Ueber die Behandlung der Fehlergleichungen, deren Koeffizienten bei den Unbekannten nicht fehlerfrei sind

Kaspar Weigel [1]

[1] *Professor an der k. k. technischen Hochschule in Lemberg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **11** (10), S. 297–304

1913

BibTEX:

```
@ARTICLE{Weigel_VGI_191339,
Title = {Ueber die Behandlung der Fehlergleichungen, deren Koeffizienten bei
   den Unbekannten nicht fehlerfrei sind},
Author = {Weigel, Kaspar},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {297--304},
Number = {10},
Year = {1913},
Volume = {11}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 10. **Wien, am 1. Oktober 1913.** XI. Jahrgang.

Ueber die Behandlung der Fehlergleichungen, deren Koeffizienten bei den Unbekannten nicht fehlerfrei sind.

Von **Dr. Kaspar Weigel,** Professor an der k. k. Technischen Hochschule in Lemberg.

Bekanntlich wird in der Ausgleichungstheorie der vermittelnden Beobachtungen angenommen, daß die bei den Unbekannten stehenden Koeffizienten der Fehlergleichungen fehlerfreie Größen seien.

Im Gegensatz zu dieser Annahme sind sie jedoch in der Ausgleichungspraxis meistens nicht ganz fehlerfrei, da sie entweder auf Grund von Beobachtungen, oder, wie es bei nichtlinearen Funktionen der Fall ist, nur näherungsweise bestimmt werden.

Eine ohne Berücksichtigung der Fehler der Koeffizienten durchgeführte Ausgleichung liefert Werte der Unbekannten, die von den wahrscheinlichsten desto mehr abweichen, je größer diese Fehler waren. Unter Umständen können also die Resultate der Ausgleichung ganz wertlos sein.

Es soll nun gezeigt werden, daß, wenn in solchen Fällen besondere Maßregeln getroffen werden, doch die wahrscheinlichsten, oder zum mindesten davon wenig abweichende Werte der Unbekannten erhalten werden können.

Die Ursache der Koeffizientenfehler linearer Funktionen liegt darin, daß letztere auf Grund von Beobachtungen gebildet wurden; es kommen in diesem Falle nur zufällige Fehler in Betracht.

Nichtlineare Funktionen müssen vorerst unter Heranziehung von Näherungswerten in Reihen von beschränkter Anzahl der Glieder entwickelt werden. Dies ist, wie später gezeigt wird, bei solchen Funktionen die zweite Ursache der Ungenauigkeit der Koeffizienten.

Behandeln wir zuerst die Ausgleichung der Beobachtungen, die lineare Funktionen der Unbekannten sind.

Die Form einer linearen Fehlergleichung ist bekanntlich:

$$a_i x + b_i y + c_i z + \ldots\ldots + l_i = v_i,$$

wobei $l_i = - L_i$ als Beobachtung mit negativem Vorzeichen angenommen wurde.

Ersetzt man in dieser Gleichung die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten $x, y, z, \ldots$ durch wahre $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \ldots$, so geht sie über in die folgende:

$$a_i \underline{x} + b_i \underline{y} + c_i \underline{z} + \ldots + l_i = \varepsilon_i.$$

In diesen zwei angeführten Gleichungen entstehen v_i, der scheinbare und ε_i, der wahre Fehler dadurch, daß sowohl l_i, als auch die Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, \ldots$ auf Grund beobachteter Größen gebildet wurden.

Wollen wir den wahren Fehler ε_i näher betrachten.

Hätte man in die letzte Fehlergleichung statt der fehlerhaften Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, \ldots\ldots$, wahre, fehlerfreie $\underline{a}_i, \underline{b}_i, \underline{c}_i, \ldots\ldots$, eingesetzt, so würde sie einen anderen wahren Fehler εl_i liefern:

$$\underline{a}_i \underline{x} + \underline{b}_i \underline{y} + \underline{c}_i \underline{z} + \ldots\ldots + l_i = \varepsilon l_i.$$

Da in dieser Fehlergleichung alle Glieder mit Ausnahme von l_i fehlerfrei sind, ist l_i resp. L_i die einzige Ursache des Fehlers εl_i.

