Paper-ID: VGI_191232

Zur Berechnung des mittleren Fehlers einer beobachteten Richtung beim Einschneiden und Einschalten von Punkten

Kaspar Weigel [1]

[1] *Professor an der k. k. technischen Hochschule in Lemberg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **10** (8), S. 229–233

1912

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 8. **Wien, am 1. August 1912.** **X. Jahrgang.**

Zur Berechnung des mittleren Fehlers einer beobachteten Richtung beim Einschneiden und Einschalten von Punkten.

Von **Dr. Kaspar Weigel,** Professor an der k. k. technischen Hochschule in Lemberg.

Der mittlere Beobachtungsfehler beim Einschneiden und Einschalten von Punkten wird, wenn man verschiedene Lehrbücher über Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate und die in Österreich und Preußen geltenden Instruktionen berücksichtigt, nicht auf eine einheitliche Weise gebildet.

Es bezeichnet nämlich die im Nenner des Ausdruckes $m = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-q}}$ vorhandene Zahl q nach manchen Lehrbüchern, der österreichischen „Instruktion für Polygonal-(Theodolit-)Vermessungen vom Jahre 1904" und der preußischen „Anweisung IX vom 25. Oktober 1881" die Anzahl der zur Bestimmung der genäherten Koordinaten der gesuchten Punkte erforderlichen Beobachtungen, während in anderen Lehrbüchern unter q die Anzahl der in der betreffenden Ausgleichungsaufgabe vorhandenen Unbekannten verstanden wird.

Das Ziel der vorstehenden Abhandlung ist es, zu beweisen, daß nur diese zweite Anschauung der Ausgleichungstheorie nach der Methode der kleinsten Quadrate entspreche.

Man kann also unter q nur dann die Anzahl der zur Bestimmung der genäherten Koordinaten der gesuchten Punkte erforderlichen Beobachtungen verstehen, wenn es sich um Ausgleichung solcher Beobachtungen handelt, die Fehlergleichungen von gleicher Anzahl einer und derselben Unbekannten bedingen, denn dann ist q sowohl die Anzahl der Unbekannten der Fehlergleichungen, als auch die Anzahl der zur Bestimmung der Koordinaten der gesuchten Punkte absolut notwendigen Beobachtungen.

Dies ist der Fall z. B. beim mehrfachen Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden, in welchen Ausgleichungsaufgaben sowohl die eine, wie die andere Deutung von q einen und denselben mittleren Beobachtungsfehler ergibt.

Sind dagegen die Unbekannten der Fehlergleichungen nicht insgesamt in den einzelnen Fehlergleichungen repräsentiert, wie dies beim kombinierten Einschneiden eines Punktes und Einschalten mehrerer Punkte der Fall ist, so wird der Wert von q und somit der Wert für den mittleren Beobachtungsfehler nach beiden Anschauungen ein anderer.

In diesen beiden Ausgleichungsaufgaben ist die Anzahl der unbedingt notwendigen (erforderlichen) Beobachtungen gleich $2\,P$, wenn wir mit P die Anzahl der zu bestimmenden Punkte bezeichnen, wogegen die Anzahl aller Unbekannten (also inklusive der Orientierungsunbekannten) $3\,P$ beträgt.

Es wächst also der Unterschied zwischen dem nach den Instruktionen und dem nach der theoretischen Formel berechneten Werte des mittleren Fehlers einer beobachteten Richtung bei konstanten Werten von $[pvv]$ und n mit der Anzahl der zu bestimmenden Punkte.

Im folgenden soll nun in aller Kürze nachgewiesen werden, daß die Orientierungsunbekannten trotz ihrer Eliminierung aus den Fehlergleichungen bei der Berechnung des mittleren Fehlers e. R. in der Zahl q berücksichtigt werden müssen.

Dazu wollen wir folgenden Weg einschlagen.

Der Einfachheit halber wollen wir den Fall des kombinierten Einschneidens eines Punktes näher behandeln und, da der allgemeinere Fall der gleichzeitigen Bestimmung mehrerer Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate sich vom Ersten wesentlich nur durch die Anzahl der Unbekannten unterscheidet, wird die durchgeführte Beweisführung auch auf den zweiten Fall leicht verallgemeinert werden können.

Bei der Bestimmung der Koordinaten eines Punktes nach der Methode des kombinierten Einschneidens ergeben sich zweierlei Gattungen von Fehlergleichungen, die Einen aus den äußeren Richtungen in der Form:

$$v_a = a\,\xi + b\,\eta + l,$$

die Anderen aus den inneren Richtungen in der Form:

$$v_i' = a\,\xi + b\,\eta + z + l.$$

Hätte man die Ausgleichung, ohne die zweite Gruppe der Fehlergleichungen zu reduzieren, vorgenommen, so wäre die Anzahl der Unbekannten der entsprechenden Fehlergleichungen drei.

Der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung wäre folglich nach der Theorie der vermittelnden Beobachtungen,*)

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v_a v_a + p\,v_i' v_i']}{n-3}},$$

vorausgesetzt, daß den einzelnen Fehlergleichungen verschiedene Gewichte zukommen.

