Eine Gleichungsmaschine aus kommunizierenden Gefäßen

Karl Fuchs [1]

[1] *Preßburg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **10** (11), S. 325–329

1912

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 11. **Wien, am 1. November 1912.** X. Jahrgang.

Eine Gleichungsmaschine aus kommunizierenden Gefäßen.

Von Professor **Karl Fuchs** in Preßburg.

Es sei ein System von linearen Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + \ldots = l_1 \\ a_2 x + b_2 y + \ldots = l_2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Es habe ebensoviel oder mehr Gleichungen als Unbekannte.

Im «Archiv der Math. und Phys.» ist ein Näherungsverfahren beschrieben, (K. Fuchs: Näherungsweise Elimination durch Mittelwerte), das solche Gleichungssysteme auflöst, das auch schon in der «Oesterreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen» (K. Fuchs: Ein Näherungsverfahren in der Methode der kleinsten Quadrate) beschrieben worden ist. Das Ergebnis soll kurz angegeben werden, denn nach diesem Verfahren soll die Maschine arbeiten.

Aus den gegebenen Absoluten $l_1\, l_2 \ldots$ berechnen wir Werte $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots$:

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{a_1 + b_1 + \ldots} \qquad \lambda_2 = \frac{l_2}{a_2 + b_2 + \ldots} \qquad \ldots\ldots \quad 2)$$

In den Nennern sind alle Koeffizienten positiv zu rechnen, auch die, die in den gegebenen Gleichungen 1) negativ erscheinen. Aus diesen Werten $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots$ berechnet man die ersten Näherungswerte $\xi\, \eta \ldots$ der Unbekannten $x\, y \ldots$:

$$\xi = \frac{a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \ldots}{a_1 + a_2 + \ldots} \qquad \eta = \frac{b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + \ldots}{b_1 + b_2 + \ldots} \qquad \ldots\ldots \quad 3)$$

In den Zählern erhalten die Koeffizianten dasselbe Vorzeichen, das sie in den gegebenen Gleichungen 1) zeigen; in den Nennern aber sind alle Koeffizienten positiv zu nehmen.

Die Größen $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots$ wollen wir die Fehler der gegebenen Gleichungen 1) nennen. Aus den Werten $\xi\, \eta \ldots$ berechnen wir dann die Besserungen $\lambda_1'\, \lambda_2' \ldots$ der Fehler $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots$:

$$\lambda_1' = \frac{a_1\xi + b_1\eta + \ldots}{a_1 + b_1 + \ldots} \qquad \lambda_2' = \frac{a_2\xi + b_2\eta + \ldots}{a_2 + b_2 + \ldots} \qquad \ldots \qquad \ldots 4)$$

Auch in diesen Gleichungen sind die Koeffizienten in den Zählern mit dem eigenen Vorzeichen, in den Nennern aber alle positiv zu nehmen. Die Besserungen sind von den alten Gleichungsfehlern $\lambda_1 \lambda_2 \ldots$ abzuziehen und wir finden die neuen Gleichungsfehler:

$$\lambda_1 - \lambda_1' \qquad \lambda_2 - \lambda_2' \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots 5)$$

Die Reihenfolge der Berechnungen gibt also folgendes Schema:

Alte Gleichungsfehler:	Zuwachse der Unbekannten:	Besserungen der Gleichungsfehler:	Neue Gleichungsfehler:	
$\lambda_1 \lambda_2 \ldots$	$\xi \eta \ldots$	$\lambda_1' \lambda_2' \ldots$	$\lambda_1 - \lambda_1',\ \lambda_2 - \lambda_2', \ldots$	6)

Aus den Gleichungen 3) und 4) sehen wir: die Zuwachse (Näherungswerte) $\xi \eta \ldots$ der Unbekannten $x y \ldots$ sind Mittelwerte der vorhandenen Gleichungsfehler $\lambda_1 \lambda_2 \ldots$, und die Besserungen $\lambda_1' \lambda_2' \ldots$ der Gleichungsfehler sind Mittelwerte der Zuwächse $\xi \eta \ldots$

In der «Oesterreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen» ist der weitere Gang des Näherungsverfahrens nur angedeutet; er soll hiemit genau entwickelt werden.

