

Paper-ID: VGI_191304



Über eine Anwendung der graphostatischen Methode auf den Ausgleich von Beobachtungsergebnissen

Alfred Basch ¹

¹ *Adjunkt der k. k. Normal-Eichungs-Kommission, Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **11** (1, 2), S. 11–18, 42–46

1913

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Basch_VGI_191304,  
  Title = {{\U}ber eine Anwendung der graphostatischen Methode auf den  
    Ausgleich von Beobachtungsergebnissen},  
  Author = {Basch, Alfred},  
  Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {11--18, 42--46},  
  Number = {1, 2},  
  Year = {1913},  
  Volume = {11}  
}
```



e) Bezeichnung der Länge der Wiener Klafter und der Toise.

In dieser Beziehung ist folgendes zu bemerken:

Auf der oberen Fläche des Etalons, und zwar in dessen Mitte, ist eine Linie der ganzen Länge nach gezogen. Auf dieser Linie befinden sich die mit einer stählernen, konischen Spitze senkrecht eingestochenen, mit A , K und T bezeichneten Punkte, welche die Endpunkte der Wiener Klafter = AK und jene der Toise = AT sind. Durch ein öfteres oder unvorsichtiges Abtragen des Wiener und französischen Maßes würden bald die vorerwähnten Endpunkte beschädigt werden, was eine Unsicherheit in der Länge dieses Maßes zur Folge hätte. Damit nun diese Punkte geschont bleiben, wurden oberhalb und unterhalb derselben 4 Nebenteilungspunkte eingestochen, deren man sich in Fällen, wo nicht eine äußerste Schärfe bedingt wird, bei der Abtragung der Maße bedienen kann.

f) Aufschrift.

Als Dokument und Erläuterung ist nach geschehener Etalonierung und Vergleichung nachstehende Aufschrift auf der oberen Fläche des eisernen Klafterstabes eingraviert worden:

«Anno Ch: 1817, mens: Febru: Viennae Curante A. Fallon suprem: Castrorum praefecturae colonello et in jmp: aust: astro: trigonom: mappationis Directore. Thermometro Reaumuriano pone regulam ferream collocato, signante $g^{\circ} + 13$. Translatae sunt, ex puncto A in punctum K , longitudo Orgyae Viennensis, et ex puncto A in punctum T , longitudo Orgyae Parisinae (Toise du Perou). Distantia inter puncta AK et AT accurata cum modulo Orgyae ferreae astron: observ: Universitatis et polytech: Institut: Viennensis collocatione comprobata est.

Von diesem Normalmaß wurden noch weitere Etalons zum dienstlichen Gebrauche angefertigt. (Fortsetzung folgt.)

Über eine Anwendung der graphostatischen Methode auf den Ausgleich von Beobachtungsergebnissen.*)

Von Ingenieur **Dr. Alfred Basch**, Adjunkt der k. k. Normal-Eichungs-Kommission, Wien.

Die Aufstellung eines Gesetzes für den Zusammenhang zweier veränderlicher Größen auf Grund mehrerer Einzelbeobachtungen bildet eine ständig wiederkehrende Aufgabe der messenden Technik. In sehr vielen Fällen wird es angemessen erscheinen, diesem Gesetze die möglichste Einfachheit zu geben, es also bei analytischer Formulierung durch eine lineare Gleichung auszudrücken, bei graphischer Darstellung durch eine Gerade als Schaulinie zu versinnbildlichen. Die zur Wahl einer so einfachen Gesetzesform bestimmenden Gründe können positiver oder negativer Natur sein. Positive Gründe wären: Die Kenntnis der

*) Mit Bewilligung des Autors und der Redaktion der «Mitteilungen des k. k. technischen Versuchsamtes, I. Jahrgang, Wien 1912» zum Abdrucke gebracht.

in früheren analogen Fällen gemachten Erfahrungen oder, was manchmal dasselbe bedeutet, die Kenntnis eines den Zusammenhang der zwei Größen bestimmenden Naturgesetzes, das durch eine lineare Gleichung ausgedrückt ist, in der einzig und allein die Konstanten zu bestimmen sind. Ein bekanntes Beispiel hierfür bietet die Bestimmung der Wärmeausdehnung der meisten Metalle innerhalb gewisser Temperaturgrenzen. In ähnlicher Weise kann die Kenntnis der Herstellungsmethode einer Instrumentenskala oder die Kenntnis des Alterungsprozesses, den das Instrument oder ein wesentlicher Bestandteil desselben zwischen Herstellung und Eichung der Skala durchmacht, zu dem Bestreben führen, die Korrekturen als lineare Funktionen der Anzeigen des Instrumentes darzustellen. So pflegt bei Federmanometern im Laufe der Zeit neben einer Verlegung des Nullpunktes eine Änderung des Wertes der Skalenteile infolge der Veränderung der Elastizitätsverhältnisse einzutreten. Ersieht man aus einer Beobachtungsreihe, daß auch ein komplizierteres Gesetz als das lineare, z. B. das parabolische, nur eine wenig erheblichere Übereinstimmung ergibt, so liegt in vielen Fällen ein hinreichender Grund negativer Natur vor, die einfachere Form, also die lineare, dem aufzustellenden Gesetze zugrunde zu legen. Insbesondere wäre es dann zwecklos, ein komplizierteres Gesetz aufzustellen, wenn schon bei dem einfachen der mittlere Beobachtungsfehler der ganzen Reihe, das ist die Wurzel aus der durch die Zahl der Überbestimmungen dividierten Fehlerquadratsumme, kleiner ist als die Unsicherheit der einzelnen Beobachtungen selbst.

