

Paper-ID: VGI_191322



Netzorientierung durch Einführung von Richtungsbedingungsgleichungen

Siegfried Wellisch ¹

¹ *Bauinspektor der Stadt Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **11** (6), S. 178–183

1913

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_191322,  
  Title = {Netzorientierung durch Einf{\u}hrung von  
    Richtungsbedingungsgleichungen},  
  Author = {Wellisch, Siegmund},  
  Journal = {{{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {178--183},  
  Number = {6},  
  Year = {1913},  
  Volume = {11}  
}
```



wieder mit k . Die in obigem Beispiel angeführte Aufgabe läßt sich demnach auch so lösen, daß man s und k halbiert, mit 62,24 für s und 11,43 für k (rechte Teilung) an der unteren Kurve d zu $2 \times 1,06 = 2,12$ abliest. Man erhält also dasselbe Resultat wie oben.

Die Tafeln würden natürlich zweckmäßig auf kräftigem Karton aufzuziehen sein, und zum Verbinden der Tafelwerte wird man, wie schon angedeutet, vorteilhaft einen Streifen glashellen Celluloides mit daraufgezogener gerader Linie benutzen, sodaß die Tafeln auch bequem im Felde gebraucht werden können.

Wenn man nun nach alledem den Aufwand an Zeit und geistiger Aufmerksamkeit vergleicht, der einerseits bei graphischer, und andererseits bei rechnerischer Ermittlung der horizontalen Länge nötig ist, so werden die Vorzüge der eben besprochenen Tafeln ohne weiteres einleuchten, und da die Nomenclographie auch in vielen andern Fällen ein geeignetes Mittel zur Verringerung der immerhin unangenehmen Rechenarbeiten bietet, so ist leicht ersichtlich, daß diese Theorie der Beachtung wert ist.

Netzorientierung durch Einführung von Richtungsbedingungsgleichungen.

Von S. Wellisch.

Bei Netzausgleichungen ist zur strengen Orientierung des Netzes die sogenannte Bessel'sche Nullpunktskorrektur oder Richtungsreduktion erforderlich. Die Heranziehung dieses Orientierungswinkels, der dort, wo nur Winkel in die Rechnung eingehen, allerdings bedeutungslos ist, wo es sich jedoch um Richtungsausgleichungen handelt, großen Einfluß besitzt, begegnet nicht geringen Schwierigkeiten, worüber in Jordan-Eggert: «Handbuch der Vermessungskunde», 1910, I. Band, §§ 79 und 82, manches erwähnt ist. (Siehe auch Bessel-Baeyer: «Gradmessung in Ostpreußen», 1834, S. 134, oder Wellisch: «Theorie und Praxis der Ausgleichsrechnung», 1910, II. Band, S. 72).

Hier sei nun ein Verfahren angegeben, das wesentliche Vereinfachungen mit sich bringt. Es ist dies die Methode der an Stelle der Winkelbedingungsgleichungen eingeführten Richtungsbedingungsgleichungen.

Zunächst sei an einem Beispiel über den einfachsten Fall der Punktbestimmung aus einem ebenen Dreieck die Bedeutung der Richtungsbedingungen vor Augen geführt. Gegeben seien zwei Punkte A, B durch ihre Koordinaten, zu bestimmen sei ein dritter Punkt C , zu welchem Behufe in den drei Eckpunkten die Winkel α, β, γ durch die Richtungen 1, 2, 3, 4, 5, 6 gemessen werden. Die aus den gegebenen, unabänderlich feststehenden Koordinaten von A, B berechnete Richtung 1 und deren Gegenrichtung 2 müssen genau um 180° von einander abweichen; die aus dem Abriß für äußere und innere Richtungen entnommenen Richtungspaare 3, 4 und 5, 6 werden aber infolge von Messungsfehlern im allgemeinen nicht genau um 180° von einander differieren, wie folgendes, meinem Buche entnommene Beispiel zeigen soll.

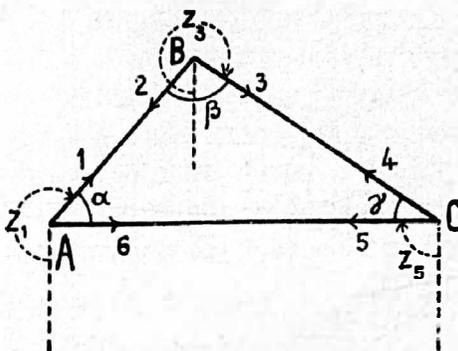


Fig. 1.