Bezeichnen wir analog die wahren Fehler der Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, \ldots$, mit $\varepsilon a_i, \varepsilon b_i, \varepsilon c_i$ und setzen sie in die Fehlergleichung ein, so resultiert:

$$(a_i + \varepsilon a)\, \underline{x} + (b_i + \varepsilon b_i)\, \underline{y} + (c_i + \varepsilon c_i)\, \underline{z} + \ldots\ldots + l_i = \varepsilon l_i \quad \text{oder:}$$

$$a_i \underline{x} + b_i \underline{y} + c_i \underline{z} + \ldots + l_i = \varepsilon l_i - \underline{x}\, \varepsilon a_i - \underline{y}\, \varepsilon b_i - \underline{z}\, \varepsilon c_i - \ldots = \varepsilon_i.$$

Die letzte Formel gibt uns den Zusammenhang zwischen dem Fehler ε_i und den Fehlern der einzelnen Koeffizienten.

Den wahren Fehler ε_i werden wir bekanntlich niemals kennen lernen und müssen uns daher nur mit der Kenntnis des mittleren Fehlers μ_i begnügen, der in bezug auf den genannten Zusammenhang der Fehler folgendermaßen gebildet wird:

$$\mu^2_i = \underline{x}^2 \mu^2_{a_i} + \underline{y}^2 \mu^2_{b_i} + \underline{z}^2 \mu^2_{c_i} + \ldots\ldots + \mu^2_{l_i}.$$

In dieser letzten Formel bedeuten $\mu_{a_i}, \mu_{b_i}, \mu_{c_i} \ldots\ldots \mu_{l_i}$ die mittleren Fehler der entsprechenden Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, \ldots\ldots l_i$ und μ_i den der Fehlergleichung i entsprechenden mittleren Fehler.

Die den einzelnen Fehlergleichungen entsprechenden Gewichte müßten streng genommen nach der Formel:

$$p_i = \frac{C}{\underline{x}^2 \mu^2_{a_i} + \underline{y}^2 \mu^2_{b_i} + \underline{z}^2 \mu^2_{c_i} + \ldots\ldots + \mu^2_{l_i}}$$

(wobei $C =$ const.) bestimmt werden, wenn die Ausgleichung richtige Werte der Unbekannten liefern sollte.

Diese Formel ist jedoch unbrauchbar, da uns vor der Ausgleichung nur Näherungswerte der Unbekannten $x_0, y_0, z_0 \ldots$ bekannt sein können.

Drückt man in der Gewichtsgleichung die wahren Werte der Unbekannten durch die genäherten aus, indem man:

$$\underline{x} = x_0 + \triangle x, \quad \underline{y} = y_0 + \triangle y, \quad \underline{z} = z_0 + \triangle z, \ldots\ldots \text{ setzt,}$$

so resultiert:

$$p_i = \frac{C}{(x_0+\triangle x)^2 \mu^2_{a_i} + (y_0+\triangle y)^2 \mu^2_{b_i} + (z_0+\triangle z)^2 \mu^2_{c_i} + \ldots + \mu^2_{l_i}},$$

oder:

$$p_i = \frac{C}{x^2_0 \mu^2_{a_i} \left\{1 + \frac{\triangle x}{x_0}\left(2 + \frac{\triangle x}{x_0}\right)\right\} + y^2_0 \mu^2_{b_i} \left\{1 + \frac{\triangle y}{y_0}\left(1 + \frac{\triangle y}{y_0}\right)\right\} + \ldots + \mu^2_{l_i}}.$$

Werden nun die Näherungswerte $x_0, y_0, z_0, \ldots$ so gewählt, daß man die Größen $\frac{2\triangle x}{x_0}, \frac{2\triangle y}{y_0}, \frac{2\triangle z}{z_0}, \ldots\ldots$ gegen Eins vernachlässigen kann*), so gilt auch die genäherte Formel:

$$p'_i = \frac{C}{x^2_0 \mu^2_{a_i} + y^2_0 \mu^2_{b_i} + z^2_0 \mu^2_{c_i} + \ldots + \mu^2_{l_i}}.$$

Dieser Fall kommt in der Ausgleichungspraxis am öftesten vor, er soll deshalb den weiteren Ausführungen zugrunde gelegt werden.

