Das Stabilitätsprinzip in der Ausgleichungsrechnung

G. Grigercsik [1]

[1] *k. u. Bergkommissär bei der Berghauptmannschnft Oravicza*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **11** (8), S. 234–239

1913

BibTeX:

```
@ARTICLE{Grigercsik_VGI_191331,
Title = {Das Stabilit{\"a}tsprinzip in der Ausgleichungsrechnung},
Author = {Grigercsik, G.},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {234--239},
Number = {8},
Year = {1913},
Volume = {11}
}
```

rechnung stehen unerreicht da und seine Publikationen aus der Höheren Geodäsie haben ihn zum Führer in dieser Wissenschaft gemacht.

Wenn auch das Wissens- und Forschungsgebiet Helmerts, insbesondere seit den letzten 28 Jahren, wo er die Leitung des Geodätischen Institutes in Potsdam und jene der Internationalen Erdmessung inne hat, weit über das Niveau der eigentlichen Bedürfnisse des Geometers sich erhebt und weitab von den Bestrebungen des modernen, realen öffentlichen Lebens liegt, so hat doch Helmerts Tätigkeit internationale Bedeutung erlangt, worüber sich gewiß die Geodäten herzlich und aufrichtig freuen.

Möge die Allmacht dem größten lebenden Geodäten Deutschlands noch lange Jahre schenken, möge sie ihn arbeits- und schaffensfreudig erhalten zum Wohle der geodätischen Wissenschaft! *D.*

Das Stabilitätsprinzip in der Ausgleichungsrechnung.

Von **G. Grigercsik**, k. u. Bergkommissär bei der Berghauptmannschaft Oravicza.

Nach Schiaparelli soll die Ausgleichung unmittelbarer Beobachtungen folgende Bedingungen erfüllen:

1. Das Resultat soll unabhängig sein von der Einheit, in welcher die einzelnen Beobachtungen ausgedrückt sind;

2. seine Stellung unter den Beobachtungen muß unabhängig von der Wahl des Nullpunktes für die Zählung dieser letzteren sein, analytisch gesprochen: wenn man zu allen Beobachtungen eine beliebige aber bestimmte Größe hinzufügt, so muß auch das zu wählende Resultat um dieselbe Größe verändert sein;

3. wenn man einer der Beobachtungen eine Änderung erteilt, so muß die dadurch hervorgebrachte Änderung des Resultates dieselbe bleiben, welcher von den Beobachtungen man die Änderung auch erteilt haben mag.[1])

Den gestellten Bedingungen entspricht nur das einfache arithmetische Mittel.

Ferrero hat das einfache arithmetische Mittel lediglich auf Grund der zwei ersten Bedingungen Schiaparellis abgeleitet.[2])

Zu dieser Begründung des arithmetischen Mittels gibt Prof. Czuber folgende Bemerkung.

«Diese Bedingungen sind, genauer betrachtet, der Ausdruck von Eigenschaften des wahren Wertes der beobachteten Größe . . . . . Daß nun, wenn man diese Eigenschaften dem wahrscheinlichsten Werte vorschreibt, dieser mit dem arithmetischen Mittel zusammenfällt, erklärt Ferrero wie folgt usw.[3])

Diese Auffassung ist nicht ganz zutreffend, denn die zwei ersten, auch von Ferrero angenommenen Bedingungen Schiaparellis stehen in keiner Beziehung zum Begriffe des «wahrscheinlichsten» Wertes, sie bilden vielmehr ein

---

[1]) Vergl. Czuber: Theorie der Beobachtungsfehler S. 31 bis 32.

[2]) L. c. S. 42 bis 44.

[3]) L. c. S. 44.

exaktes, von der Wahrscheinlichkeitstheorie vollkommen unabhängiges Prinzip, welches die Ausgleichungstheorie durchaus nicht ignorieren kann. Dieses, selbst von Ferrero nicht klar erkannte Prinzip verlangt die Stabilität der Ausgleichung, womit wir uns nun näher beschäftigen wollen.

Wenn wir irgend eine durch direkte Messung gefundene Zahl x mit einer anderen $y = a + b\,x$ vertauschen, so haben wir das Rechnungssystem derart modifiziert, daß wir den Anfangspunkt von 0 auf $-a$ verschoben und die Einheit b-mal verkleinert haben.

Die Naturwissenschaften geben uns zahlreiche Beispiele derartiger Systemänderungen; wir wollen hier nur die Temperaturmessungen erwähnen und gleichzeitig an der Hand eines hierher gehörigen Beispiels das Wesen der stabilen Ausgleichung erklären.

