geodätischen $\frac{1}{2} S$.

Für den Vergleich dieser zwei Größen sollen die Näherungswerte von ε und ε' entwickelt werden.

Aus

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{1}{2} x}{1 - \tan \frac{1}{2} x^2}$$

folgt

$$\tan \tfrac{1}{2} x = \cot x \, (\sqrt{1 + \tan x^2} - 1)$$
$$= \tfrac{1}{2} \tan x - \tfrac{1}{8} \tan x^3 - \ldots;$$

*) Die Zitate beziehen sich auf das Lehrbuch des Verfassers «Die mathematischen Grundlagen der Landesaufnahme und Kartographie des Erdsphäroids» 1913.

damit wird,

$$\frac{e^2}{1-e^2} = \delta, \quad \frac{\frac{3}{4}e^2}{1-\frac{3}{4}e^2} = \delta'$$

gesetzt, mit Fehler e^6

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}\delta \cos m^2 - \tfrac{1}{8}\delta^2 \cos m^4$$
$$\varepsilon' = \tfrac{1}{4}\delta' \cos m^2 - \tfrac{1}{8}\delta'^2 \cos m^4.$$

Der kleinsten Poldistanz m entspricht im Urbilde (geodätische Linie) die größte Breite φ_0, vernachlässigt man im Verhältnisse $aw : S$ die Glieder mit e^4, so erhält man den einfachen Ausdruck

$$\frac{(1-\frac{1}{2}e^2 \cos \varphi_0)(1-\frac{1}{4}e^2 \sin \varphi_0^2)}{1-\frac{1}{2}e^2}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}e^2(1-\cos\varphi_0) - \tfrac{1}{4}e^2 \sin\varphi_0^2$$
$$= 1 + e^2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi_0^4.$$

Der größte Wert dieses Verhältnisses wird für $\varphi_0 = 90^0$ erhalten, der genaue Wert ist gleich dem Verhältnisse des Äquators zur Meridianellipse. Der kleinste Wert wird für $\varphi_0 = 0$ erhalten, dieser ist $= 1$. Für diesen Wert ist der Äquatorbogen $AA' = b\pi$ und der Punkt A' ist ein Punkt der einhüllenden Kurve für den Anfangspunkt A. Für zwei Punkte A und A' des Äquators, für welche $AA' < b\pi$ ist, ist nur eine geodätische Linie möglich. In den übrigen Fällen sind durch die Punkte A und A' zwei geodätische Linien möglich, von denen die eine im Äquator verläuft, die andere durch den Scheitel φ_0 geht, wobei also die Länge AA' im Äquator zwischen $b\pi$ und $a\pi$ vorausgesetzt wird. Für diese Annahme erhält man aus der Gleichung

$$AA' = a\pi(1-2p \sin m B_0')$$

den Wert m und damit den zugehörigen Wert φ_0.

3. Nimmt man als Anfang der geodätischen Linie ihren höchsten Punkt, dessen reduzierte Poldistanz m ist, so muß für die geodätische Linie, wenn sie zu ihrem Anfangs-Meridian wieder zurückkommt, σ größer als 2π, also

$$\sigma = 2\pi + x, \quad \omega = 2\pi + l, \quad w = 2\pi$$

vorausgesetzt werden. Ist u die reduzierte Breite bei dieser Rückkehr, so ist

$$\sin u = \cos x \cos m, \quad \tan x = \tan l \sin m,$$

wobei die Größen x und l von der Ordnung e^2 sind. Mit Fehler e^6 ist daher

$$x = l \sin m.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung III des Art. 16, so erhält man (bei gleichem Grade der Genauigkeit) wegen

$$M = 90^0,$$
$$0 = l - 2\pi p \sin m(1-\tfrac{2}{3}\varepsilon') - px \sin m,$$

daraus

$$x = 2\pi p \sin m^2 (1-\tfrac{2}{3}\varepsilon' + p \sin m^2)$$
$$x = 2\pi p \sin m^2 (1-\tfrac{1}{4}p \cos m^2 + p \sin m^2).$$

Damit erhält man als zugehörigen Wert von s (bei gleicher Genauigkeit) aus II des Art. 15

$$\frac{s}{b} = \frac{1}{1-\varepsilon}([1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2][2\pi + x] + \varepsilon x) = 2\pi(1 + \varepsilon + \tfrac{5}{4}\varepsilon^2) + x(1 + 2\varepsilon);$$

der in Nr. 2 mitgeteilte Ausdruck S erhält daher den Zuwachs $bx(1 + 2\varepsilon)$.