Den zwei Methoden, den Zusammenhang zweier Größen darzustellen, der analytischen und der graphischen, entsprechen zwei Möglichkeiten, das Gesetz zu finden, der rechnerische und der zeichnerische Vorgang. Der Vorteil des rechnerischen, der Gauß'schen Methode der kleinsten Quadrate entsprechenden Verfahrens ist die größere Genauigkeit, der Nachteil allerdings die Umständlichkeit und Langwierigkeit der Zahlenrechnungen. Bei der graphischen Darstellung wird gewöhnlich jede einzelne Beobachtung durch einen Punkt dargestellt, dessen orthogonale Koordinaten den gefundenen Zahlenwerten der beiden veränderlichen Größen proportional sind. Zwischen den die einzelnen Beobachtungen versinnbildlichenden Punkten — ihre Gesamtheit sei im Weiteren das «Beobachtungsbild» genannt — wird nun die Schaulinie hindurchgeführt. Eine Figur, welche Schaulinie und Beobachtungsbild vereinigt, warnt in augenfälliger Weise vor Überschätzung der Genauigkeit, während ein analytischer Ausdruck nur allzu leicht hierzu verleitet. Bei der Zeichnung der Schaulinie nach dem Gefühl ist der Willkür großer Spielraum gelassen. Wenn zwei verschiedene Personen unabhängig voneinander durch ein und dasselbe Beobachtungsbild die Schaulinie ziehen, ist mit Sicherheit zu erwarten, daß sie nicht zu ein und derselben Kurve gelangen. Diese Unbestimmtheit bei der gefühlsmäßigen Einzeichnung schwindet keineswegs, wenn von vornherein festgesetzt wird, der Schaulinie die Form einer Geraden zu geben. Im Folgenden möge, um diese Unsicherheit bei dem zeichnerischen Vorgange zu beheben, zunächst die geometrische Stellung der dem wahrscheinlichsten linearen Gesetze entsprechenden geraden Schaulinie innerhalb des Beobachtungsbildes definiert und im Anschlusse daran

eine konstruktive, der graphischen Statik entnommene Methode zur Bestimmung dieser Geraden erläutert werden.

Die Beobachtungen mögen für die beiden voneinander abhängigen Größen x und y n Wertepaare $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots x_n, y_n$ ergeben haben. Es sei die Annahme gerechtfertigt, daß die bei der Messung der Größen x begangenen Fehler im Vergleiche zu jenen, die bei der Feststellung von y vorkommen, sehr klein sind. Ein solcher häufig zutreffender Fall liegt z. B. bei der Bestimmung des Wärmeausdehnungskoeffizienten eines Stabes vor, da die Fehler der Längenbestimmung jene der Temperaturmessung meist überwiegen (Kohlrausch). $g_1, g_2, \dots g_n$ seien die Gewichte der Beobachtungen $y_1, y_2, \dots y_n$, d. h. den Quadraten der wahrscheinlichen Fehler dieser Beobachtungen verkehrt proportionale Werte. Wenn $f(x) = A + Bx$ den dem aufzustellenden Gesetze entsprechenden Wert der Größe y bedeutet, so ist die zwischen dem beobachteten und dem berechneten, beziehungsweise sich aus der Schaulinie ergebenden Werte bestehende Abweichung

$$u = f(x) - y = A + Bx - y.$$

Als Folge des Gauß'schen Prinzips, das verlangt, daß der Ausdruck $\sum g_i u^2$ zu einem Minimum wird, ergibt sich

$$A = \frac{\sum g y \sum g x^2 - \sum g x \sum g x y}{\sum g \sum g x^2 - (\sum g x)^2},$$

$$B = \frac{\sum g \sum g x y - \sum g x \sum g y}{\sum g \sum g x^2 - (\sum g x)^2}.$$

Man denke sich nun in den einzelnen Beobachtungen im orthogonalen Koordinatensystem versinnbildlichen Punkten P den Gewichten dieser Beobachtungen g proportionale Massen konzentriert. Dann bedeuten:

$$G = \sum g,$$

das Gesamtgewicht des Beobachtungsbildes,

$$S_x = \sum g y, \quad S_y = \sum g x,$$

seine statischen Momente in bezug auf die Achsen x beziehungsweise y

$$I_y = \sum g x^2,$$

das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse y und schließlich

$$I_{xy} = \sum g x y$$

das Zentrifugal- oder Deviationsmoment in bezug auf das Achsensystem xy . Die beiden Konstanten in der Gleichung der geraden Schaulinie sind dann:

$$A = \frac{S_x I_y - S_y I_{xy}}{G I_y - S_y^2}, \quad B = \frac{G I_{xy} - S_x S_y}{G I_y - S_y^2}.$$

Bezeichnen $x_s = \frac{S_y}{G}$ und $y_s = \frac{S_x}{G}$ die Koordinaten des Schwerpunktes des

Beobachtungsbildes, so bestehen zwischen den Momenten zweiten Grades in bezug auf die Koordinatenachsen x und y und den analogen Momenten in bezug auf die zu ihnen parallelen Schwerpunktsachsen ξ und η dem Steiner'schen Satze entsprechend die Beziehungen:

$$I_y = I_\eta + G x_s^2, \quad I_{xy} = I_{\xi\eta} + G x_s y_s.$$

demnach enthält diese Gerade die Berührungspunkte der vertikalen Tangenten und es ergibt sich der Satz:

«Die das wahrscheinlichste lineare Gesetz darstellende Gerade ist der zur y -Richtung konjugierte Diameter der Zentrallengipse des Beobachtungsbildes.»*)

Es ist aber zur Konstruktion der Schaulinie durchaus nicht notwendig, erst die Zentrallengipse zu bestimmen. Es ist ja ersichtlich, daß zur Definition einer Ellipse, deren Mittelpunkt — hier der Schwerpunkt S des Beobachtungsbildes — schon bekannt ist, noch drei Bestimmungsstücke — im vorliegenden Falle drei Momente zweiten Grades in bezug auf Schwerpunktsachsen — notwendig sind. Die Neigung der Schaulinie ist hingegen schon durch zwei derartige Momente, I_η und $I_{\xi\eta}$, bestimmt, während die Größe des Trägheitsmomentes in bezug auf die Achse ξ für die vorliegende Aufgabe völlig bedeutungslos ist.