Die Gleichungen 3) haben eine einfache, aber wichtige Eigenschaft. Die Größen λ sollen aus Stufen zusammengesetzt sein, also in der Form

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 7)$$

erscheinen. Die Gleichung für ξ lautet dann:

$$\xi = \frac{a_1(\lambda_1 + \lambda_1' + \ldots) + a_2(\lambda_2 + \lambda_2' + \ldots) + \ldots}{a_1 + a_2 + \ldots} \qquad \ldots\ldots 8)$$

Offenbar können wir dann auch das ξ aus Stufen zusammengesetzt denken:

$$\xi + \xi' + \xi'' + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 9)$$

und jede Stufe besonders berechnen:

$$\xi = \frac{[a\lambda]}{[a]} \qquad \xi' = \frac{[a\lambda']}{[a]} \qquad \xi'' = \frac{[a\lambda'']}{[a]} \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots 10)$$

und das Gleiche gilt für die $\eta\ \xi \ldots$

Für die Gleichungen 4) gilt dasselbe. Die Zuwachse $\xi \eta \ldots$ sollen aus Stufen zusammengesetzt sein:

$$\xi + \xi' + \ldots \qquad \eta + \eta' + \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots 11)$$

Dann können wir auch die Besserungen λ' aus Stufen bestehend denken:

$$\lambda' + \lambda'' + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 12)$$

und es gilt dann:

$$\lambda' = \frac{a\xi + b\eta + \ldots}{a + b + \ldots} \qquad \lambda'' = \frac{a\xi' + b\eta' + \ldots}{a + b + \ldots} \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots 13)$$

Diese Theoreme wenden wir sofort an, um aus den Gleichungsfehlern 5) in einem zweiten Turnus neue verbesserte Gleichungsfehler zu berechnen. Wir halten uns an das Schema 6). Aus den vorhandenen Fehlern

$$\lambda_1 - \lambda_1' \qquad \lambda_2 - \lambda_2' \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots 14)$$

berechnen wir nach 8) neue Zuwachse der Unbekannten:

$$\xi - \xi' \qquad \eta - \eta' \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots \quad 15)$$

Da wir hier die Stufen $\xi\ \eta \ldots$ schon kennen, haben wir nur die Stufen $\xi'\ \eta' \ldots$ aus den Stufen $\lambda_1'\ \lambda_2' \ldots$ zu berechnen:

$$\xi' = \frac{[a\lambda']}{[a]} \qquad \eta' = \frac{[b\lambda']}{[b]} \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots \quad 16)$$

Sodann haben wir laut Schema 6) aus den Zuwachsen 15) die neuen Fehlerbesserungen

$$\lambda_1' - \lambda_1'' \qquad \lambda_2' - \lambda_2'' \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots \quad 17)$$

zu rechnen. Wieder sind uns die Stufen $\lambda_1'\ \lambda_2' \ldots$ schon bekannt, und wir haben nur die Stufen $\lambda_1''\ \lambda_2'' \ldots$ aus $\xi'\ \eta' \ldots$ zu berechnen:

$$\lambda_1'' = \frac{a_1\xi' + b_1\eta' + \ldots}{a_1 + b_1 + \ldots} \qquad \lambda_2'' = \frac{a_2\xi' + b_2\eta' + \ldots}{a_2 + b_2 + \ldots} \quad \ldots \quad 18)$$

Die Besserungen 14) haben wir laut Schema 6) von den alten Fehlern 14) abzuziehen und erhalten aus dem zweiten Turnus die verbesserten Fehler:

$$\lambda_1 - 2\lambda_1' + \lambda_1'' \qquad \lambda_2 - 2\lambda_2' + \lambda_2'' \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots \quad 19)$$

Wir erkennen das Auftreten des Binomialbaues und können sofort die Ausdrücke für die Fehler nach dem n-ten Turnus anschreiben; sie haben die allgemeine Form:

$$\lambda - n_1\lambda' + n_2\lambda'' - n_3\lambda''' + \ldots \qquad \ldots\ldots \quad 20)$$

wo $n_1\ n_2 \ldots$ die Binomialkoeffizienten sind.