Setzt man für x den obigen Wert und ersetzt die reduzierte Breite $90^0 - m$ durch die zugehörige geographische φ_0, so erhält man mit Fehler e^6, dabei φ statt φ_0 gesetzt,

$$\frac{s}{2\pi b} = 1 + \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}e^2 \sin\varphi^2 + e^4(\tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{16}\sin\varphi^2 - \tfrac{15}{64}\sin\varphi^4).$$

4. Der Umfang v des ersten Vertikals der Breite φ wird erhalten nach Art. 5 und Art. 8. Es ist

$$\frac{A-B}{A+B} = \tfrac{1}{4}e^2\sin\varphi^2(1 + e^2 - \tfrac{1}{2}e^2\sin\varphi^2),$$

$$A = b(1 - e^2\sin\varphi^2)^{-1/2}(1 - e^2\cos\varphi^2)^{-1/2}$$

$$= b(1 + \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4 - \tfrac{1}{2}e^2\sin\varphi^2\cos\varphi^2);$$

damit wird

$$\frac{v}{2\pi b} = 1 + \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}e^2\sin\varphi^2 + e^4(\tfrac{3}{8} - \tfrac{7}{8}\sin\varphi^2 + \tfrac{45}{64}\sin\varphi^4),$$

also

$$\frac{s-v}{2\pi b} = \tfrac{15}{64}e^4\sin 2\varphi^2.$$

Für $\varphi = 45^0$ wird der Unterschied $s - v$ am größten $= 418\ m$.

5. Ist u_0 die reduzierte Breite der Geodätischen beim Ausgang, u jene nach der Rückkehr zum Ausgangs-Meridian, so erhält man aus

$$\sin u = \sin u_0 \cos x,$$

wenn für x die erste Näherung genommen wird,

$$u - u_0 = \varsigma,\quad \varsigma = -\pi^2 p^2 \cos u_0^2 \sin 2u_0,$$

wo statt u_0 auch der Wert φ gesetzt werden darf. Für $\varphi = 30^0$ ist dieser Unterschied ein größter $= -15''$.

Bei n Umläufen der Geodätischen ist,

$$\sigma = 2n\pi + x,\quad \omega = 2n\pi + l,\quad w = 2n\pi$$

gesetzt, in erster Näherung

$$x = 2n\pi p\cos u_0^2,$$

d. h. statt π ist in der Schlußformel $n\pi$ zu setzen. Nur darf bei dieser Bestimmung n nicht groß gewählt werden; es muß np noch immer eine kleine Größe sein, so daß man in der Gleichung

$$\tan x = \cos u_0 \tan l$$

x und l statt $\tan x$ und $\tan l$ setzen darf. Bei beliebig großem n können x und l jede beliebige Größe erreichen.

* * *

6. Zur Benennung «geodätische Linie» trug wohl am meisten die seit Clairaut vertretene Ansicht bei, daß die Messung der Entfernung zweier

Punkte auf dem Erdsphäroid in der oben definierten Linie vorgenommen wird*), von welcher man dann nachweisen kann, daß sie auch die kürzeste Linie ist. Daß aber die geodätischen Messungen nicht nach den geodätischen Linien, sondern in den Vertikalschnitten vorgenommen werden, hat zuerst Soldner 1810 betont und dazu bemerkt: «Es ist zwar nicht wahrscheinlich, daß der Unterschied, welcher von der doppelten Krümmung herrührt, praktisch merklich sein wird.»**)

7. Du Séjour-Cairaut'sche Abbildung des Sphäroids auf der Kugel. Für die Abbildung des Punktes (φ, w) des Sphäroids durch den Punkt (u, ω) auf der Kugel vom Halbmesser b werden folgende Bedingungen gestellt†):

I. u ist durch φ bestimmt nach

$$\tan u = \frac{b}{a} \tan \varphi,$$

d. h. φ wird durch die reduzierte Breite u bestimmt (und umgekehrt). Daraus folgt: Parallelkreisen auf dem Sphäroid entsprechen Parallelkreise auf der Kugel (oder umgekehrt).

II. Stellt man zur Bestimmung von ω (durch φ und w) die Bedingung: Die Abbildung ist konform, so müssen (wegen I) auch den Meridianen auf dem Sphäroid Kugel-Meridiane entsprechen; d. h. ω muß eine Funktion vou w allein sein. Für die Vergrößerungszahlen würde man erhalten:

$$\text{im Meridian } \frac{b\,du}{R\,.\,d\varphi} = \left(\frac{1-e^2}{1-e^2\cos u^2}\right)^{1/2} = (1-e^2\sin\varphi^2)^{1/2},$$

$$\text{im Parallel } \frac{b\cos u\,d\omega}{N\cos\varphi\,dw} = (1-e^2)^{1/2}\frac{d\omega}{dw};$$

bei der Forderung nach Konformität also

$$(1-e^2)^{1/2}\frac{d\omega}{dw} = (1-e^2\sin\varphi^2)^{1/2}$$

gleich einer Funktion von w allein. Diese Bedingung kann aber nicht für beliebige zusammengehörige Linienelemente erfüllt werden, wohl aber bei Beschränkung auf solche, welche Parallelkreisen oder kürzesten Linien angehören. Dies ist aus den Gleichungen des Art. 14 ersichtlich, wo der Urbildpunkt (u, ω) auf der Kugel durch (φ, w) auf dem Sphäroid abgebildet erscheint.

