Paper-ID: VGI_191234

Ausgleichung nach dem Prinzip der gleichen Zu- und Abgangsflächen

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Bauinspektor der Stadt Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **10** (9), S. 261–266

1912

BibTEX:


```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_191234,
Title = {Ausgleichung nach dem Prinzip der gleichen Zu- und Abgangsfl{\"a}chen
   },
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {261--266},
Number = {9},
Year = {1912},
Volume = {10}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.
ORGAN
DES
VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 9. **Wien, am 1. September 1912.** **X. Jahrgang.**

Ausgleichung nach dem Prinzip der gleichen Zu- und Abgangsflächen.

Von **S. Wellisch,** Bauinspektor der Stadt Wien.

1. Man kann die Frage aufwerfen, welche Eigenschaft eine Kurve, die zwischen die durch Beobachtungen bestimmten Punkte verglichen hindurchgelegt wird, haben müsse, damit sie sich diesen Punkten «möglichst gut anschließe» oder «am besten anpasse».

Die Methode der kleinsten Quadrate bestimmt rechnerisch eine ausgleichende Kurve derart, daß die Summe der eventuell mit Gewichten zu multiplizierenden Quadrate der Abstände aller durch die Beobachtungen gegebenen Punkte von der Ausgleichungskurve ein Minimum wird. Man könnte aber auch geneigt sein, diejenige Kurve als den gegebenen Punkten am besten anpassend zu bezeichnen, welche so verglichen hindurchgelegt ist, daß die Summe aller diesseits der Ausgleichungskurve und die Summe aller jenseits derselben abgeschnittenen Flächen, also die Summe aller Zu- und Abgänge, einander gleich werden, wie dies in Fig. 1 angedeutet ist. Nach diesem Grundsatze werden ja auch G r e n z r e g u l i e r u n g e n vorgenommen, wo bei gleichen Bonitäten die Flächenräume der in Betracht kommenden Grundstücke unverändert bleiben sollen, wie dies Dr. A.

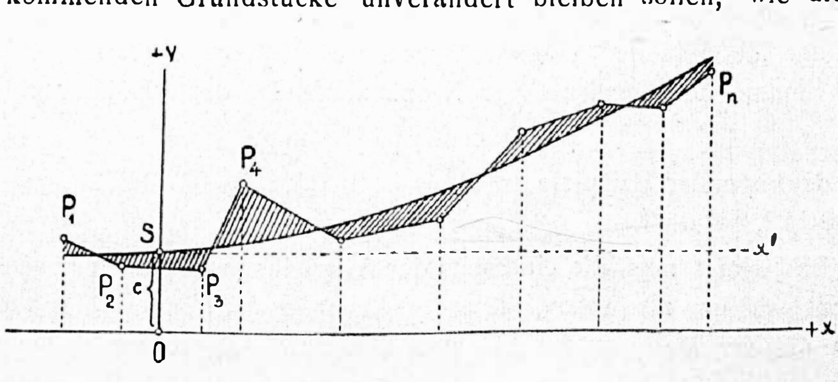

Fig. 1.

Haerpfer in der «Österr. Zeitschr. f. Verm.», 1910, S. 391, ausgeführt hat. Nach demselben Prinzip werden auch Trassierungen von Eisenbahnen und Straßen rationell durchgeführt und die Massenausgleiche getroffen, wobei nur an die Stelle von Flächen die Kubikinhalte treten. Die ökonomischeste Trassenführung ist nämlich diejenige, bei der innerhalb einer bestimmten Strecke die Summe aller Abgrabungen oder Einschnitte gleich wird der Summe aller Anschüttungen oder Dämme, so daß die gesamte Erdbewegung innerhalb der gegebenen Strecke vollzogen werden kann, ohne daß an Erdmaterial noch etwas benötigt oder erübrigt wird. Das Ausgleichen besteht also in der Bildung eines neutralen Zustandes oder in dem Aufsuchen eines Mittelwertes, der so beschaffen ist, daß durch Verminderung des Überflusses auf der einen Seite eine Beseitigung des Mangels auf der anderen Seite herbeigeführt wird, bis jeder Überschuß und Fehlbetrag, jedes Zuviel und Zuwenig verschwunden ist. — Der Meerespiegel befindet sich in Ruhe oder im Gleichgewicht, wenn die Wellen und Wasserwogen geglättet oder ausgeglichen sind.