Mit Berücksichtigung dieser Gewichte wird die Ausgleichung, deren Resultate wir mit $x_1, y_1, z_1 \ldots\ldots$ bezeichnen wollen, durchgeführt.

Sind die Unterschiede $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0, \ldots\ldots$ im Verhältnisse zu den entsprechenden Unbekannten sehr klein, so waren die Gewichte mit einer für die Endresultate der Ausgleichung genügenden Genauigkeit bestimmt worden, andernfalls muß die Ausgleichung mit Zuhilfenahme von neuen Gewichten:

$$p''_i = \frac{C}{x^2_1 \mu_{a_i} + y^2_1 \mu^2_{b_i} + z^2_1 \mu^2_{c_i} + \ldots + \mu^2_{l_i}}$$

in Angriff genommen werden, da doch angenommen werden darf, daß die Unterschiede $\triangle x_1 = \underline{x} - x_1$, $\triangle y_1 = \underline{y} - y_1$, $\triangle z_1 = \underline{z} - z_1, \ldots\ldots$ im allgemeinen kleiner ausfallen werden, wie die Unterschiede $\triangle x, \triangle y, \triangle z, \ldots\ldots$

Die Resultate dieser zweiten Ausgleichung $x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots$ werden mit denjenigen der ersten Ausgleichung $x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots$ übereinstimmen, wenn folgende $n-1$ Gleichungen bestehen werden:

$$\frac{p''_1}{p'_1} = \frac{p''_2}{p'_2} = \frac{p''_3}{p'_3} = \ldots = \frac{p''_n}{p'_n}.$$

Diese Bedingung kann ausgenützt werden, um gleich nach Vollendung der ersten Ausgleichung von der Gültigkeit ihrer Resultate sich überzeugen zu können.

Sind nämlich die Quotienten $\frac{p''_i}{p'_i}$ alle einander annähernd gleich, so ist die zweite Ausgleichung unnötig, anderenfalls muß sie mit Berücksichtigung der neuen Gewichte p'' zum zweitenmale durchgeführt werden.

Gehen wir jetzt zur Ausgleichung nichtlinearer Funktionen über.

---

*) Streng genommen kann das zwar nicht konstatiert werden, man kann jedoch in der Ausgleichungspraxis immer eine genügende Vorstellung von den Größen $\frac{2\triangle x}{x_0}, \frac{2\triangle y}{y_0}, \frac{2\triangle z}{z_0}, \ldots\ldots$ haben.

Solche Funktionen werden bekanntlich in Reihen entwickelt, die nach Potenzen der $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$, $\zeta = z - z_0$, ... fortschreiten.

In der Praxis kann jedoch nur eine endliche Anzahl der Glieder berücksichtigt werden, meistens wird die Reihe sogar bei den ersten Potenzen der $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ abgebrochen.

Am meisten findet hier Anwendung die Taylor'sche Reihe, die wir deshalb vom Standpunkte der Ausgleichungsrechnung näher besprechen wollen.

Die Form einer nichtlinearen Fehlergleichung ist bekanntlich:

$$L_i + v_i = f_i\,(x, y, z, \ldots\ldots),$$

wobei L_i wie früher die beobachtete Größe und $x, y, z, \ldots\ldots$ die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten bedeuten.