Der der y -Richtung konjugierte Diameter der Zentrallengipse enthält die den Geraden dieser Richtung konjugierten Pole und Antipole, so auch den der y -Achse selbst konjugierten Antipol Z . Dieser besitzt die Koordinaten

$$x_z = x_s + \frac{i_\xi^2}{x_s} = \frac{x_s^2 + i_\xi^2}{x_s} = \frac{Gx_s^2 + I_\eta}{S_y} = \frac{I_y}{S_y} = \frac{\sum gx^2}{\sum gx},$$

$$y_z = y_s + \frac{i_\xi j_\eta}{x_s} = \frac{x_s y_s + i_\xi j_\eta}{x_s} = \frac{Gx_s y_s + I_{\xi\eta}}{S_y} = \frac{I_{xy}}{S_y} = \frac{\sum gxy}{\sum gx}.$$

Würden in den die einzelnen Beobachtungen darstellenden Punkten (P) parallele Kräfte von dem Betrage gx angreifen, so wäre Z der Angriffspunkt der Resultierenden dieser Kräfte. So z. B. das Zentrum von Flüssigkeitsdrücken auf kleine Querschnitte g in der Tiefe x unter dem durch die y -Achse dargestellten Niveau. Ähnliche bekannte Analogien liefern die Lehre von der Biegung, die Theorie des Stoßes und die Pendeltheorie.

Als Kräftemittelpunkt kann der Antipol Z ebenso wie der Schwerpunkt S auf graphostatischem Wege leicht gefunden werden.

In Figur 2 versinnbildlichen die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 vier Beobachtungen. Um den Schwerpunkt des Beobachtungsbildes S zu finden, läßt man zunächst in diesen vier Punkten den Gewichten g_1, g_2, g_3 beziehungsweise g_4 proportionale, zur y -Achse parallele Kräfte angreifen. Oben in der Figur ist das betreffende Kräftepolygon mit der Basis h gezeichnet. Der Schnittpunkt A der Schlußseiten des zugehörigen Seilpolygons $AA_1A_2A_3A_4$ ist ein Punkt der Resultanten dieses Kräftesystems. Nun drehe man sämtliche Kräfte um 90° . Die Zeichnung eines neuen Kräftepolygons ist unnötig, da die einzelnen Seiten des zweiten Seilpolygons $BB_1B_2B_3B_4$ zu den gleichvielten Seiten des ersten Seilpolygons senkrecht stehen. Die Reihenfolge der Kräfte muß hierbei aufrecht erhalten

*) Statt dieses Diameters die große Achse der Zentrallengipse als Schaulinie einzuführen, wäre selbst bei länglichen Zentrallengipsen nur eine Näherungslösung, die auch bei Maßstabänderungen keineswegs invariant bliebe. Vergl. Föppl, Mitteilungen aus dem Mechanisch-Technischen Laboratorium der K. Technischen Hochschule München. 1909. 31. Heft, S. 20. — Zudem ist die konstruktive Bestimmung des Diameters einfacher als die der Hauptachse

bleiben, daher ist besonders in jenen Fällen einige Aufmerksamkeit erforderlich, in denen bei Übergang von einem Punkte zum nächsten bei stets steigender Abszisse nicht stets ein Steigen oder stets ein Fallen der Ordinate stattfindet.