2. Die einfachste Ausgleichungskurve ist die Gerade. Es seien z. B. folgende überschüssige Gleichungen von der allgemeinen Form $y = xa + b$ gegeben:

$$\begin{aligned} +0{\cdot}46 &= 1{\cdot}09\,a + b \\ +0{\cdot}34 &= 1{\cdot}12\,a + b \\ +0{\cdot}01 &= 1{\cdot}54\,a + b \\ -0{\cdot}67 &= 1{\cdot}82\,a + b. \end{aligned}$$

Die Ermittlung der Unbekannten a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate geschieht durch die Auflösung der Normalgleichungen*)

$$\begin{aligned} 8{\cdot}12\,a + 5{\cdot}57\,b + 0{\cdot}31 &= 0 \\ 5{\cdot}57\,a + 4{\cdot}00\,b - 0{\cdot}14 &= 0 \end{aligned}$$

$$a = -1{\cdot}388, \qquad b = +1{\cdot}968.$$

Somit lautet die Gleichung der wahrscheinlichsten Ausgleichungsgeraden:

$$y = -1{\cdot}388\,x + 1{\cdot}968.$$

Die in der Richtung der Ordinaten gemessenen Abstände der gegebenen Punkte von der Ausgleichungsgeraden sind die Widersprüche v (Fig. 2), die Normalabstände der Punkte von der Geraden sind demnach $\nu = v \cos \alpha$, wenn α den Winkel bezeichnet, unter welchem die Gerade die Abszissenachse schneidet. Da nach der Methode der kleinsten Quadrate $[v^2]$ ein Minimum ist, so ist es auch die Summe der Quadrate der Normalabstände, denn man hat:

$$[\nu^2] = \cos^2 \alpha \, [v^2] = \min.$$

Im vorliegenden Beispiele ist $v_1 = -0{\cdot}005$, $v_2 = +0{\cdot}073$, $v_3 = -0{\cdot}180$, $v_4 = +0{\cdot}112$, $[v] = 0$.

3. Bezeichnet man die einerseits der Ausgleichungsgeraden abgeschnittenen Widerspruchsflächen als positiv, die anderseits abgeschnittenen Flächen als negativ, so liefert die der Methode der kleinsten Quadrate entsprechende Ausgleichungs-

*) Siehe: «Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung», II. Bd., S. 194

gerade (Fig. 2) eine Summe von Widerspruchsflächen, die durch Zerlegung in Dreiecke und Abmessung der Grundlinien und Höhen dieser Dreiecke mittels eines Maßtabes wie folgt gewonnen wird:

$$\tfrac{1}{2} \,.\, 0{\cdot}00 \,.\, 0{\cdot}003 = \quad 0{\cdot}0000$$
$$\tfrac{1}{2} \,.\, 0{\cdot}26 \,.\, 0{\cdot}043 = -\, 0{\cdot}0056$$
$$\tfrac{1}{2} \,.\, 0{\cdot}81 \,.\, 0{\cdot}105 = +\, 0{\cdot}0425$$
$$\tfrac{1}{2} \,.\, 0{\cdot}18 \,.\, 0{\cdot}065 = -\, 0{\cdot}0058.$$

Die Summe der positiven Flächen ist $\Sigma(+f) = +\,0{\cdot}0425$,
die Summe der negativen Flächen ist . . . $\Sigma(-f) = -\,0{\cdot}0114$,
somit besteht eine Differenz von . . . . $\Sigma f = +\,0{\cdot}0311$,
die durch Ausgleichung nach dem Prinzip der gleichen Zu- und Abgänge zum Verschwinden gebracht werden soll.

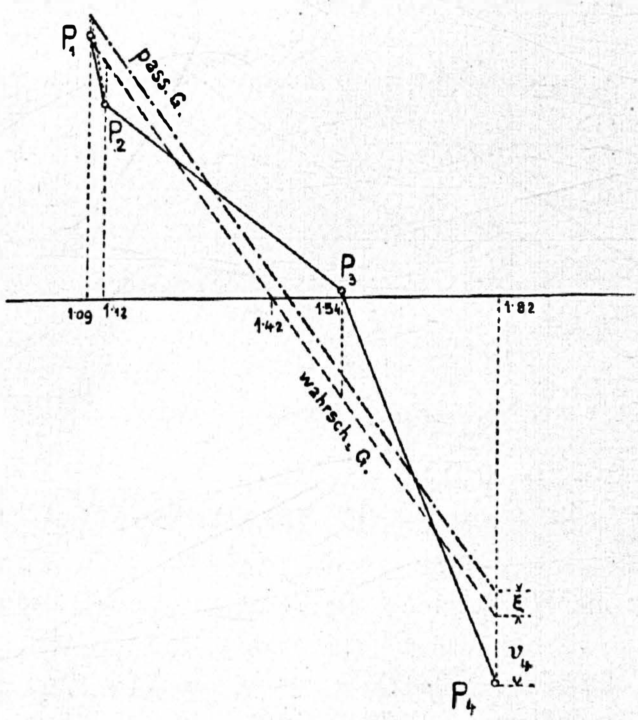

Fig. 2.