Werden die Unbekannten $x, y, z, \ldots$ durch $x_0 + \xi$, $y_0 + \eta$, $z_0 + \zeta, \ldots$ ersetzt, so nimmt die obige Gleichung eine für die Entwicklung in die Taylorsche Reihe günstige Form an:

$$\begin{aligned} L_i + v_i &= f_i\,(x_0 + \xi,\, y_0 + \eta,\, z_0 + \zeta, \ldots) = f_i(x_0, y_0, z_0, \ldots) + \\ &+ \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(1)} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(2)} + \\ &+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(3)} + \ldots \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(r)} + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Um diese Reihe in einer für die Ausgleichungsrechnung passenden Form darzustellen, muß man die einzelnen Glieder nach den Unbekannten $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ ordnen.

Da nun $(a\xi + b\eta + c\zeta + \ldots)^r = (a\xi + b\eta + c\zeta + \ldots)^{r-1} . (a\xi + b\eta + c\zeta + \ldots) =$
$= \xi a (a\xi + b\eta + c\zeta + \ldots)^{r-1} + \eta b (a\xi + b\eta + c\zeta + \ldots)^{r-1} + \zeta c (a\xi + b\eta + c\zeta + \ldots)^{r-1} + \ldots$
kann mit Beibehaltung der bei der Taylor'schen Reihe angewendeten symbolischen Bedeutung der Potenzzahlen gleich gesetzt werden:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(r)} = \left\{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(r-1)} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_0}\right\}^{(1)} \xi + \\ &+ \left\{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(r-1)} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\right\}^{(1)} \eta + \left\{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(r-1)} \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\right\}^{(1)} \zeta + \ldots \end{aligned}$$

Wenden wir diese Darstellungsweise auf jedes Glied der Taylor'schen Reihe an, so resultiert:

$$\begin{aligned} L_i + v_i &= f_i\,(x_0, y_0, z_0, \ldots\ldots) + \\ &+ \frac{1}{1!}\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{1}{2!}\left\{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(1)} \frac{\partial f_i}{\partial x_0}\right\}^{(1)} \xi + \ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{1!}\frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{1}{2!}\left\{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(1)} \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\right\}^{(1)} \eta + \ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{1!}\frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \frac{1}{2!}\left\{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(1)} \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\right\}^{(1)} \zeta + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$L_i + v_i = f_i(x_0, y_0, z_0, \ldots\ldots) +$$
$$+ \xi \Sigma \frac{1}{r!}\left\{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(r-1)} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_0}\right\}^{(1)} +$$
$$+ \eta \Sigma \frac{1}{r!}\left\{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(r-1)} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\right\}^{(1)} +$$
$$+ \zeta \Sigma \frac{1}{r!}\left\{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial f_i}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\zeta + \ldots\right)^{(r-1)} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial z_0}\right\}^{(1)} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

wobei in den Summen für r ganze Zahlen von 1 angefangen zu setzen sind.

Werden die Unbekannten in den Klammern durch ihre Näherungswerte ersetzt, so kann auf diese Weise eine nichtlineare Fehlergleichung in eine lineare mit Berücksichtigung der Glieder beliebiger Ordnung umgewandelt werden.

Um dieser Gleichung die in der Ausgleichungsrechnung übliche Form zu geben, setzen wir: $f_i(x_0, y_0, z_0, \ldots) - L_i = l_i$, die Summe bei ξ gleich $a_i^{(r)}$, bei η gleich $b_i^{(r)}$, bei ζ $c_i^{(r)}$ usw. ($a^{(r)}$, $b^{(r)}$, $c^{(r)}\ldots$ bedeutet, daß in diesen Koeffizienten Glieder r-ter Ordnung berücksichtigt wurden), wodurch die Fehlergleichung folgende Form annimmt:

$$v_i = a_i^{(r)}\xi + b_i^{(r)}\eta + c_i^{(r)}\zeta + \ldots\ldots + l_i.$$

In der Praxis kann bei der Ausgleichung solcher Funktionen folgender Weg mit Vorteil eingeschlagen worden.