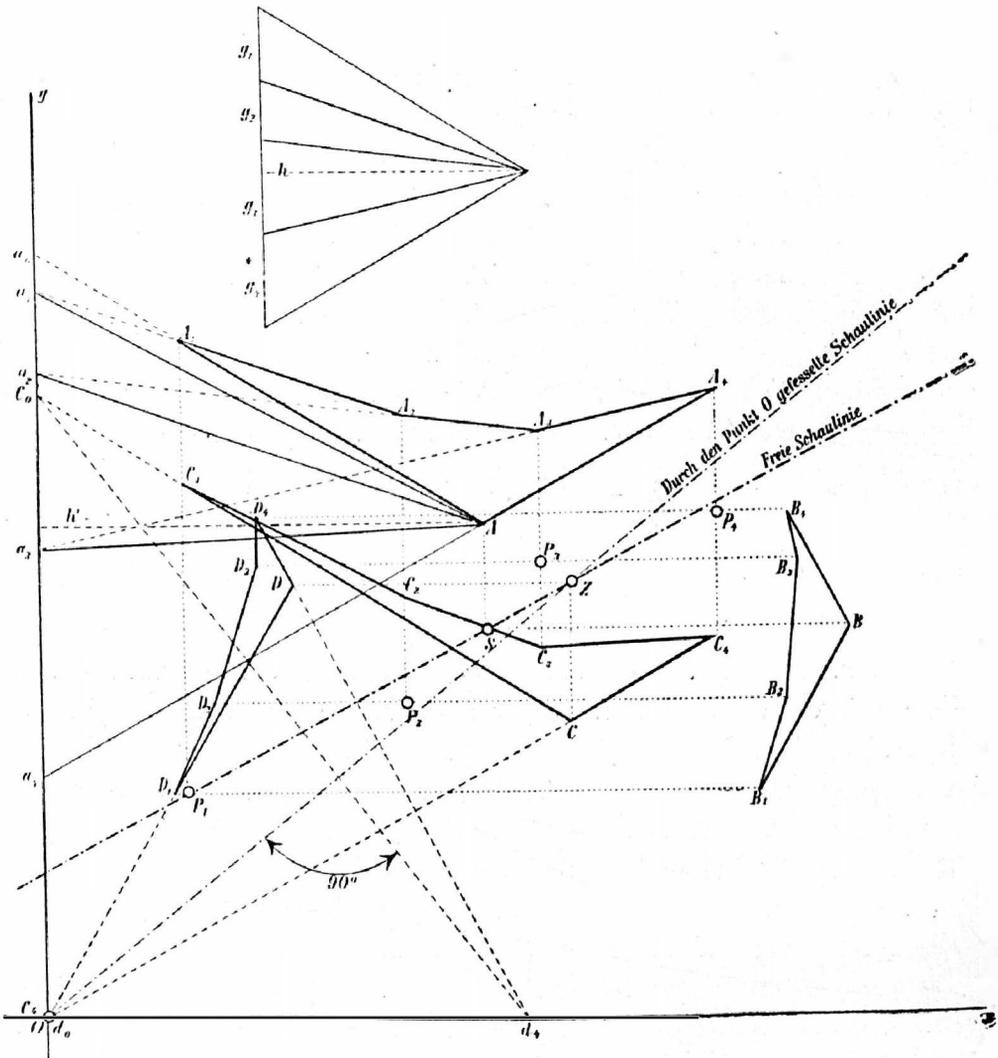


Fig. 2.

Der Schnittpunkt B der Schlußseiten des zweiten Seilpolygons ist ein Punkt der Resultanten des horizontalen Kräftesystems g . Der Schnittpunkt dieser Resultanten mit der durch A gezogenen Resultanten des vertikalen Systems ist der Schwerpunkt S des Beobachtungsbildes. Die aufeinanderfolgenden Seiten des ersten Seilpolygons schneiden aus der y -Achse die den statischen Momenten der Einzelgewichte proportionalen Strecken

$$s_1 = \overline{a_0 a_1} = \frac{g_1 x_1}{h}, \quad s_2 = \overline{a_1 a_2} = \frac{g_2 x_2}{h}, \quad s_3 = \overline{a_2 a_3} = \frac{g_3 x_3}{h}, \quad s_4 = \overline{a_3 a_4} = \frac{g_4 x_4}{h}.$$

Nun lasse man diesen Strecken s proportionale Kräfte in den mit dem gleichen Index bezeichneten Punkten P angreifen, und zwar wieder erst vertikal, dann horizontal. Bei der Zeichnung des Kräftepolygons ist der Einfachheit halber der Punkt A als Pol gewählt. Mit Hilfe der beiden Seilpolygone $CC_1C_2C_3C_4$ mit C und $DD_1D_2D_3D_4$ mit D als Schnitt der Schlußseiten wird der Antipol Z gefunden und durch die beiden Punkte S und Z ist die Schaulinie bestimmt.

Diese Methode versagt, wenn der Schwerpunkt S in die y -Achse fällt, da dann Z als Antipol eines Diameters im Unendlichen liegt. Wenn S der y -Achse nur nahe liegt, kann Z leicht so weit hinausfallen, daß die Methode unpraktisch wird; liegt S hingegen sehr weit von der y -Achse, so wird die Entfernung SZ sehr klein und die Methode hiedurch ungenau. Nun ist aber zu erwägen, daß einzig und allein die Richtung der y -Achse, nicht aber ihr Ort auf die Lage der Schaulinie von Einfluß ist. Die Richtung dieser Linie ist durch das Verhältnis $\frac{I_{yz}}{I_y}$ gegeben. In Abbildung 2 schneiden die Schlußseiten des dritten Seilpolygons aus der y -Achse das Stück c_0c_4 , die Schlußseiten des vierten Seilpolygons aus der x -Achse das Stück d_0d_4 heraus und es lassen sich leicht die Beziehungen nachweisen:

$$\overline{c_0c_4} = \frac{I_y}{hl}, \quad \overline{d_0d_4} = \frac{I_{yz}}{ll'}$$

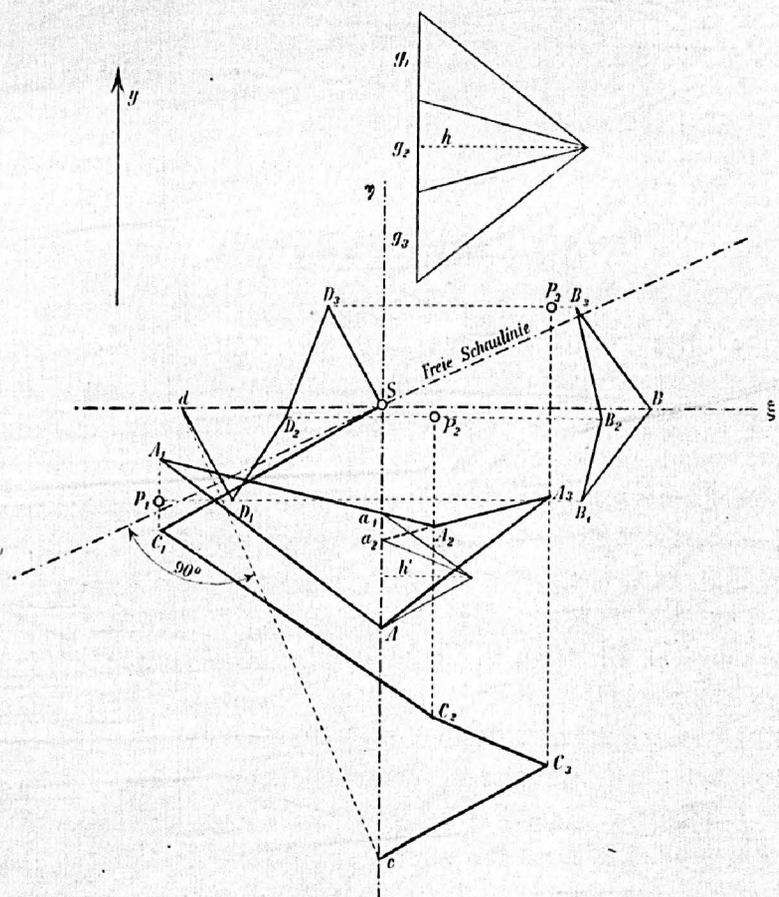


Fig. 3.