---

*) So auch Dr. J. C. Eduard Schmidt «Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie» (Göttingen 1829), Band I, S. 252, und Johann August Grunert «Elemente der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie» (Leipzig 1837), Vorrede S. VII. In C. A. H. Bach-oven von Echt «Die Kürzeste auf dem Erdsphäroid nebst den Hauptaufgaben der Geodäsie» (Loesfeld 1865) wird die Trasse der geodätischen Linie in derselben Art wie die des Normalschnittes ermittelt.

**) Die Bestimmung dieses Unterschiedes ist im Hefte Nr. 177 von Ostwalds Klassiker (Seite 104 bis 106) mitgeteilt.

†) Die Bedingungen für eine Aufgabe dürfen weder zu wenig noch zu viel sein, d. h. sie müssen vollständig und verträglich sein. Sind sie unvollständig, so ist die Lösung unbestimmt: sind sie unverträglich, so existiert keine Lösung.

8. Soldner hat in seiner Abhandlung 1810 den Breitenunterschied der geodätischen Linie bei einem vollen Umlauf oder bei mehreren Umläufen bestimmt. Seine Berechnung («Ostwald's Klassiker» Nr. 184, S. 41 und 42) ist aber aus folgenden Gründen nicht richtig: Er benützt dazu die Gleichung 14) (S. 44), die aus 13) unter der Voraussetzung, daß die Seite sb eine kleine Größe erster Ordnung ist, erhalten wird; dann setzt er die Länge der Kürzesten bei dem einmaligen Umlauf mit ungenügender Genauigkeit $2\pi b$ an.

Die von ihm gegebenen allgemeinen Formeln genügen aber für die obige Bestimmung. Die Gleichung 12) (S. 33) geht für $\alpha = 90^0$ über in

$$12') \quad w = \arctan \frac{\tan \psi}{\cos \lambda'} - \varepsilon \cos \lambda' \psi$$

$$\text{oder} \quad \tan (w + \varepsilon \cos \lambda' \psi) = \frac{\tan \psi}{\cos \lambda'}.$$

Für $w = 2\pi$ erhält man

$$\tan \psi = \cos \lambda' \tan (\varepsilon \cos \lambda' \psi') = \varepsilon \cos \lambda'^2 \psi,$$

$$\text{also} \quad \psi = 2\pi (1 + \varepsilon \cos \lambda'^2),$$

welcher Wert, in die Gleichung

$$\sin \varphi = \sin \lambda' \cos \psi$$

gesetzt, den richtigen Näherungswert für φ liefert.

Es sei hier gestattet, noch eine Stelle bei Soldner aufzuklären. Zur Berechnung von w und φ wird von Soldner die Gleichung 15) und die Gleichung

$$\sin \varphi = \sin z \cos \psi$$

mittels Gleichung 14) verwendet. Diese Berechnung führt für $\alpha = 90^0$ zu einem scheinbaren Widerspruch. Denn für $\alpha = 90^0$ muß statt 14) die Formel

$$\psi = s - 2\varepsilon s + 2\varepsilon s \cos \lambda'^2$$

und statt 15) die Formel 12') verwendet werden. Beide Berechnungen geben aber (mit Fehlern vierter Ordnung) dasselbe Resultat. Für w folgt dies daraus: Eine Verminderung von ψ um $\varepsilon s \cos \lambda'^2$ in 14) vermindert w um $\varepsilon s \cos \lambda'$ in 15). Ist aber $\mu = 0$ oder selbst erster Ordnung, so ist der Einfluß in $\cos \psi$ (S. 35) nur eine Größe vierter Ordnung, die Soldner vernachlässigt.

Untersuchungen über die Genauigkeit des Zielens mit Fernröhren.

Von **Alfred Noetzli**, Dipl. Ing. aus Höngg (Zürich).

I.
Vorbemerkung.

Wenn die Aufgabe gestellt ist, mit irgend einem Instrument genauere Messungen auszuführen, so wird man immer bestrebt sein, durch spezielle Versuche sich Einblick zu verschaffen in den Grad der normalerweise erreichbaren Genauigkeit. Solche Untersuchungen sollen einmal über die Leistungsfähigkeit des vorliegenden Instrumententypus Klarheit verschaffen, dann aber auch den