Die Beobachtungen mögen folgende unausgeglichene Richtungen beziehungsweise Winkel ergeben haben:

Richtung Nr. 1 . . .	223° 41' 31.9"	$\alpha = 50^\circ$	20'	32.1"
" " 2 . . .	43 41 31.9	$\beta = 95$	31	48.9
" " 3 . . .	308 09 43.0	$\gamma = 34$	07	49.0
" " 4 . . .	128 09 49.0			
" " 5 . . .	94 02 00.0			
" " 6 . . .	274 02 04.0			
			180"	00' 10.0"
				$\omega = +10.0''$

Verteilt man den Winkelwiderspruch $\omega = +10.0''$ nach den Regeln der Ausgleichung bedingter Beobachtungen auf alle drei Winkel zu gleichen Teilen, so erhält man nachstehende ausgeglichene Winkel und Winkelverbesserungen:

$\alpha = 50^\circ 20' 28.8''$	$v_\alpha = -3.3''$
$\beta = 95 31 45.6$	$v_\beta = -3.3$
$\gamma = 34 07 45.6$	$v_\gamma = -3.4$
<u>180° 00' 00.0"</u>	<u>-10.0"</u>

Eine Verbesserung der Richtungen kann jedoch in diesem Falle nicht vorgenommen werden. Beseitigt man den Widerspruch ω nach den Regeln der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, so erhält man — wie in meinem Buche, II. Band, § 29, ausführlich berechnet wurde — folgende ausgeglichene Richtungen und Winkel:

Nr. 1 . . .	223° 41' 31.9"	$\alpha = 50^\circ 20' 29.6''$	$v_\alpha = -2.5''$
" 2 . . .	43 41 31.9	$\beta = 95 31 46.4$	$v_\beta = -2.5$
" 3 . . .	308 09 45.5	$\gamma = 34 07 44.0$	$v_\gamma = -5.0$
" 4 . . .	128 09 46.5		
" 5 . . .	94 02 02.5		
" 6 . . .	274 02 01.5		
		<u>180° 00' 00.0"</u>	<u>-10.0"</u>

Der Winkelwiderspruch erscheint jetzt nicht mehr auf alle drei Winkel zu gleichen Teilen, sondern im Verhältnisse von $\frac{\omega}{4} : \frac{\omega}{4} : \frac{\omega}{2}$ aufgeteilt.

Vergleicht man die ausgeglichenen Richtungen im Hin- und Hergange, so fällt es auf, daß — obwohl das Richtungspaar 1, 2 diesbezüglich vollkommen übereinstimmend belassen wurde — die Richtungspaare 3, 4 und 5, 6 nicht genau um $180'$ von einander abweichen, sondern Widersprüche aufweisen. Damit diese Widersprüche verschwinden, könnte man — ausgehend von den unverändert gelassenen Richtungen 1 und 2 — die übrigen Richtungen mit Benützung der ausgeglichenen Winkel ableiten und erhielte so die Ergebnisse:

Nr. 1 . . .	223°	41'	31·9"
« 2 . . .	43	41	31·9
« 3 . . .	308	09	45·5
« 4 . . .	128	09	45·5
« 5 . . .	94	02	01·5
« 6 . . .	274	02	01·5

Allein diese Richtungen sind dann in ihren Orientierungen nicht ausgeglichen, sondern an die Ausgangsrichtung A, B bloß angeschlossen. Sollen die Richtungswidersprüche unter gleichzeitiger Orientierungsausgleichung verschwinden, so hat man entweder in jeder Station mit der Nullpunktkorrektion zu rechnen oder man wird in die Ausgleichsrechnung von vornherein die Bedingungen einzuführen haben, daß die Richtungen im Hin- und Hergange genau um 180^0 von einander differieren.