*) Vgl. F. R. Helmert, Zur Ableitung der Formel von C. F. Gauss für den mittleren Beobachtungsfehler und ihrer Genauigkeit. Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften, 1904 XXX.

Des besseren Sachverständnisses wegen wollen wir die Hauptpunkte der zitierten Abhandlung mit einigen kleinen Änderungen der bezüglichen Formeln wiederholen.

Bezeichnen wir

$$-\frac{[pal]}{[paa]}=u_1,\quad -\frac{[pbl.1]}{[pbb.1]}=u_2,\quad -\frac{[pcl.2]}{[pcc.2]}=u$$

und eliminieren die Unbekannten der Fehlergleichungen mit Hilfe der neuen Unbekannten u_1, u_2 und u_3, so können wir die beiden Gruppen von Fehlergleichungen folgendermaßen darstellen:

$$v_a=au_1+b'u_2+l,\qquad v_i'=au_1+b'u_2+c''u_3+l,$$
$$\ldots\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\ldots$$

wobei $b'=b-\frac{[pab]}{[paa]}$, $\quad c'=c-\frac{[pac]}{[paa]}$, $c''=c'-b'\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}$ und $c=1$.

Werden in die Fehlergleichungen statt scheinbarer Fehler v_a und v_i' wahre Fehler $\triangle$ eingesetzt, so entsprechen ihnen auch andere (wahre) Werte der μ, die wir mit U_1, U_2 und U_3 bezeichnen wollen.

Es entstehen also wieder zwei Gruppen von Gleichungen, nämlich:

$$\triangle_a=aU_1+b'U_2+l \text{ und } \triangle_i=aU_1+b'U_2+c''U_3+l$$
$$\ldots\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\ldots$$

Wenn wir sie mit den ihnen entsprechenden Fehlergleichungen vergleichen, erhalten wir n Fehlergleichungen in folgender Form:

$$v_a=a\triangle u_1+b'\triangle u_2+\triangle_a \text{ und } v_i'=a\triangle u_1+b'\triangle u_2+c''\triangle u_3+\triangle_i,$$

in den der Einfachheit halber die Bezeichnungen $u_1-U_1=\triangle\mu_1$, $u_2-U_2=\triangle\mu_2$ und $u_3-U_3=\triangle u_3$ eingeführt wurden.

Da jedoch, wie man sich leicht überzeugen kann, $[pab']=[pac']=[pbc'']=0$, lauten die auf Grund der Bedingung $[pv_av_a]+[pv_i'v_i']=\text{min.}$ aus diesen n Fehlergleichungen entstandenen 3 Normalgleichungen:

$$[paa]\triangle u_1+[pa\triangle]=0$$
$$[pb'b']\triangle u_2+[pb'\triangle]=0$$
$$[pc''c'']\triangle u_3+[pc''\triangle]=0.$$

Wenn wir die Fehlergleichungen quadrieren, ihre Summe bilden und aus den Normalgleichungen die Werte für $\triangle u_1$, $\triangle u_2$ und $\triangle u_3$ einsetzen, erhalten wir mit Rücksicht darauf, daß $[pab']=[pac']=[pb'c'']=0$, folgende Gleichung:

$$[pv_av_a]+[pv_i'v_i']=[p\triangle\triangle]-\frac{[pa\triangle]^2}{[paa]}-\frac{[pb'\triangle]^2}{[pb'b']}-\frac{[pc''\triangle]^2}{[pc''c'']}.$$

Jeder der drei letzten Ausdrücke ist jedoch, als Durchschnittswert betrachtet, den er bei unendlich vielen Fällen annehmen würde, gleich m^2 zu setzen, folglich ist $[pv_av_a]+[pv_i'v_i']=[p\triangle\triangle]-3m^2$ oder $m^2=\frac{[pv_av_a]+[pv_i'v_i']}{n-3}$.

Es ist daher im allgemeinen die Zahl, um die n im Nenner vermindert werden soll, gleich der Zahl der Unbekannten, weil eben soviele Glieder — jedes im Durchschnittswerte gleich m^2 von $[p\triangle\triangle]=nm^2$ — abgezogen werden müssen, um im allgemeinen $[pvv]$ zu erhalten.

Es entsteht aber noch die Frage, ob man bei Anwendung der reduzierten Fehlergleichungen auch nach derselben Formel rechnen darf.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß nur gleichgewichtige, aus inneren Richtungen entstandene Fehlergleichungen in dem Sinne reduziert werden, wie dies z. B. in der österr. Polygonal-Instruktion der Fall ist; es geht dann in diesem Falle $[p v_i' v_i']$ in $p [v_i' v_i']$ über.*)

Die auf Grund der äußeren Richtungen aufgestellten Fehlergleichungen und ihre Gewichte bleiben unverändert, dagegen erhalten die auf Grund der inneren Richtungen aufgestellten Fehlergleichungen alle von gleichem Gewichte p, folgende Form:

$$v_i = v_i' - \frac{[v_i']}{n} = \left(a - \frac{[a]}{n}\right) \xi + \left(b - \frac{[b]}{n}\right) \eta + l - \frac{[l]}{n},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

wobei das frühere Gewicht p auch allen reduzierten Fehlergleichungen zukommt.