wobei h die Basis des ersten, h' die Basis des zweiten Kräftepolygons ist. Das Verhältnis der beiden so gefundenen Strecken gleicht dem Verhältnis der beiden Momente zweiten Grades.

Durch eine geringe Änderung des Verfahrens kann man zu zwei den Momenten I_η und $I_{\xi\eta}$ proportionalen Strecken gelangen. In Figur 3 versinnbildlichen die Punkte P_1 , P_2 und P_3 drei Beobachtungen, die gleiche Gewichte besitzen mögen. Letztere Festsetzung ist keineswegs wesentlich. In der Figur ist nur die Richtung der y -Achse angegeben, die Achsen x und y selbst sind nicht eingezeichnet. Der Schwerpunkt S wird wie früher mit Hilfe der beiden Seilpolygone $AA_1A_2A_3$ und $BB_1B_2B_3$ als Kräftemittelpunkt des Systems der in den Punkten P angreifenden Kräfte g gefunden. Er ist Ursprung des Achsensystems $\xi\eta$. Die Seiten des ersten Seilpolygons schneiden aus der η -Achse die den statischen Momenten in bezug auf diese Achse proportionalen Strecken

$$s_1 = \overrightarrow{Aa_1} = \frac{g_1 \xi_1}{h}, \quad s_2 = \overrightarrow{a_2 A} = \frac{g_2 \xi_2}{h}, \quad s_3 = \overrightarrow{a_3 A} = \frac{g_3 \xi_3}{h},$$

deren Summe naturgemäß Null ist. (s_1 ist negativ, s_2 und s_3 sind positiv). Jedes der beiden zu dem neuen Kräftesystem s gehörigen Seilpolygone $SC_1C_2C_3c$ und $SD_1D_2D_3d$ hat, als zu einem Kräftepaar gehörig, parallele Schlußseiten. Die des ersteren schneiden aus der η -Achse, die Strecke $\overline{cS} = \frac{I_\eta}{hh'}$, die des letzteren aus der λ -Achse die Strecke $\overline{dS} = \frac{I_{\xi\eta}}{hh'}$. Zieht man durch S eine Normale zu cd , so erhält man die gesuchte Schaulinie.

(Schluß folgt.)

Invardraht-Festigkeit.

Bericht von Prof. Dr. Löschner in Brünn

Über meine Bitte wurde ein aus Paris bezogener 2·0 mm starker Draht aus Invar (einer Legierung von 36% Nickel mit 64% Stahl) im Laboratorium der Lehrkanzel für Mechanische Technologie an der Deutschen Franz Josef-Technischen Hochschule in Brünn von dem Adjunkten Ingenieur Otto Fuchs auf seine Zugfestigkeit untersucht. Die Prüfung erfolgte auf einer Festigkeitsmaschine von 50.000 kg Maximal-Preßdruck ohne besondere Spezialeinrichtung. Um trotz der Glätte und des geringen Querschnitts des Drahtes ein sicheres Festhalten in der Maschine zu erreichen, und um den störenden Einfluß der Beißer an den Einspannstellen auf ein Mindestmaß herunterzudrücken, wurden die in die Einspannung fallenden Drahtteile mit starker Schmirgelleinwand umwickelt. Bei dem sehr homogenen Material reichten freilich auch die äußerst unbedeutenden, durch die Beißer bewirkten Schwächungen des Querschnittes dazu hin, daß im kritischen Augenblick das Reißen stets am Ende der Einspannung erfolgte. Es wurden vier Versuche durchgeführt. Das Zerreißen des Drahtes erfolgte bei Belastungen von 310 kg, 310 kg, 340 kg und 340 kg. Da der Querschnitt des Drahtes 3·1416 mm² betrug, berechnen sich die Höchstbeanspruchungen mit 98·7, 98·7,

angestellt werden, gelangte nicht zur Ausführung. (Siehe hierüber: «Journal de Pharmacie et de sciences accessoires», Oktoberheft 1830.)

Dies war der Stand der Verhandlungen mit Schluß des Jahres 1830.

(Schluß folgt.)

Über eine Anwendung der graphostatischen Methode auf den Ausgleich von Beobachtungsergebnissen.

Von Ingenieur **Dr. Alfred Basch**, Adjunkt der k. k. Normal-Eichungs-Kommission, Wien.

(Schluß.)