Nach der ersten Methode der Netzorientierung stelle man die zwischen den drei Dreieckswinkeln α, β, γ und den drei Orientierungswinkeln z_1, z_2, z_3 bestehenden Beziehungen auf:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 + \alpha - 180^0 &= 0 \\ z_2 - z_1 + \beta - 180^0 &= 0 \\ z_3 - z_2 + \gamma + 180^1 &= 0, \end{aligned}$$

worin die Bedingung $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ bereits enthalten ist. Diese Bedingungsgleichungen werden der Reihe nach die Widersprüche

$$w_1 = 4, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 6$$

aufweisen. Bezeichnet man die Verbesserungen der Dreieckswinkel wie bisher mit $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$, die der Orientierungswinkel oder die Nullpunktkorrekturen in den Stationen A, B und C mit v_1, v_2, v_3 , so bestehen die Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} v_\alpha + v_1 - v_2 + 4 &= 0 \\ v_\beta - v_1 + v_2 &= 0 \\ v_\gamma - v_2 + v_3 + 6 &= 0, \end{aligned}$$

ferner die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 3k_1 - k_2 - k_3 + 4 &= 0 \\ -k_1 + 3k_2 - k_3 &= 0 \\ -k_1 - k_2 + 3k_3 + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Mit den daraus berechneten Korrelaten erhält man die Verbesserungen:

$$\begin{array}{rcl}
 v_{\alpha} = k_1 & = & -3.5 \\
 v_{\beta} = k_2 & = & -2.5 \\
 v_{\gamma} = k_3 & = & -4.0 \\
 \hline
 & & -10.0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 v_1 = k_1 - k_3 & = & -1.0 \\
 v_2 = k_2 - k_3 & = & +1.5 \\
 v_3 = k_3 - k_1 & = & -0.5 \\
 \hline
 & & 0.0
 \end{array}$$

die Verbesserungen der Richtungen 2, 4 und 6:

$$\begin{array}{rcl}
 v_2 & = & v_{\beta} + v_{\gamma} = -1.0 \\
 v_4 & = & v_{\beta} + v_{\gamma} = -4.5 \\
 v_6 & = & v_1 + v_{\alpha} = -4.5
 \end{array}$$

und schließlich die ausgeglichenen Richtungen und Winkel:

Nr. 1 . . .	223° 41' 30.9"	$\alpha = 50^{\circ} 20' 28.6''$
» 2 . . .	43 41 30.9	$\beta = 95 31 46.4$
» 3 . . .	308 09 44.5	$\gamma = 34 07 45.0$
» 4 . . .	128 09 44.5	<hr/>
» 5 . . .	94 01 59.5	180° 00' 00.0"
» 6 . . .	274 01 59.5	

Jetzt stimmen die drei zugehörigen Richtungspaare sofort vollkommen überein und die Richtungen sind auch orientiert. Aber die Koordinaten der gegebenen Punkte A, B erleiden eine Veränderung und die Rechnung gestaltet sich verhältnismäßig langwierig. Um die durch die Einführung der Nullpunktskorrekturen entstehenden Schwierigkeiten, die — wie hier gezeigt — schon bei dem einfachsten Fall einer Dreiecksorientierung Umständlichkeiten verursachen, zu vermeiden, kann man die Richtungsbedingungsgleichungen (oder kürzer Richtungsgleichungen) einführen. Nach dieser zweiten Methode der Netzorientierung stellt sich der Rechnungsgang wie folgt:

Bezeichnet man die Verbesserungen der Richtungen Nr. 1 bis 6 mit v_1 bis v_6 , so lauten die betreffenden Richtungsbedingungen im vorliegenden Beispiele:

$$\begin{array}{rcl}
 v_1 - v_2 & = & 0.0'' \\
 v_3 - v_4 & = & +6.0 \\
 v_5 - v_6 & = & +4.0
 \end{array}$$

Hieraus entstehen sofort die außerordentlich einfach gebauten Normalgleichungen

$$\begin{array}{rcl}
 2k_1 & = & 0 \\
 2k_2 & = & 6 \\
 2k_3 & = & 4,
 \end{array}$$