Bei Vermeidung einer Drehung der Ausgleichsgeraden verlangt die Verminderung der positiven Widerspruchsflächen bei gleichzeitiger Vergrößerung der negativen Flächen im vorliegenden Beispiele ein Hinaufrücken der Ausgleichungsgeraden. Denkt man sich diese Gerade von ihrer «wahrscheinlichsten Lage» in der Richtung der Ordinatenachse um ξ in die «passendste Lage» parallel verschoben, wobei $\operatorname{tg} \alpha = a$ unverändert bleibt, so geht b in $b + \xi$ über. Um denselben Betrag ξ ändern sich aber auch alle v. Um für die Verschiebungsgröße ξ einen mathematischen Ausdruck zu erhalten, teilen wir die Fläche zwischen dem gebrochenen Linienzug und der Ausgleichungsgeraden durch die Ordinatenlinien in Trapeze, dergestalt, daß sie durch die Ordinatenstücke $v_r + \xi$ und

$v_{r+1} + \xi$ sowie die Normalabstände derselben: $x_{r+1} - x_r$ bestimmt sind. Der Flächeninhalt eines solchen Trapezes ist dann allgemein:

$$\tfrac{1}{2}(x_{r+1} - x_r)(v_r + v_{r+1} + 2\xi).$$

Indem durch die Verschiebung um ξ alle positiven Zugangsflächen und alle negativen Abgangsflächen sich gegenseitig aufheben, muß sich für die Summe aller Trapezflächen der Wert Null ergeben. Man hat somit

$$\begin{array}{c}
\tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)(v_1 + v_2 + 2\xi) \\
\tfrac{1}{2}(x_3 - x_2)(v_2 + v_3 + 2\xi) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\tfrac{1}{2}(x_n - x_{n-1})(v_{n-1} + v_n + 2\xi)
\end{array}$$

$$\{(v_1 x_2 + v_2 x_3 + \ldots + v_{n-1} x_n + v_n x_n) - (v_1 x_1 + v_2 x_1 + v_3 x_2 + \ldots + v_n x_{n-1})\} + $$
$$+ 2(x_n - x_1)\xi = 0$$

$$\xi = \frac{(v_1 x_2 + v_2 x_3 + \ldots + v_{n-1} x_n + v_n x_n) - (v_1 x_1 + v_2 x_1 + v_3 x_2 + \ldots + v_n x_{n-1})}{-2(x_n - x_1)}$$

Führt man in diesen allgemeinen Ausdruck die Zahlenwerte von v und x ein, so erhält man:

$$\begin{array}{rll}
v_1 x_2 = & & -0{\cdot}0056 \\
v_2 x_3 = & +0{\cdot}1124 & \\
v_3 x_4 = & & -0{\cdot}3276 \\
v_4 x_4 = & +0{\cdot}2038 & \\
-v_1 x_1 = & +0{\cdot}0055 & \\
-v_2 x_1 = & & -0{\cdot}0796 \\
-v_3 x_2 = & +0{\cdot}2016 & \\
-v_4 x_3 = & & -0{\cdot}1725 \\
\hline
& +0{\cdot}5233 & -0{\cdot}5853 = -0{\cdot}0620
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
x_n = 1{\cdot}82 \\
x_1 = 1{\cdot}09 \\
\hline
x_n - x_1 = 0{\cdot}73
\end{array}$$

$$\xi = \frac{0{\cdot}0620}{0{\cdot}73\,.\,2} = +0{\cdot}042$$

$$b + \xi = 2{\cdot}010$$

Sohin lautet die Gleichung der »passendsten« Ausgleichungsgeraden

$$y = -1{\cdot}388x + 2{\cdot}010.$$

Macht man die Flächenprobe, so findet man erstens durch Zerlegung in Dreiecke

$$\begin{array}{l}