Eine Kontrolle der Richtigkeit und Genauigkeit ergibt sich aus der leicht nachweisbaren, für die Richtigkeit notwendigen aber nicht hinreichenden Bedingung $\sum gu = 0$, d. h. die algebraische Summe der mit den Gewichten multiplizierten Abweichungen der beobachteten Werte von y von den aus der Schaulinie erhältlichen Werten muß Null ergeben. Es ist das eine Kontrolle, die nur durch die Kleinheit der in Betracht kommenden Strecken erschwert wird. In Abbildung 3 müßte, da allen Beobachtungen gleiches Gewicht zugeschrieben wurde, die algebraische Summe der Abweichungen Null sein.

Zum Schlusse möge ein von dem bisher behandelten nur wenig verschiedenes Ausgleichsproblem der Meßtechnik betrachtet werden. Der zwischen den beiden veränderlichen Größen x und y angenommene Zusammenhang sei wieder linear. Nur sei diesmal für einen bestimmten Wert der einen Größe, x_0 , ein bestimmter Wert der anderen Größe, y_0 , vorgeschrieben. Die Aufgabe ist immer auf den einfachen Fall rückführbar, daß die beiden Veränderlichen gleichzeitig verschwinden. Eine solche Bedingung kann oft in der Natur der zu untersuchenden Frage begründet sein. Man denke z. B. an die Eichung eines Instruments mit verschiebbarer Skala, deren Anfangspunkt immer richtig eingestellt werden kann. Oder die im Materialprüfungswesen alltägliche Bestimmung der Elastizität eines dem Hooke'schen Gesetze gehorchenden Materials. Spannung und elastische Dehnung sind ja gleichzeitig Null. Weiters die Bestimmung einer Wellenlänge, wenn mehrere ganzzahlige Vielfache dieses zu berechnenden Wertes gemessen wurden, sofern bei der Längenmessung die Bestimmung der Lage des Anfangspunktes immer wieder unabhängig erfolgte.

In all diesen Fällen ist die Schaugerade infolge des auferlegten Zwanges, durch einen bestimmten Punkt hindurchgehen zu müssen, von vornherein eines Freiheitsgrades beraubt. Das aufzustellende Gesetz hat die Form $\varphi(x) = Cx$, wobei sich wieder Abweichungen (v) zwischen errechneten und beobachteten Werten ergeben. Dem Gauß'schen Prinzip entsprechend muß der Ausdruck $\sum gv^2$ ein Minimum werden. Daher ist

$$C = \frac{\sum gxy}{\sum gx^2} = \frac{I_{xy}}{I_y} = \frac{i_x j_y}{i_x^2} = \frac{x_n y_n + i_x j_n}{x_n^2 + i_x^2} = \frac{y_n + \frac{i_x j_n}{x_n}}{x_n + \frac{i_x^2}{x_n}} = \frac{y_n}{x_n}$$

Aus dieser Gleichung ist zweierlei ersichtlich.

Erstens:

«Die Gerade, die unter Festhaltung der Bedingung, daß die beiden von einander abhängigen Veränderlichen x und y gleichzeitig Null sind, das wahrscheinlichste lineare Gesetz darstellt, ist der zur y -Achse konjugierte Durchmesser der für den Ursprung des Achsensystems als Bezugspunkt gezeichneten Trägheitsellipse des Beobachtungsbildes.»*) (E_0 in Abbildung 1; U ist der Berührungspunkt der zur y -Achse parallelen Tangente, er besitzt die Koordinaten i_x und j_y .)

Zweitens

«Diese Gerade enthält den zur y -Achse durch die Zentralellipse des Beobachtungsbildes zugeordneten Antipol.»

Hervorzuheben wäre, daß der Schwerpunkt des Beobachtungsbildes im allgemeinen außerhalb dieser Schaulinie liegt.

Der Antipol Z kann wie in Abbildung 2 bestimmt werden; OZ ist dann die gesuchte Gerade.

Berücksichtigt man, daß

$$\frac{\overline{d_0 d_4}}{c_0 c_4} = \frac{I_{xy}}{I_y} = C$$

ist, so kann man auch mit Hilfe der Strecken $\overline{c_0 c_4}$ und $\overline{d_0 d_4}$ den Neigungswinkel der durch O gehenden Schaulinie gegen die Abszissenachse erhalten. Am einfachsten ist es, wie in Abbildung 2, bei der Konstruktion des dritten und vierten Seilpolygons von den Punkten c_4 beziehungsweise d_0 auszugehen und diese mit dem Ursprung O des Achsensystems xy zusammenfallen zu lassen. Dann braucht man nur durch O eine Senkrechte zur Geraden $c_0 d_4$ zu ziehen und gelangt so ebenfalls zur Schaulinie. Die letzte Methode versagt auch dann nicht, wenn Z im Unendlichen oder sehr weit außerhalb der Zeichenfläche liegt.

Neben dieser doppelten Konstruktionsmöglichkeit kann hier auch die Bedingung $\sum gv_x = 0$ zur Überprüfung der Richtigkeit und Genauigkeit dienen. Bei der freien, durch keine Nebenbedingung gefesselten geraden Schaulinie hieß es statt dessen $\sum gu = 0$. Dort war die Schaulinie eine Schwerpunktsachse des Beobachtungsbildes, daher mußte das statische Moment Null sein. Die Gleichung $\sum gv_x = 0$ hingegen steht mit dem Satze im Zusammenhange, daß das Zentrifugalmoment eines Systems in bezug auf zwei konjugierte Durchmesser einer Trägheitsellipse dieses Systems den Wert Null besitzt. Die Bedingung $\sum gv_x = 0$ ist für die Richtigkeit der durch den Koordinatenursprung gefesselten Schaugeraden notwendig und gleichzeitig hinreichend.

*) Dieser Satz ergibt sich auch als Folge jenes ähnlich lautenden, der bei dem zuerst betrachteten Ausgleichsproblem gefunden wurde. Man sehe bloß O als einen Punkt an, der eine Beobachtung vom Gewichte *Unendlich* versinnbildlicht.

Das Bestreben, bei Ausgleichsregeln Begriffe der Mechanik zu verwenden, ist älter als die heutige, auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Erwägungen aufgebaute Ausgleichsrechnung. Schon 1709 stellte Cotes die Hypothese auf, daß die wahrscheinlichste Lage eines Punktes, für den mehrere gleich genaue Beobachtungen vorliegen, der Schwerpunkt des Systems der beobachteten Punkte sei. 1805 hat Legendre denselben Satz als Ergebnis der Methode der kleinsten Quadrate ausgesprochen. Mehrere Scheinbeweise für die Richtigkeit dieser Methode, so z. B. jener von Ivory (1825), stützen sich auf Analogien mit mechanischen Prinzipien. Vom Laplace'schen Fehlerverteilungsgesetz ausgehend, wies Bravais 1846 nach, daß bei mehrfacher Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene, beziehungsweise im Raum der Schwerpunkt des Systems der beobachteten Punkte von einer Schar konzentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsen, beziehungsweise Ellipsoide umgeben sei, welche die Orte gleicher Wahrscheinlichkeit für seine Lage darstellen.*) Die Achsen dieser geometrischen Gebilde werden «Hauptachsen der Wahrscheinlichkeit» genannt. Bertrand wandte 1888 die Lehren der Wahrscheinlichkeitstheorie auf das Schießwesen an und folgerte, daß die Orte gleicher Treffwahrscheinlichkeit ein System von Ellipsen bilden**), von denen G. Jung im selben Jahre nachwies, daß sie, sofern Zielpunkt und mittlerer Treffpunkt übereinstimmen (Jung sagt: «bei vollkommener Waffe»), zu der Zentralellipse des Trefferbildes konzentrisch, ähnlich und ähnlich liegend sind. Bei einem Fehler mit konstantem Anteil tritt an Stelle der Zentralellipse die Trägheitsellipse in bezug auf den Zielpunkt. Jung erklärt die Zentralellipse des Trefferbildes als Präzisionsmaß der Waffe und empfiehlt sie mit Hilfe graphostatischer Methoden zu konstruieren.†) Die Zahlenangaben der Schießinstruktionen über die Streuung der einzelnen Waffen stehen mit den Dimensionen der Zentralellipse in Zusammenhang. Ihre Achsen heißen «Gruppierungs- oder Orientierungsachsen des Trefferbildes». Sofern Seiten- und Höhenabweichung bei vertikaler Scheibe (beziehungsweise Seiten- und Tiefenabweichung bei horizontaler Zielfläche) voneinander unabhängig sind, stimmen diese Achsen mit der durch den mittleren Treffpunkt gezogenen Vertikalen und Horizontalen (beziehungsweise der Schußrichtung und der zu ihr Senkrechten) überein. Tatsächlich ist das ein Ausnahmefall. Die Klärung des Zusammenhanges der Neigung der Gruppierungsachsen mit der Scheibenentfernung ist ein bisher ungelöstes Problem der äußeren Ballistik.††) Allgemein gilt: Bei auf-

*) «Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs». Mém. prés. par divers savants à l'Acad. roy. des sciences de l'institut de France. IX. pag. 55 ff. Vergl. auch Czuber, «Zur Theorie der Fehlerellipse». Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Jahrg. 1880, LXXXII Band II Abt., S. 698 ff. — Bezüglich der Bedeutung der Fehlerellipse in der Geodäsie vergl. Helmert, Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig, 1872, Andrae, Astron. Nachrichten, Bd. 47.

**) «Sur la probabilité du tire à la cible». Comptes rendus. CVI. pag. 387 ff. und 521 ff.

†) Comtes rendus. CVI. pag. 1001 ff.

††) Bezüglich ausführlicherer Besprechungen des bisher Zitierten und weiterer Literaturangaben vergl. Czuber «Theorie der Beobachtungsfehler». Leipzig 1891, ferner Cranz «Lehrbuch der Ballistik». Erster Band Leipzig 1910; Kozák, Grundprobleme der Ausgleichsrechnung nach der

rechter Scheibe ergibt der zur vertikalen Richtung konjugierte Diameter der Zentralellipse des Trefferbildes für eine bestimmte Seitenabweichung die mittlere zu erwartende Höhenabweichung; umgekehrt für eine bestimmte Höhenabweichung der zur horizontalen Richtung konjugierte Diameter die mittlere zu erwartende Seitenabweichung. Je zwei konjugierte Diameter der Zentralellipse deuten die Richtungen der von einander unabhängigen Komponenten der Abweichung an.

Von ganz analogen Betrachtungsweisen macht heute die somatische Anthropologie Gebrauch. In einem ausführlichen Referate «Die Theorie der Korrelation» bespricht Karl E. Ra n k e mehrere in dieses Gebiet gehörige Arbeiten englischer Autoren.*) Mit dem Ausdrucke «Korrelation» bezeichnet die heutige Biologie (schärfer als seinerzeit [1797] C u v i e r) die Erscheinung, daß zwei Organe eines und desselben Individuums oder eines irgendwie verbundenen Individuumpaares zueinander in einer derartigen Beziehung stehen, daß sich nach Auswahl einer Reihe von Individuen, die eine bestimmte Größe des ersten Organes (Galtons «Subjekt») aufweisen, das Mittel der korrespondierenden zweiten Organe (Galtons «Relativ») als eine Funktion der Größe des ausgewählten ersten Organes erweist. (Pearson) Galton, der diese Erscheinung als erster der mathematischen Untersuchung unterwarf,**) betrachtete hierbei stets die Abweichungen der Organe vom Mittelwert der Gesamtreihe und wies nach, daß in den meisten Fällen zwischen der Abweichung des Subjektes und dem Mittelwert der zugehörigen Abweichungen des Relativs Proportionalität besteht. Wählt man bei beiden Größen die mittlere quadratische Abweichung als Maßeinheit, so bleibt der Proportionalitätsfaktor, der dann als «Maß der Enge der Korrelation» in der Vererbungslehre auch als «Regressionskoeffizient» bezeichnet wird, ungeändert, wenn man Subjekt und Relativ vertauscht. Sein Wert r muß zwischen $+1$ und -1 liegen. Ist $r = +1$, so spricht man von «vollständiger Korrelation»; in den meisten in der Anthropologie in Betracht kommenden Fällen liegt r zwischen 0 und $+1$; man nennt das «unvollständige positive Korrelation»; durch $r = 0$ ist die Abwesenheit einer Korrelation zwischen den beiden Organen charakterisiert. Pearson hat durch die schon Bravais bekannte Gleichung

$$r = \frac{\sum xy}{n\sigma_1\sigma_2}$$

den praktischen Weg zur Berechnung des Korrelationskoeffizienten angedeutet, den er auch als «Galton'sche Funktion» bezeichnet.***) Hierbei bedeuten: n die

Methode der kleinsten Quadrate. Zweiter Band: Theorie des Schießwesens auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Fehlertheorie. Wien und Leipzig. 1908 und 1910.

*) Archiv für Anthropologie, 1906. Neue Folge Band IV. S. 168 bis 202. Die Kenntnis dieses überaus inhaltreichen Berichtes verdanke ich Herrn Dr. Otto Bryk, der mich, nachdem ich mein Manuskript schon eingereicht hatte, auf ihn aufmerksam machte.

**) «Correlations and their measurement, chiefly from anthropometric data». Proceed Roy. Soc. London, 1889, pag. 135 ff. Vol. XLV.

***) «Mathematical Contributions to the Theory of Evolution III. — Regression, Heredity and Panmixia». Phil. Trans. Roy. Soc. London Vol. 187. A, 1896, pag. 253 bis 318.

Zahl der betrachteten Organpaare, x und y ihre Abweichungen vom Mittelwert, σ_1 und σ_2 die bezüglichen mittleren quadratischen Abweichungen. Hierdurch ist bereits der Zusammenhang dieses Koeffizienten mit Momenten zweiten Grades ausgesprochen. Yule hat zur geometrischen Veranschaulichung der Korrelationserscheinung die «Korrelationsoberfläche» eingeführt, deren Schichtenlinien ein System um den Schwerpunkt gelagerter, konzentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsen bilden. Die zu den Koordinatenrichtungen konjugierten Durchmesser dieser Ellipsen sind die «Regressionslinien».*) Unter den Schichtenlinien wird die die mittleren quadratischen Abweichungen enthaltende «Standart-Ellipse» hervorgehoben, die mit der Culmann'schen Zentralellipse identisch ist. — In der vorliegenden Untersuchung stellt die freie Schaulinie das Analogon zur Regressionslinie der Anthropologie dar. Ihre Neigung gibt — bei entsprechender Maßstabswahl — das «Korrelationsmaß». Die Neigung der durch den Koordinatenursprung «gefesselten Schaulinie» gibt die «mittlere Proportion», die in der vergleichenden Rassen- und in der künstlerischen Anatomie eine gewisse Bedeutung gewinnt.

Es ist durchaus nicht der Zweck dieser Zeilen, das rechnungsmäßige Ausgleichsverfahren durch die hier beschriebene Konstruktionsmethode ersetzen zu wollen. Der rechnerische Vorgang wird insbesondere in jenen Fällen, in denen es auf große Genauigkeit ankommt, einzig und allein angezeigt sein. Diese Studie verfolgte lediglich das Ziel, durch Definition der geometrischen Stellung der geraden Schaulinien innerhalb des Beobachtungsbildes zunächst gewisse Anhaltspunkte für ihre richtige Zeichnung zu bieten, weiters im einfachsten Falle des funktionellen Zusammenhanges zweier veränderlicher Größen den graphischen Ausgleich zu einem exakten Verfahren auszubilden und mit der Gauß'schen Methode der kleinsten Quadrate in Übereinstimmung zu bringen.

Katastralmappe und Generalregulierungspläne.

Von Ingenieur **Heinrich Arlt** in Liesing bei Wien.

(Schluß)

Die Absteckung gestaltet sich so einfach, daß sie fast von jedem Laien richtig ausgeführt werden kann, brauchen doch nur die betreffenden zwei Achspunkte mit einander geradlinig verbunden und an den gewünschten Punkten die entsprechende halbe Straßenbreite rechtwinklig herübergemessen zu werden. Daß die Genauigkeit dabei beliebig hoch getrieben werden kann, dürfte in manchem Falle auch ein Vorteil sein.

Ist die Straße und mit ihr die Baulinie zwischen den zwei Achspunkten gebogen, so gestaltet sich die Sache wohl ein wenig schwieriger, geht aber

*) «On the Theory of Correlation». Journal of the statistical Society, 1897, Vol. 60 pag 812 ff.