die sofort die Korrelaten $k_1 = 0$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$, und damit die Richtungsverbesserungen $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = +3$, $v_4 = -3$, $v_5 = +2$, $v_6 = -2$, und endlich folgende ausgeglichene Richtungen und Winkel ergeben:

Nr. 1 . . .	223 ⁰	41'	31·9"	$\alpha = 50^{\circ}$	20'	30·1"	$v_{\alpha} = - 2\cdot0''$
« 2 . . .	43	41	31·9	$\beta = 95$	31	45·9	$v_{\beta} = - 3\cdot0$
« 3 . . .	308	09	46·0	$\gamma = 34$	07	44·0	$v_{\gamma} = - 5\cdot0$
« 4 . . .	128	09	46·0	180 ⁰ 00' 00·0"			-10·0"
« 5 . . .	94	02	02·0				
« 6 . . .	274	02	02·0				

Im I. Bande § 62 und II. Bande § 33 der zitierten «Ausgleichsrechnung» ist ein Viereck nach den drei Methoden:

I. Ausgleichung nach Winkeln,

II. « « Richtungen mit Winkelgleichungen,

III. « « Richtungen mit Richtungsgleichungen

ansführlich behandelt, und wird im II. Bande, S. 148 nachgewiesen, daß die Rechnung nach der Methode der Ausgleichung mit Richtungsbedingungen sich weit einfacher und bequemer gestaltet als nach einer anderen Methode. Die Ergebnisse sind aus folgender Zusammenstellung zu ersehen:

Richtung Nr.	Beobachtete Richtungen	Ausgegliche Richtungen nach der Methode		
		II ohne Orientierung	II mit Orien- tierungs- anschluß	III mit Orien- tierungs- ausgleichung
1	2	3	4	5
1	113 46 21·7	21·1	21·1	20·2
2	108 04 42·0	42·7	42·7	42·3
3	69 12 19·9	19·8	19·8	19·9
4	249 12 19·9	19·7	19 8	19·9
5	211 10 11·8	13·2	13·3	11·9
6	187 25 50·9	49·7	49·8	50·0
7	7 25 49·2	50·2	49 8	50·0
8	288 04 42·0	43·1	42·7	42·3
9	275 35 20·4	18·3	17·9	17·1
10	95 35 13·9	15·4	17·9	17·1
11	31 10 11·8	10·8	13·3	11·9
12	293 46 19·1	18·6	21·1	20·2

Spalte 2 enthält die 12 beobachteten, unausgeglichenen Richtungen, worin wohl die beliebig angenommenen Richtungen 3 mit 4, 2 mit 8 und 5 mit 11 bis auf 180° vollkommen übereinstimmen, nicht aber die Richtungen 1 mit 12, 6 mit 7 und 9 mit 10.

Spalte 3 enthält die nach der Methode II ausgeglichenen, aber noch nicht orientierten Richtungen, worin keine Richtung mit ihrer Gegenrichtung auf 180° abgestimmt ist.

Spalte 4 enthält die nach Methode II ausgeglichenen und durch bloßen Anschluß an die willkürlich gewählten Strahlen 1, 2 und 3 orientierten Richtungen. Z. B.:

Feste Richtung I	113°46' 21.1"
	180
orientierte Richtung 12	293 46 21.1
nicht orientierte Richtung 12	293 46 18.6
Orientierungswinkel	+ 2.5
nicht orientierte Richtung 11	31 10 10.8
orientierte Richtung 11	31 10 13.3
usw.	

Spalte 5 enthält die nach meiner Methode III zugleich auch in ihren Orientierungen ausgeglichenen Richtungen. Hier stimmen alle sechs Richtungs-paare bis auf 180° sofort vollkommen überein.

Die folgende Tabelle bringt die nach den drei Methoden I, II und III erhaltenen Winkelverbesserungen.

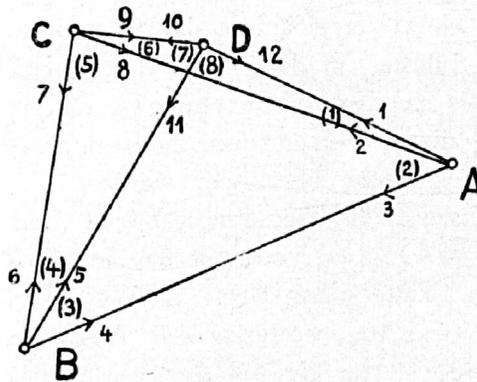


Fig. 2.

Winkel Nr.	Beobachtete Winkel	Verbesserungen nach der Methode		
		I	II	III
1	5° 14' 39.7"	- 1.8"	- 1.3"	- 1.8"
2	38 52 22.1	- 0.3	+ 0.8	+ 0.3
3	38 02 08.1	- 0.9	- 1.6	- 0.1
4	23 44 20.9	+ 1.7	+ 2.6	+ 1.0
5	79 21 07.2	+ 1.2	- 0.1	+ 0.5
6	12 29 21.6	+ 3.2	+ 3.2	+ 3.6
7	64 25 02.1	+ 2.1	+ 2.5	+ 3.1
8	97 23 52.7	+ 0.4	- 0.5	- 1.0

Ist das Netz kein ebenes, so sind die Richtungen im Hin- und Hergange auf 180° + Ordinaten-Konvergenz abzustimmen.