\tfrac{1}{2}\,.\,0{\cdot}16\,.\,0{\cdot}007 = -0{\cdot}0006 \\
\tfrac{1}{2}\,.\,0{\cdot}38\,.\,0{\cdot}068 = -0{\cdot}0129 \\
\tfrac{1}{2}\,.\,0{\cdot}62\,.\,0{\cdot}080 = +0{\cdot}0248 \\
\tfrac{1}{2}\,.\,0{\cdot}25\,.\,0{\cdot}090 = -0{\cdot}0113
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\Sigma(+f) = +0{\cdot}0248 \\
\Sigma(-f) = -0{\cdot}0248 \\
\hline
\Sigma f = \quad 0{\cdot}0000
\end{array}$$

Zweitens durch Zerlegung in Trapeze nach der obigen Formel:

$$\begin{array}{r}
\tfrac{1}{2}(1{\cdot}12 - 1{\cdot}09)(-0{\cdot}005 + 0{\cdot}073 + 2\xi) = +0{\cdot}0023 \\
\tfrac{1}{2}(1{\cdot}54 - 1{\cdot}12)(+0{\cdot}073 - 0{\cdot}180 + 2\xi) = -0{\cdot}0044 \\
\tfrac{1}{2}(1{\cdot}84 - 1{\cdot}54)(-0{\cdot}180 + 0{\cdot}112 + 2\xi) = +0{\cdot}0022 \\
\hline
\Sigma f = +0{\cdot}0001
\end{array}$$

Die positiven und negativen Widerspruchsflächen halten sich nunmehr (bis auf kleine Abrundungsfehler) das Gleichgewicht.

4. Wir wollen jetzt die Flächenberechnung noch auf eine dritte Weise vornehmen, und zwar nach Maßgabe der in der Fig. 3 eingetragenen Koten. In dieser Figur, die um den Winkel α gedreht erscheint, ist die Ausgleichungsgerade als Abszissenachse betrachtet und sind von den Punkten P_1, P_2, P_3 und P_4 und dann nochmals von dem bei P_4 aufgetragenen Punkte P_1, den wir an dieser Stelle mit P_1' bezeichnen, die Ordinaten gezogen. Die Flächenberechnung ergibt:

$$
\begin{array}{llll}
\frac{1}{2} \,.\, 0{\cdot}11\, (0{\cdot}025 + 0{\cdot}068) & & = & -\,0{\cdot}0051 \\
\frac{1}{2} \,.\, 0{\cdot}24 \,. & 0{\cdot}068 & = & -\,0{\cdot}0082 \\
\frac{1}{2} \,.\, 0{\cdot}62 \,. & 0{\cdot}080 & = & +\,0{\cdot}0248 \\
\frac{1}{2} \,.\, 0{\cdot}28 \,. & 0{\cdot}068 & = & -\,0{\cdot}0095 \\
\frac{1}{2} \,.\, 0{\cdot}09 \,. & 0{\cdot}043 & = & -\,0{\cdot}0019 \\
\hline
 & & \Sigma f = & +\,0{\cdot}0001
\end{array}
$$

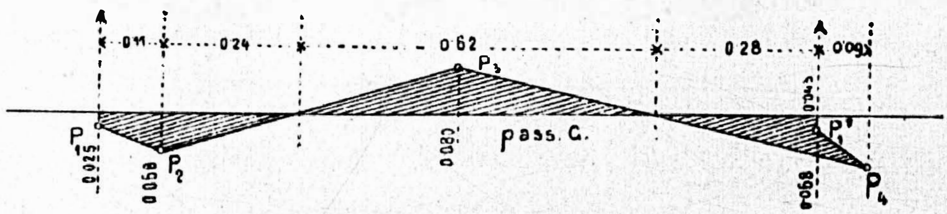

Fig. 3.

Aus der letzten Berechnungsweise geht hervor, daß man sich die ganze Figur derart um einen Kreiszylinder herumgelegt denken kann, daß die Ausgleichungsgerade zur Leitlinie wird und der Punkt P_1 mit dem Punkte P_1' zusammenfällt. Diese Ueberlegung gibt uns eine Handhabe, unsere allgemeine Formel auch auf den Fall der direkten Beobachtungen anzuwenden. Liegen zur Bestimmung einer unbekannten Größe mehrere unmittelbar erhaltene Beobachtungen l_1, l_2, . . . l_n vor, so ist der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten das arithmetische Mittel. Es soll nun derjenige Mittelwert, welcher die Beobachtungsergebnisse nach dem Prinzip der gleichen Zu- und Abgangsflächen ausgleicht, das ist das passendste Mittel, gesucht werden.