Zuallererst werden bei der Ausgleichung nur die Glieder erster Ordnung als Koeffizienten $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $c^{(1)}, \ldots$ berücksichtigt. Finden sich in diesen Koeffizienten beobachtete Größen vor, so muß — wie bereits gezeigt wurde — mit entsprechenden Gewichten gerechnet werden.

Die auf Grund dieser ersten Ausgleichung erhaltenen Werte der Unbekannten bezeichnen wir mit ξ_1, η_1, $\zeta_1 \ldots$

Sie sind aber nur dann als endgültige Ausgleichungsergebnisse zu betrachten, wenn nicht nur wie bei den linearen Funktionen die Bedingung:

$$\frac{p''_1}{p'_1} = \frac{p''_2}{p'_2} = \ldots\ldots = \frac{p''_n}{p'_n}$$

erfüllt ist, sondern auch die Glieder der zweiten Ordnung im Vergleiche zu denen der ersten Ordnung in den einzelnen Koeffizienten als verschwindend klein betrachtet werden können.

Ist dies nicht der Fall, so müssen die Glieder der zweiten, event. der höheren Ordnungen bei der Bildung der Koeffizienten berücksichtigt werden.

Setzt man $a^{(r)} - a^{(r-1)} = \triangle a^{(r-1)}$, $b^{(r)} - b^{(r-1)} = \triangle b^{(r-1)}$, $c^{(r)} - c^{(r-1)} = \triangle c^{(r-1)} \ldots$, so kann man die Koeffizienten mit den Gliedern r-ter Ordnung folgendermaßen darstellen:

$$a^{(r)} = a^{(r-1)}\left(1 + \frac{\triangle a^{(r-1)}}{a^{(r-1)}}\right), \; b^{(r)} = b^{(r-1)}\left(1 + \frac{\triangle b^{(r-1)}}{b^{(r-1)}}\right), \; c^{(r)} = c^{(r-1)}\left(1 + \frac{\triangle c^{(r-1)}}{c^{(r-1)}}\right) \ldots$$

Man bildet also mit Hilfe der ξ_1, η_1, $\zeta_1 \ldots$ sukzessiv: $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)} \ldots$ und so weiter, bis man sich bei $a^{(r)}$, $b^{(r)}$, $c^{(r)} \ldots$ überzeugt hat, daß $\frac{\triangle a^{(r)}}{a^{(r)}}$, $\frac{\triangle b^{(r)}}{b^{(r)}}$, $\frac{\triangle c^{(r)}}{c^{(r)}} \ldots$

gegen 1 vernachläßigt werden können. Ist dies der Fall, so ist es nicht nötig, $a^{(r+1)}, b^{(r+1)}, c^{(r+1)} \ldots$ zu bilden, sondern bei der Ausgleichung nur $a^{(r)}, b^{(r)}, c^{(r)} \ldots$ zu berücksichtigen.

In der Regel kann dann die ganze Ausgleichung als vollendet angesehen werden.

Wären dagegen, was doch äußerst selten vorkommen könnte, die Resultate dieser zweiten Ausgleichung $\xi_2, \eta_2, \zeta_2 \ldots$ von den Resultaten der ersten Ausgleichung $\xi_1, \eta_1, \zeta_1 \ldots$ sehr verschieden, so müßte doch die Ausgleichung mit Berücksichtigung der zum zweitenmale mit Hilfe der Werte $\xi_2, \eta_2, \zeta_2 \ldots$ gebildeten Koeffizienten durchgeführt werden.

Dieser letzte Fall hat jedoch mehr eine theoretische als praktische Bedeutung.

Zuletzt wollen wir noch die ganze Sache vom Standpunkte der Meßkunstpraxis überlegen.

Zwei Fälle waren hier auseinandergesetzt worden, ein Fall mit linearen, ein zweiter mit nichtlinearen Fehlergleichungen.