Angenommen, wir hätten eine Temperatur zweimal gemessen und in Celsiusgraden $t_1 = 9^0$; $t_2 = 10^0$ gefunden, so liefert uns das arithmetische Mittel den Ausgleichungswert

$$t_m = \frac{t_1 + t_2}{2} = 9{\cdot}5^0\ C.$$

Drücken wir t_1 und t_2 in einem anderen System, etwa in absoluten Graden aus, also $\tau_1 = 273^0 + 9^0 = 282^0$ und $\tau_2 = 273^0 + 10^0 = 283^0$, so wird das arithmetische Mittel

$$\tau_m = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = 282{\cdot}5^0 \text{(abs)}$$

was objektiv identisch ist mit dem früheren Resultate t_m, da ja $\tau_m = 273^0 + 9{\cdot}5^0 = 273^0 + t_m$ ist.

Das arithmetische Mittel besitzt demnach die Eigenschaft, seine objektive Bedeutung von der Wahl des willkürlichen Rechnungssystems unabhängig zu behalten, es drückt immer einen und denselben physikalischen Zustand aus, kurz: das arithmetische Mittel ist ein stabiler Ausgleichungswert.

Wollte dagegen jemand irgend eine andere Formel, z. B. das geometrische Mittel $t_m = \sqrt{t_1 \,.\, t_2}$ zur Ausgleichung wählen — und es scheint diese Formel ebenfalls geeignet, wenn auch weniger einfach, als das arithmetische Mittel — so würde man bald zur Einsicht kommen, daß eine Ausgleichung nach dieser Formel ganz unmöglich ist.

In unserem Beispiele würden wir als Ausgleichungswert der Celsiusgrade

$$t_m = \sqrt{90} = 9{\cdot}487^0\ C$$

der absoluten Grade aber

$$\tau_m = \sqrt{282 \,.\, 283} = 282.499^0$$

erhalten. Verwandeln wir nun τ_m in Celsiusgrade, so erhalten wir nicht $t_m = 9{\cdot}487^0\ C$ wie früher, sondern $t_m = 9{\cdot}499^0$. Welcher soll nun der richtige Ausgleichungswert sein, da ja doch beide aus denselben Daten nach derselben Methode abgeleitet worden sind?

Das geometrische Mittel ist also ein labiler, von dem willkürlichen Rechnungssystem abhängiger Ausgleichungswert und ist als solcher unbrauchbar. Es ist nämlich an und für sich klar, daß die Annahme eines solchen labilen Wertes mit der willkürlichen Auswahl irgend einer Zahl gleichbedeutend wäre, was eine nach festen mathematischen Prinzipien vorzunehmende Ausgleichung a priori ausschließt.

Wir können also die Stabilität folgenderweise definieren:

«Die Ausgleichung ist stabil, wenn das willkürliche Rechnungssystem keinen Einfluß auf die objektive Bedeutung des Resultates hat».

Für unmittelbare Beobachtungen lautet die Stabilitätsbedingung folgenderweise: Wenn

$$x = f(l_1; l_2; \ldots . l_n)$$

ist, dann soll

$$a + bx = f(a + b l_1; a + b l_2; \ldots . a + b l_n)$$

sein. Diese Bedingung erfüllt die Funktion

$$x = k_0 + k_1 l_1 + k_2 l_2 + \ldots . + k_n l_n$$

in welcher die Faktoren k von der Transformation unabhängig sind.

Wir verlangen, daß für $l_1 = l_2 = \ldots = 0$ auch $x = 0$ und für $l_1 = l_2 = \ldots = L$ (mit L bezeichnen wir den wahren Wert) $x = L$ sein soll, woraus

$$k_0 = 0$$

und

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1$$

folgt. Indem wir

$$k_1 = q_1 \cdot r$$
$$k_2 = q_2 \cdot r$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$k_n = q_n \cdot r$$

setzen, wird

$$k_1 = \frac{q_1}{q_1 + q_2 + \ldots + q_n}$$

$$k_2 = \frac{q_2}{q_1 + q_2 + \ldots + q_n} \text{ usw.}$$

und als Endresultat erhalten wir

$$x = \frac{q_1 l_1 + q_2 l_2 + \ldots + q_n l_n}{q_1 + q_2 + \ldots + q_n},$$

d. h. das allgemeine arithmetische Mittel als die einzige stabile Ausgleichungsformel.

Mit der Feststellung dieser Tatsache ist das Ausgleichungsproblem gelöst, es erübrigt sich noch, die Faktoren q derart zu bestimmen, daß x den wahren Wert L womöglich annähern soll. Wir suchen also nicht die wahrscheinlichste Ausgleichsformel, sondern die wahrscheinlich besten Gewichtszahlen der einzig möglichen Ausgleichsformel. Hierin besteht der wesentliche Unterschied gegenüber der alten Theorie.