Trägt man von der Abszissenachse aus in beliebiger Ordnung alle Beobachtungen l_1, l_2, . . . l_n und am Schlusse nochmals l_1 auf, und zwar in gleichen Abständen als Längeneinheit, so erhalten in der allgemeinen Formel für ξ die Größen x der Reihe nach die Werte

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad . \quad . \quad . \quad x_{n+1} = n + 1;$$

es geht also n in $n+1$ über und unsere Formel vereinfacht sich wie folgt:

$$\xi = \frac{\{2v_1 + 3v_2 + 4v_3 + \ldots + (n+1)v_n + (n+1)v_1\} - \{v_1 + v_2 + 2v_3 + \ldots + (n-1)v_n + nv_1\}}{-2(n+1-1)}$$

$$\xi = \frac{2(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n)}{-2n} = -\frac{[v]}{n} = 0.$$

Denkt man sich sämtliche Beobachtungen, wie in Fig. 4 skizziert, auf einer Zylinderfläche in gleichen Abständen aufgetragen und die Zylinderfläche aufgewickelt, so liefert die direkte Entwicklung das gleiche Ergebnis:

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{2}(v_1 + v_2 + 2\xi) \\
\frac{1}{2}(v_2 + v_3 + 2\xi) \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\frac{1}{2}(v_n + v_1 + 2\xi) \\
\hline
\end{array}
$$

Summe: $[v] + n\xi = 0$ und $\xi = 0$.

Damit ist erwiesen, daß das arithmetische Mittel zugleich das passendste ist.

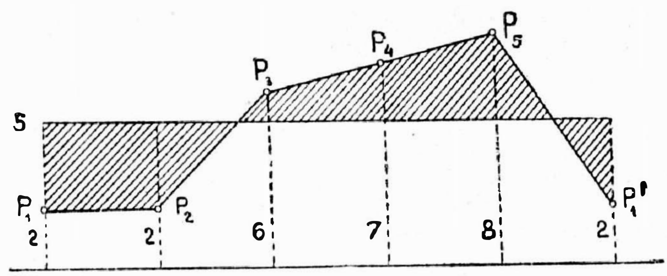

Fig. 4.

Beispiel zu Fig. 4:

$$
\begin{array}{ll}
l_1 = L + 2 & v_1 = -3 \\
l_2 = L + 2 & v_2 = -3 \\
l_3 = L + 6 & v_3 = +1 \\
l_4 = L + 7 & v_4 = +2 \\
l_5 = L + 8 & v_5 = +3 \\
\hline
A = L + 5 & [v] = 0
\end{array}
$$

$$\Sigma(+f) = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}(1+2) + \tfrac{1}{2}(2+3) + \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} = 4{\cdot}875$$
$$\Sigma(-f) = 3 + \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} = 4{\cdot}875$$
$$\Sigma f = 0{\cdot}000$$

Über drei Orientierungsinstrumente.

(Bemerkungen zu dem Aufsatze von Prof. Dr. Ehrenfeucht im Hefte 3 der «Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen», Jahrgang 1911.)

Von **E. Fox**, Oberbergamtsmarkscheider in Clausthal.

Die in Heft 3, Jahrgang 1911 dieser Zeitschrift veröffentlichte Untersuchung von Professor Dr. Ehrenfeucht-Riga «Über drei Orientierungsinstrumente» ist durch Mitteilung der Ergebnisse eines reichen Beobachtungsmaterials besonders wertvoll. Auffallen mußte dabei aber die außerordentlich stark verschiedene Bewertung, welche die behandelten drei Instrumente (I Kollimator nach Borchers, II Quarzfadenmagnetometer von Fennel und III Spiegeldeklinatorium nach Schmidt-Neumayer) zuerst als Variometer und zum Schlusse als Orientierungsinstrumente nach diesen Beobachtungen erfahren müssen. Es sind die mittleren Fehler einer Bestimmung des Standes des Magneten mit diesen Instrumenten beziehentlich

$$\mu_{I} = \pm 7{\cdot}0'', \quad \mu_{II} = \pm 9{\cdot}7'', \quad \mu_{III} = \pm 22{\cdot}2'' \ldots (7) \text{ S. 88 a. a. O.}$$