Bezüglich des zweiten Falles wollen wir jedoch bemerken, daß in der Meßkunstpraxis nur äußerst selten Fälle vorkommen dürften, bei denen die Berücksichtigung der Größen zweiter Ordnung nötig wäre.

Den zweiten Fall werden wir also nicht behandeln, sondern uns lediglich mit dem ersten Falle beschäftigen.

Ein sehr gut den ersten Fall charakterisierendes Beispiel liefert uns die Ermittlung des wahrscheinlichsten Halbmessers r eines im Felde abgesteckten Kreisbogens.

Gegeben ist die Tangente in dem Bogenanfangspunkte und die einzelnen Bogenpunkte.

Zur Ermittlung des wahrscheinlichsten Halbmessers r wurden mit Hilfe eines im Bogenanfangspunkte aufgestellten Theodoliten die von der gegebenen Tangente und den, den einzelnen Kreispunkten entsprechenden Sehnen gebildeten Winkel α und die Längen der Sehnen d gemessen.

Die Relation zwischen den gemessenen Größen d, α und dem gesuchten r lautet:

$$d = 2\,r \sin \alpha.$$

Wird r mit x bezeichnet, so nehmen die einzelnen Fehlergleichungen folgende Gestalt an:

$$x\,2 \sin \alpha_i - d_i = v_i.$$

Würde man — wie es die Theorie verlangt — den Koeffizienten bei der Unbekannten x als fehlerfrei annehmen, so müßten die den einzelnen Fehlergleichungen entsprechenden Gewichte p proportional den einzelnen $\frac{1}{d_i}$, also $p_i = \frac{C}{d_i}$ angenommen werden.

Wird jedoch die in der vorliegenden Abhandlung besprochene Theorie berücksichtigt, so müssen die Gewichte der Formel:

$$p'_i = \frac{C''}{\varepsilon^2 d_i + 4 x^2_0 \cos^2 \alpha_i \, . \, \varepsilon^2 \alpha_i}$$

Genüge leisten.

Oder da $x = r = \frac{d_i}{2 \sin \alpha_i}$ und $\varepsilon x_i = \nu \sqrt{d_i}$ in der Ausgleichungspraxis angenommen wird, so resultiert:

$$p'_i = \frac{C''}{\nu^2 d_i + d^2_i \operatorname{ctg}^2 \alpha_i \, . \, \varepsilon^2 \alpha_i} = \frac{C''}{d_i} \frac{1}{\nu^2 + d_i \operatorname{ctg}^2 \alpha_i \, . \, \varepsilon \alpha_i}.$$

Den Unterschied dieser beiden Gewichtsannahmen wollen wir an einem Zahlenbeispiele veranschaulichen.

Für einen Bogen von $r = 300\ m$ sind die für 20 m von einander entfernten Punkte ausgerechneten d und α in der nächststehenden Tabelle I zusammengestellt und mit Nummern der entsprechenden Punkte bezeichnet.

Tabelle I.

Punkt	α	d	Punkt	α	d
1.	1° 54′ 37″	20·00 m	8.	15° 16′ 56″	158·14 m
2.	3 49 14	39·98	9.	17 11 33	177·35
3.	5 43 51	59·91	10.	19 06 10	196·36
4.	7 38 28	79·76	22.	42 01 34	401·68
5.	9 33 05	99·56	30.	57 18 30	504·95
6.	11 27 42	119·23	45.	85 57 45	598·51
7.	13 22 19	138·76	48.	91 41 36	599·74

Dieselben werden nur wenig von den im Felde erhaltenen Resultaten abweichen, so daß sie zur Bestimmung der Gewichte benützt werden können.

Wird $C' = 100$, $C'' = 18{,}084.294$, $\nu = 0{\cdot}003$ (für Lattenmessungen) und $\varepsilon x = \frac{1}{3438}$ (eine Minute bei gewöhnlichen Feldtheodoliten) angenommen, so resultieren die (mit dem Rechenschieber berechneten) Gewichtszahlen, die die Tabelle II umfaßt:

Tabelle II.