Den dritten Turnus beginnen wir wieder nach Schema 6) und berechnen aus den vorhandenen Fehlern 19) die neuen Zuwachse der Unbekannten, die wir entsprechend 19) so schreiben können:

$$\xi - 2\xi' + \xi'' \qquad \eta - 2\eta' + \eta'' \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots \quad 21)$$

Die Stufen $\xi\ \eta \ldots$ sind uns bekannt; auch die Stufen $\xi'\ \eta' \ldots$ sind uns bekannt, und wir haben nur die Stufen $\xi''\ \eta'' \ldots$ aus $\lambda_1''\ \lambda_2'' \ldots$ zu berechnen:

$$\xi'' = \frac{[a\lambda'']}{[a]} \qquad \eta'' = \frac{[a\lambda'']}{[b]} \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots \quad 22)$$

Aus 21) erkennen wir den Binomialbau, und wir finden für die n-ten Zuwachse die Ausdrücke:

$$\begin{array}{l} \xi - n_1\xi' + n_2\xi'' - \ldots \\ \eta - n_1\eta' + n_2\eta'' - \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad \ldots\ldots \quad 23)$$

wo wieder $n_1\ n_2 \ldots$ die Binomialkoeffizienten sind.

Wir wollen uns mit n Stufen der Zuwachse begnügen. Für die Unbekannte x haben wir dann die folgenden konsekutiven Zuwachse gefunden:

$$\begin{array}{l} x = \xi \\ \quad + \xi - \xi' \\ \quad + \xi - 2\xi' + \xi'' \\ \quad + \xi - 3\xi' + 3\xi'' - \xi''' \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad \ldots\ldots \quad 24)$$

Die Summe dieser Zuwachse ist also für die einzelnen Unbekannten:

$$x = n_1 \xi - n_2 \xi' + n_3 \xi'' - \ldots$$
$$y = n_1 \eta - n_2 \eta' + n_3 \eta'' - \ldots \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots 25)$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Wenn wir die Fehler der Gleichungen allgemein mit $\lambda_1 \lambda_2 \ldots$ bezeichnen, dann machen die so bestimmten Werte $x y \ldots$ die Funktion

$$\Sigma = (a_1 + b_1 + \ldots) \lambda_1^2 + (a_2 + b_2 \ldots) \lambda_2^2 + \ldots \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots 26)$$

zu einem Minimum, wobei alle Koeffizienten positiv zu nehmen sind. Die Fehlerquadrate haben also Gewichte. Wenn wir das vermeiden wollen, dann müssen wir die gegebenen Gleichungen 1) zuvor so erweitern, daß die numerische Summe der Koeffizienten in jeder Gleichung denselben Betrag q ergibt; dann wird gelten:

$$\Sigma = q (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots) = \text{Min.} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots 27)$$

Wenn wir zurückblicken, haben wir alternierend nach den beiden Schemen 3) und 4) folgende Rechnungen wirklich anzuführen.

Aus den gegebenen Werten $\lambda_1 \lambda_2 \ldots$ berechnen wir nach Schema 3) die Mittelwerte $\xi \eta \ldots$

Aus den so gefundenen Werten $\xi \eta \ldots$ berechnen wir nach Schema 4) die Mittelwerte $\lambda_1' \lambda_2' \ldots$

Aus den so gefundenen Werten $\lambda_1' \lambda_2' \ldots$ berechnen wir nach Schema 3) die Mittelwerte $\xi' \eta' \ldots$ usw. alternierend, bis die gefundenen Mittelwerte so klein werden, daß wir sie vernachlässigen können.

Diese Kette von Mittelwerten brauchen wir nicht zu rechnen; wir können sie mittelst kommunizierendem Gefäße bestimmen, und das soll gezeigt werden.

Jedem Koeffizienten der gegebenen Gleichungen 1) entspricht ein Zylindergefäß. Dem Koeffizienten a_1 entspricht ein Gefäß vom Querschnitt a_1 usw. All diese Gefäße stehen im Apparate in Reihen und Kolumnen, ganz so, wie die Koeffizienten in den gegebenen Gleichungen in Reihen und Kolumnen stehen. Man kann die Gefäße sowohl kolumnenweise, als auch reihenweise heben oder senken und sowohl kolumnenweise als auch reihenweise in Kommunikation bringen. Das ist der ganze Apparat.

Wenn wir mittelst des Apparates die Mittelwerte $\xi \eta \ldots$ nach 3) bestimmen werden, dann verfahren wir so.

Wir füllen die Gefäße so weit mit Wasser, daß die Spiegel in allen Gefäßen in derselben fixen Ebene H_0 liegen. Der Apparat ist dann in der Nullstellung.

Darauf geben wir der ersten Gefäßreihe einen Hub λ_1, der zweiten Gefäßreihe einen Hub λ_2 usw. Das ist so zu verstehen. Wenn ein λ positiv ist, dann werden die Gefäße der betreffenden Reihe, die positiven Koeffizienten entsprechen, um λ gehoben; wenn λ aber negativ ist, dann werden sie um λ gesenkt. Die Gefäße aber, die negativen Koeffizienten entsprechen, erhalten den entgegengesetzten Hub.

Dann setzen wir die Gefäße kolumnenweise in Kommunikation (Kolumnenkommunikation). Die Spiegel der ersten Kolumne werden sich dann alle in derselben Höhe ξ über der Ebene H_0 einstellen, in der zweiten Kolumne in einer Höhe η usw. Diese Höhen sind die gesuchten Werte $\xi \eta \ldots$

Wenn wir dann mittelst des Apparates aus den eben bestimmten Werten $\xi\,\eta\ldots$ die Mittelwerte $\lambda_1'\,\lambda_2'\ldots$ bestimmen wollen, dann verfahren wir so. Wir bringen den Apparat in die Nullstellung, geben den Gefäßkolumnen die Hube $\xi\,\eta\ldots$, stellen unter den Gefäßen reihenweise Kommunikation her; es stellen sich dann die Wasserspiegel reihenweise auf gleiche Höhen $\lambda_1'\,\lambda_2'\ldots$ über H_3, und das sind die gesuchten Mittelwerte $\lambda_1'\,\lambda_2'\ldots$

Das war der erste Turnus, der zweite verläuft ebenso usw. Wenn wir so für jede Unbekannte mehrere Stufen $\xi\,\xi'\,\xi''\ldots$ usw. bestimmt haben, berechnen wir die günstigsten Werte $x\,y\ldots$ nach den Gleichungen 25).

Wenn im Laufe der Arbeit die Fehler $\lambda_1\,\lambda_2\ldots$ einmal klein geworden sind, die Gefäßreihen also kleine Hube erhalten sollen, dann werden auch die abgeleiteten Mittelwerte $\xi\,\eta\ldots$ klein ausfallen, also nur ungenau abgelesen werden können. In solchen Fällen gibt man den Reihen die doppelten oder zehnfachen Hube, erhält also auch die doppelten oder zehnfachen Mittelwerte $\xi\,\eta\ldots$; man erhält also gerade besonders genaue Werte. Ebenso macht man es, wenn nicht die Reihen, sondern die Kolumnen kleine Hube bekommen sollen.

Man braucht für den Apparat keine besonders große Auswahl von Zylindergefäßen. Man hat etwa Gefäße von den Querschnitten 10, 20 ... 100; um Einheiten vermindert man dann die Querschnitte durch eingesetzte massive Stäbe oder Zylinder.

Die Kommunikationen erzielt man am einfachsten durch horizontale Rohre, die vertikale Absenker haben, diese tauchen in die Reihen oder Kolumnen von Gefäßen.

Andere Einzelheiten sollen hier nicht besprochen werden.

Noch billiger und bequemer gestaltet sich die Gleichungsmaschine, wenn wir die Mittelwerte nicht mittelst kommunizierender Gefäße, sondern mittelst Wagen bestimmen. So können wir den Wert ξ in 3) bestimmen. Als Wage dient ein Brett, dessen Mittellinie als Achse dient. Quer zur Achse sind Bahnen gezeichnet. Auf der ersten Bahn geben wir einem aufgelegten (prismatischen) Gewichte a_1 einen Arm λ_1, auf der zweiten Bahn einem Gewichte a_2 einen Arm λ_2 usw. Diese Wage equilibrieren wir mit einem Laufgewicht $[a]$; dessen Arm ist das gesuchte ξ. Solche Brettwagen haben wir so viele wie Unbekannte in den gegebenen Gleichungen sind und es ist leicht, den korrespondierenden Gewichten auf den verschiedenen Wagen stets allen mit einem Griff das entsprechende λ zu geben. Ein zweites ganz ähnliches Wagensystem dient zur Bestimmung der λ aus den Zuwachsen $\xi\,\eta\ldots$

Die Werte $x\,y\ldots$, die man, sei es mittelst kommunizierender Gefäße, sei es mittelst Wagensystemen bestimmt hat, setzt man in die gegebenen Gleichungen 1) ein und erhält stark verminderte Werte $l_1\,l_2\ldots$ der Absoluten. Auf Grund dieser Werte kann man das Verfahren wiederholen und so beliebig genaue Werte der Unbekannten bestimmen.

Man sieht aus diesen Beispielen, daß eine gute Gleichungsmaschine, sei es nun eine Eliminiermaschine oder Ausgleichsmaschine, durchaus nicht voluminös und kompliziert und teuer zu sein braucht und durchaus nicht auf Zahnrädern zu beruhen braucht.