Die Ausgleichungsbedingung $[p v_a v_a] + p [v_i' v_i'] = \min. = \Omega$ hat zur Folge:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \text{ und da } c_1 = c_2 = c_3 = \dots = 1,$$

ist

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = p [v_i'] = 0, \text{ folglich: } v_i' = v_i.$$

Setzen wir $[p v_a v_a] + p [v_i' v_i'] = [p v_a v_a] + p [v_i v_i] = [p v v]$, so resultiert für den mittleren Beobachtungsfehler beim kombinierten Einschneiden

$$m = \sqrt{\frac{[p v v]}{n - 3}},$$

wobei es gleichgültig ist, ob man reduzierte oder nichtreduzierte v in der Formel benützt, jedenfalls muß im Nenner $n - 3$, nicht $n - 2$ stehen.

Dieser Beweis läßt sich sehr leicht auf die gleichzeitige Bestimmung mehrerer Punkte mit Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate verallgemeinern.

In dieser Ausgleichungsaufgabe wird für jeden zu bestimmenden Punkt je eine Gruppe der sogenannten äußeren und inneren Fehlergleichungen aufgestellt.

Die inneren Fehlergleichungen einer beliebigen Gruppe können jedoch nur dann auf die oben angedeutete Weise reduziert werden, wenn ihnen gleiches Gewicht zukommt.

Es werden also in jeder Fehlergruppe die inneren Fehlergleichungen reduziert, wobei jedoch nach dem Vorhergehenden die reduzierten v_i den nichtreduzierten v_i' gleich sein müssen, so daß es gleichgültig ist, welche von diesen beiden Fehlern wir zur Bildung der Summe $[p v v]$ nehmen werden.

Da für die nichtreduzierten Fehler v_i' der mittlere Beobachtungsfehler, wie bewiesen wurde, nach der Formel

$$m = \sqrt{\frac{[p v v]}{n - q}}$$

---

*) Wie man ungleiche Gewichte berücksichtigen kann, vergl. S. Wellisch: Ausgleichungsrechnung, II. Bd., S. 95.

berechnet werden muß, wo q die Anzahl der Unbekannten der nichtreduzierten Fehlergleichungen bezeichnet, muß bei Benützung der reduzierten Fehler v_i bei Berechnung des mittleren Beobachtungsfehlers, wegen $v_i = v_i'$, q dieselbe Bedeutung behalten.

Man muß also unter der Zahl q alle Unbekannten der Fehlergleichungen samt den Orientierungsunbekannten verstehen.

Bezeichnen wir mit m den nach der theoretischen, mit m' den nach der österreichischen Instruktion und preußischen Anweisung geltenden Formel berechneten mittleren Beobachtungsfehler, so kann man sie bei gleichzeitiger Bestimmung von P Punkten folgendermaßen ausdrücken:

$$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-3P}}, \quad m' = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-2P}},$$

wobei wie man sieht $m > m'$.

Auf Grund der Proportion:

$$(m - m') : m = \frac{\sqrt{\frac{[pvv]}{n-3P}} - \sqrt{\frac{[pvv]}{n-2P}}}{\sqrt{\frac{[pvv]}{n-3P}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-3P}} - \sqrt{\frac{1}{n-2P}}}{\sqrt{\frac{1}{n-3P}}}$$

können wir die Differenz $m - m' = \triangle m$ in % von m ausdrücken, denn es ist:

$$\triangle m = m\left(1 - \sqrt{\frac{n-3P}{n-2P}}\right) \doteq m\left(1 - \sqrt{1 - \frac{P}{n}}\right) \doteq m\frac{P}{2n},$$

oder

$$\triangle m \doteq 50\frac{P}{n}\,\%\, m.$$

In der Praxis wird $\triangle m$ wohl nie groß werden, jedenfalls kann dieser Unterschied bei ungünstigen Verhältnissen (wenige Beobachtungen bei ziemlich großer Anzahl der zu bestimmenden Punkte) doch sogar 10% der richtigen mittleren Beobachtungsfehler betragen.

Eine einfache graphische Kontrolle des kombinierten Einschneidens.

Von **Prof. Dr. J. Pantofliček** in Prag.

Jedes trigonometrische oder Polygonnetz läßt sich durch ein statisch unbestimmtes Stabsystem ersetzen; durch seine Lösung erhält man die Verbesserungen und die mittleren Fehler in Koordinaten oder in einer anderen beliebigen geometrischen Beziehung, wie Verfasser dieses Artikels eingehend in der «Österr. Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst» 1908, Heft 24 u. 25, dargetan hat.

Es sei der Punkt P (Fig. 1) mit äußeren Richtungswinkeln durch Vorwärtseinschneiden von den Punkten $P_1 \ldots$ mit den Gewichten $p_1' \ldots$ bestimmt, jeder Richtungswinkel wird durch einen elastischen Winkelstab vom Querschnitte $\pi_1 = \frac{p_1'}{s_1^2} \ldots$, von beliebiger Länge $l_1' \ldots$, im Punkte P senkrecht zur Seite