* * *

Führen wir das arithmetische Mittel in die Form einer Bedingungsgleichung zurück, setzen also

$$[q(x-l)] = [(qv)] = 0$$

so erkennen wir gleich, daß dieses Ausgleichungsprinzip mit der Forderung

$$[b\,v^{2n}] = \text{Minimum}$$

identisch ist.

Diese Forderung hängt mit der Natur der gewissenhaft ausgeführten Beobachtungen eng zusammen, man könnte höchstens einwenden, daß der spezielle Exponent nicht motiviert ist, daß man vielmehr allgemein

$$[q\,v^{2n}] = \text{Minimum}$$

fordern sollte.

Warum nun gerade $n=1$ gesetzt werden **muß** (und nicht nur kann!), dies erklärt eben das Stabilitätsprinzip. Würde man $n \gtrless 1$ setzen, so würde man für x eine nichtlineare Gleichung erhalten, welche ein labiles, also unbrauchbares Resultat liefern würde. Es handelt sich somit nicht bloß um eine zweckmäßige Wahl des Exponenten, nicht um die Vermeidung rechnerischer Schwierigkeiten, sondern um eine exakt mathematische Notwendigkeit. Dies gibt auch eine theoretische Vertiefung der Gauß'schen Exponentialfunktion: sie **muß** auch vom zweiten Grade sein, sonst würde sie einen labilen wahrscheinlichsten Wert liefern, was ein prinzipieller Widerspruch wäre.

Es ist nun ohneweiters einleuchtend, daß das Prinzip $[q\,v^{2n}] =$ Min. nicht nur bei den unmittelbaren Beobachtungen, sondern auch als allgemeines Ausgleichungsprinzip an die Bedingungen $n=1$ gebunden ist und z. B. die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen nur auf Grund eines linearen Resolventensystems geschehen kann, wenn die Resultate stabil sein sollen.

Worin hier die Stabilität besteht und ob die Methode der kleinsten Quadrate tatsächlich stabile Resultate liefert, das wollen wir der Einfachheit halber an der Ausgleichung einer speziellen Funktion untersuchen:

Es seien die Konstanten a, b des Systems

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a + b x_1 \\ y_2 = a + b x_2 \\ \dots\dots\dots \\ y_n = a + b x_n \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{I.}$$

wo $y_1 \dots y_n$; $x_1 \dots x_n$ unmittelbar beobachtet wurden, auszugleichen.

Wir transformieren die Beobachtungsdaten, u. zw. setzen wir $\alpha + \beta y$ statt y und $\gamma + \delta x$ statt x, erhalten dann

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta y_1 = A + B(\gamma + \delta x_1) \\ \alpha + \beta y_2 = A + B(\gamma + \delta x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha + \beta y_n = A + B(\gamma + \delta x_n) \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{II.}$$

Die Stabilität erfordert nun, daß der Funktion

$$\eta = a + b\xi$$

des ersten Systems die Funktion

$$\alpha + \beta \eta = A + B(\gamma + \delta \xi)$$

des zweiten Systems entsprechen soll, und zwar für beliebige Werte der Unabhängigen ξ. Demnach muß

$$\alpha + \beta(a + b\xi) = A + B(\gamma + \delta \xi)$$

oder

$$\alpha + \beta a + \xi(\beta b - \delta B) = A + B\gamma$$

sein, welche Gleichung der Willkürlichkeit von ξ in folgende zertällt:

$$\alpha + \beta a = A + B\gamma$$

und

$$\beta b - \delta B = 0,$$

woraus dann

$$\left.\begin{aligned} A &= \alpha + \beta x - \frac{\beta\gamma}{\delta} \cdot b \\ B &= \frac{\beta}{\delta} \cdot b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III}$$

resultiert. Die Faktoren a, b und A, B müssen demnach linear zusammenhängen, was die lineare Form des Resolventensystems

$$\begin{aligned} m_1 a + n_1 b + p_1 &= 0 \\ m_2 a + n_2 b + p_2 &= 0 \end{aligned}$$

erfordert; (m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2 bedeuten hier gewisse Funktionen der Beobachtungsdaten.)

Wenn also das Prinzip $[v^{2n}] = \text{Min.}$ überhaupt anwendbar sein soll, muß $n = 1$ sein.

Ob nun die Methode der kleinsten Quadrate die Stabilitätsbedingungen III wirklich erfüllt, das können wir bei der ziemlich komplizierten Form der Koëffizienten m, n, p einfach a posteriori entscheiden. In der Tat, wenn wir die Auflösung des ersten Systems

$$a = \frac{[x][xy] - [y][x^2]}{[x] - n[x^2]}$$

$$b = \frac{[x][y] - n[xy]}{[x]^2 - [x^2]}$$

mit derjenigen des zweiten Systems

$$A = \frac{[\gamma + \delta x][(\gamma + \delta x)(\alpha + \beta y)] - [\alpha + \beta y][(\gamma + \delta x)^2]}{[\gamma + \delta x]^2 - n[(\gamma + \delta x)^2]}$$

$$B = \frac{[\gamma + \delta x][\alpha + \beta y] - n[(\gamma + \delta x)(\alpha + \beta y)]}{[\gamma + \delta x]^2 - n[(\gamma + \delta x)^2]}$$

vergleichen, finden wir die Stabilitätsbedingungen III erfüllt.

Die Methode der kleinsten Quadrate bildet somit auch in ihrer allgemeinen Formulierung ein stabiles Ausgleichungsprinzip.

Bei den unmittelbaren Beobachtungen hat sich dieses Prinzip als das einzig mögliche erwiesen, um so mehr muß diese Tatsache bei den unvergleichlich komplizierteren Problemen der vermittelnden Beobachtungen feststehen. Denn könnte man die stabile Ausgleichung der letzteren noch auf Grund eines anderen Prinzips ausführen, so würde dieses von der kleinsten Quadratsumme abweichende Prinzip ohneweiters auch für die unmittelbaren Beobachtungen verwendbar sein müssen, was jedoch ausgeschlossen ist.

Die in großen Zügen geschilderte Begründung der Ausgleichsprinzipien ist von jeder wahrscheinlichkeitstheorethischen Hypothese frei; ob man eine Fehlerfunktion für möglich hält oder nicht, das ist für die Ausgleichung selbst vollkommen gleichgültig. Für diejenigen aber, welche die unleugbar hochinteressante Theorie der Fehlerfunktion nicht aufgeben möchten, liefert das Stabilitätsprinzip, wie bereits erwähnt, einen Beweis der Notwendigkeit der Gauß'schen Formel. Wir müssen nämlich das Problem folgenderweise auffassen: gesetzt, es bestehe zwischen der absoluten Größe des Fehlers und seiner relativen Wahrscheinlichkeit (Häufigkeit bei unendlich wachsender Beobachtungszahl) ein funktionaler Zusammenhang, so muß diese Wahrscheinlichkeitsfunktion für die maximale Wahrscheinlichkeit einen stabilen Wert liefern. Denn eine labile, also unendlich viele willkürliche Werte annehmbare Größe kann doch nicht für den wahrscheinlichsten Ausgleichungswert gelten, dies würde ja ohneweiteres die Negation des letzteren sowie der Wahrscheinlichkeitsfunktion überhaupt bedeuten. Nachdem aber das arithmetische Mittel die einzige stabile Funktion der Beobachtungsdaten repräsentiert, so muß die hypothetische Fehlerfunktion das arithmetische Mittel als den wahrscheinlichsten Wert liefern. Hiemit haben wir die Gauß'sche Forderung, jedoch nicht mehr als Axiom, sondern als die Grundbedingung der Möglichkeit einer Fehlerfunktion erhalten. Wenn also eine Fehlerfunktion überhaupt existiert, kann sie nur die Gauß'sche Exponentialform haben.

Damit ist allerdings noch nicht bewiesen, daß sie tatsächlich existiert und das entscheidende Wort ist diesbezüglich der Erfahrung, den Fehlerversuchen vorbehalten, welche bekanntlich zugunsten einer, wenigstens praktisch annehmbaren funktionalen Beziehung sprechen, u. zw., wie es dann nach obiger Überlegung vorauszusehen ist, im Sinne der Gauß'schen Formel.

Messung der Polygonseiten.

Von k. k. Evidenzhaltungs-Oberinspektor **Eduard Demmer**.

Die vorgeschriebene doppelte Messung der Polygonseiten mittelst des Stahlbandes im ebenen Terrain läßt sich etwas weniger zeitraubend und eintönig gestalten.

In der ersten Bandlage wird bei 19^m und 20^m markiert und von diesen Punkten aus die doppelte Messung der Strecke unter einem in derselben Richtung mit Bandlagen zu 19^m und 20^m ausgeführt, wobei die Richtigkeit der Marke für 19^m bezw. die Ermittlung der Korrektur derselben eine selbstverständliche Voraussetzung bildet. Die in der n^{ten} Bandlage bei der Messung mit 19^m bezw. 20^m gesteckten Markiernägel müssen um n ganze Meter differieren. Die Umgehung der Doppelmessung