Punkt	p_i	p'_i	Punkt	p_i	p'_i
1.	50·0	50·0	8.	6·3	51·4
2.	25·1	49·9	9.	5.6	52·1
3.	16·7	49·9	10.	5·1	52·8
4.	12·5	50·1	22.	2·5	75·3
5.	10·0	50·2	30.	2·0	114·3
6.	8·4	50·5	45.	1·7	276·9
7.	7·2	50·9	48.	1·7	281·5

Wir sehen also, daß bei Berücksichtigung der in dieser Abhandlung besprochenen Theorie eine bedeutende Aenderung in den Gewichtszahlen eingetreten ist, welche auf das Endresultat der Ausgleichung einen erheblichen Einfluß ausüben wird.

Beträgt der größte Winkelwert für α rund etwa 25^0 (ev. -25^0), so können im vorliegenden Falle die Gewichte der einzelnen Fehlergleichungen annähernd gleich angenommen werden, findet man dagegen in den Fehlergleichungen größere Winkelwerte für α, so muß mit entsprechenden Gewichten p'_i gerechnet werden.

Aehnliche Untersuchung a priori angenommener Gewichte kann auch leicht bei anderen Problemen gemacht und ihre Richtigkeit mit Hilfe der obgenannten Theorie geprüft werden, was dann eventuell zu anderen Gewichtsannahmen führen kann.

Das Strichmaß.

Von Ing **S. Wellisch.**

Winkelgrößen werden gewöhnlich in Gradmaß, in der Astronomie auch in Zeitmaß ausgedrückt; in der Analysis wird jedoch fast ausschließlich das Bogenmaß verwendet, während in der Ballistik und Schießpraxis allmählich das Strichmaß zur Anwendung gelangt. Das Sehnenmaß und die goniometrischen Funktionen finden nur wenig Anwendung.

Das Strichmaß wurde bereits vor etwa 40 Jahren von dem österreichischen Artillerie-Oberleutnant Metlik als Winkeleinheit für die Schießtechnik in Vorschlag gebracht. Oberst Josef Kozák hat zuerst im Jahre 1902 in den «Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens», sodann in der Publikation «Gebräuchliche Winkel-, Längen- und Geschwindigkeitsmaße», Wien 1906, und neuerdings in dem Lehrbuche «Geschoßbewegung im Vakuum», Wien 1909, über den Strich geschrieben. Umrechnungstabellen vom Strich- in das Gradmaß brachte Hauptmann Ludwig v. Majneri in den «M. A. u. G.» 1908, und eine «Logarithmisch-Trigonometrische Tafel für Winkel im Strichmaß» Oberleutnant Hugo Metzner in den «M. A. u. G.» 1911.

Über die neue artilleristische Winkeleinheit und deren Beziehung zu den sonst gebräuchlichen Winkelmaßen möge das Wesentlichste hier angeführt werden.

Das Gradmaß In diesem Maße wird ein Winkel durch eine Zahl ausgedrückt, welche anzeigt, wie oft eine bestimmte Winkeleinheit — Grad genannt — in dem gegebenen Winkel enthalten ist. Bei der Sexagesimalteilung wird der 360. Teil, bei der Zentesimalteilung der 400. Teil des Vollwinkels als Winkeleinheit angenommen. Ein «Grad sexagesimal» oder «Grad alter Teilung» wird in 60 Minuten, eine Minute in 60 Sekunden eingeteilt; ein «Grad zentesimal» oder «Grad neuer Teilung» besitzt 100 Minuten zu je 100 Sekunden. Man schreibt im Sexagesimalsystem:

$$1^0 = 60', \quad 1' = 60'',$$

im Zentesimalsystem, wo der Grad zur besseren Unterscheidung auch «degré» genannt und mit d oder auch mit g bezeichnet wird: