Fehlerfortpflanzung bei direkten Längenmessungen

Hans Löschner [1]

[1] *o. ö. Professor an der k. k. deutschen Franz Josef-Technischen Hochschule in Brünn*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **10** (6), S. 165–172

1912

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN
DES
VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 6. **Wien, am 1. Juni 1912.** X. Jahrgang.

Fehlerfortpflanzung bei direkten Längenmessungen.

Von Dr. Hans Löschner,
o. ö. Professor an der k. k. deutschen Franz Josef-Technischen Hochschule in Brünn.

(Mit 5 Textfiguren.)

I.

Bei direkten Längenmessungen treten dreierlei Arten von Beobachtungsfehlern auf: I. unregelmäßige (zufällige) Fehler, welche das Ergebnis im Vergleich zum wahren Wert innerhalb einer verhältnismäßig engen Grenze ebenso wahrscheinlich vergrößern als verkleinern und deren Größe sich der schärferen Vorausberechnung vollständig entzieht; II. konstante Fehler, deren Einfluß auf Grund der Beobachtung maßgebender Begleitumstände genau berechnet werden kann, und III. einseitig wirkende Fehler, von welchen nur der Sinn, nicht aber die Größe des Einflusses bei den Messungen im voraus genau bekannt ist. Die konstanten und die einseitig wirkenden Fehler faßt man auch unter dem Namen «regelmäßige» Fehler zusammen.

Zu den unregelmäßigen (zufälligen) Fehlern gehören: 1. der Anlegefehler, der beim Einstellen des Anfangspunktes des Meßwerkzeuges an den Anfangspunkt der Meßstrecke entsteht; 2. der Anreihefehler, welcher beim Aneinanderreihen der einzelnen Meßwerkzeug-Lagen entsteht; 3. der Ablesefehler, der am Ende der Meßstrecke bei der Ermittlung des «Reststückes» begangen wird; 4. der Spannungsfehler bei dehnbaren Meßwerkzeugen (Metallbändern und Drähten), welchen bei ihrer Verwendung eine bestimmte Spannung zu geben ist.

Zu den konstanten Fehlern rechnet man 1. die sogenannten metronomischen Fehler des verwendeten Meßwerkzeuges, welche bei Außerachtlassung oder unrichtiger Berücksichtigung der Konstanten desselben auftreten, 2. die Gefällsfehler, welche infolge ungenügender oder fehlerhafter Berücksichtigung der Boden- und Meßwerkzeug-Neigungen entstehen. Die Konstanten des Meßwerkzeuges sind: *a)* die «Korrektion», d. i. die Länge, welche zur Nominallänge des Meßwerkzeuges algebraisch zu addieren ist, um bei einer bestimmten (Normal-) Temperatur, bezw. Feuchtigkeit die wahre Länge desselben zu erhalten; (der Ausdruck «Korrektion» entspricht also dem Ausdruck «Stand» bei Uhrvergleichungen und Aneroiden); *b)* der Wärmeausdehnungskoeffizient und bei Holzmeßwerkzeugen auch der Feuchtigkeitskoeffizient. Man kann sich vorstellen, daß z. B. ein Maßstab aus Stahl oder Holz unmittelbar nach seiner Eichung unter vollständig gleich gebliebenen Verhältnissen zur Messung einer Strecke benützt wird. Dann ist offenbar bei Berücksichtigung der Korrektion des Maßstabes die Möglichkeit des Auftretens eines konstanten Fehlers geradezu ausgeschlossen; es müßte denn die Ermittlung der Korrektion fehlerhaft durchgeführt worden sein. Hingegen werden konstante Fehler auch bei Berücksichtigung der richtigen Korrektion leicht auftreten, wenn ein Maßstab aus Metall, dessen Ausdehnungskoeffizient nicht genügend scharf bestimmt ist, bei einer gegenüber der Eich-Temperatur sehr verschiedenen Temperatur benützt wird oder wenn ein Maßstab aus Holz, dessen Längenänderung durch Feuchtigkeit ganz unbekannt ist und der in trockenem Zimmer verglichen wurde, bei großer Feuchtigkeit zur Messung einer Strecke verwendet wird. Im übrigen bringt schon die Unsicherheit in der Bestimmung der Temperatur und Feuchtigkeit der Maßstäbe einen Fehler für die Längenmessung hervor, der je nach Umständen zu den zufälligen oder zu den konstanten Fehlern gezählt werden kann.

Zu den einseitig wirkenden Fehlern gehören: 1. die Richtfehler in horizontaler und vertikaler Ebene; 2. die Fehler infolge Deformation des Meßwerkzeuges bei unebener Meßbahn.

Die direkten Längenmessungen werden nun mit sehr verschiedenen Meßwerkzeugen und nach sehr verschiedenen Methoden ausgeführt; demgemäß werden auch die vorerwähnten Fehler bei verschiedenartigen Längenmessungen in verschiedenem Maße auftreten. Es kann schließlich der Gesamteinfluß der konstanten und einseitig wirkenden Fehler gegenüber dem Gesamteinfluß der zufälligen Fehler sehr groß oder aber sehr klein sein. Je nach dem einen oder dem anderen Fall wird das «Prozentgesetz» oder das «Quadratwurzelgesetz» bei der Untersuchung der Ergebnisse von Längenmessungen betreffend das Anwachsen des mittleren Gesamtfehlers mit der Länge einen besseren Anschluß ergeben.

II.

Im folgenden will ich nur die zufälligen Fehler und das mit ihnen zusammenhängende «Quadratwurzelgesetz» einer besonderen Betrachtung unterziehen.

Das «Quadratwurzelgesetz» wurde bisher stets in der Weise abgeleitet, daß man die Gesamtheit der zufälligen Fehler einer einzelnen Lage des Meßwerkzeuges in Rechnung zieht. Ist n die Anzahl der vollen Längen l des Meßwerkzeuges bei Messung einer Strecke L und bedeuten $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ die Gesamteinflüsse der zufälligen Fehler bei den einzelnen Lagen, so folgt der mittlere Fehler der gemessenen Strecke L mit:

$$m = \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2}$$

und weil $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \ldots = \varepsilon_n^2 = \varepsilon^2$ angenommen wird, so ist:

$$m = \pm \varepsilon \sqrt{n} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \; 1)$$

Weiter ist es üblich, in dieser Gleichung (1) zu setzen:

$$n = \frac{L}{l}$$

womit sich ergibt:

$$m = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{l}} \sqrt{L} = \pm \mu . \sqrt{L} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

Diese Gleichung wird allgemein angewendet, nicht nur für die Fälle, wo die zu messende Strecke einer ganzen Anzahl von Lagen des Meßwerkzeuges entspricht. Man sieht, daß μ den mittleren (zufälligen) Fehler der Längeneinheit $L = 1$ bedeutet.

Das in Gleichung 2) gegebene «Quadratwurzelgesetz» lautet:

Der mittlere (zufällige) Fehler bei direkten Längenmessungen wächst proportional zur Quadratwurzel aus der Länge der gemessenen Strecke.

Nun erscheint es im allgemeinen wohl nicht einwandfrei, 1. mit einem mittleren Gesamtbetrag der zufälligen Fehler einer einzelnen Lage des Meßwerkzeuges in die Rechnung zu gehen und 2. die Länge L an Stelle der Lagenanzahlen einzuführen.

Zu 1.: Wenn wir z. B. eine feine Längenmessung mit 5 Meter langen Schneiden-Latten auf sehr günstiger Meßbahn zwischen zwei unterirdisch und ungünstig markierten Punkten vornehmen, so wird beim Fehlen geeigneter Absenkelungsvorrichtungen der Anlege- und der Ablesefehler von vorneherein größer als der Anreihefehler einzuschätzen sein. Es wird die infolge der zufälligen Fehler auftretende Unsicherheit im Anlegen der ersten und letzten Lage des Meßwerkzeuges größer sein als jene bei den übrigen Lagen. Wir können daher im allgemeinen die Unsicherheiten $\varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \, . \, . \, . \, . \, \varepsilon_n$ im Anlegen der einzelnen Maßstab-Lagen nicht gleichsetzen und es wird zweckmäßiger und richtiger sein, nicht die Unsicherheit im Anlegen einer einzelnen Maßstab-Lage, sondern die Einzelfehler selbst in Rechnung zu ziehen.

Bezeichnet m_1 den Anlegefehler, m_2 den mittleren Anreihefehler jeder Lage und m_3 den Ablesefehler, so ist allgemein der mittlere zufällige Fehler der gemessenen Strecke L, die sich aus n vollen Lagen und einem Teilstück des Meßwerkzeuges ergibt:

$$m^2 = m_1^2 + n \, . \, m_2^2 + m_3^2$$

$$\text{oder } m^2 = (m_1^2 + m_3^2) + n \, . \, m_2^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3)$$

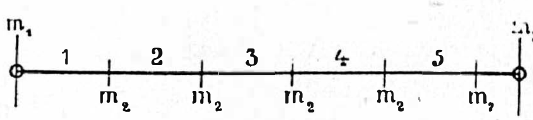

Fig. 1.

Die Fehler m_1 und m_3 kommen bei einer Längenmessung nur einmal vor (Fig. 1); sie können überdies leicht verschwindend klein gemacht werden. Nähert sich aber $(m_1^2 + m_3^2)$ dem Werte 0, so nähert sich der mittlere zufällige Fehler der gemessenen Strecke dem Werte

$$m = \pm m_2 \sqrt{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 4)$$

Das in vorstehender Gleichung 4) gegebene annähernd giltige «Quadratwurzelgesetz» lautet:

Der mittlere zufällige Fehler bei direkten Längenmessungen wächst proportional zur Quadratwurzel aus der Anzahl der vollen Meßwerkzeug-Lagen.

Das Reststück der Meßstrecke bleibt hiebei also ganz außer Betracht.

Zu 2.: Es erscheint nicht ohneweiters zulässig, die Anzahl n allgemein durch die Länge der Meßstrecke L auszudrücken, denn der hier in Betracht kommende Anreihefehler entsteht nur beim Anreihen der einzelnen Meßwerkzeug-Lagen und ist nicht nur von der Länge der Meßstrecke abhängig, sondern auch von der Länge des Meßwerkzeuges. Je länger das Meßwerkzeug ist, umso kleiner wird die Anzahl der Meßwerkzeug-Lagen und somit auch die Anzahl der sich ansammelnden Anreihefehler bei Messung einer ganz bestimmten Länge sein. Ist beispielsweise das Meßwerkzeug 20 Meter lang, so entsteht offenbar beim Messen einer Strecke von 39 Meter Länge theoretisch ein gleich großer mittlerer Anreihefehler wie beim Messen einer Strecke von nur 21 Meter Länge, denn in beiden Fällen ist nur einmal angereiht worden. Zeichnen wir also die Kurve für das Anwachsen der mittleren Anreihefehler, welche unter gewissen Voraussetzungen als Kurve der mittleren zufälligen Fehler überhaupt angesehen werden kann, so wird offenbar zwischen 21 und 39 Meter kein Anwachsen anzunehmen sein. Dieser Gedanke führt dahin, daß als theoretische Kurve für das Anwachsen der mittleren zufälligen Fehler strenge genommen nicht eine Parabel, sondern eine an eine Parabel sich anlehnende Treppenlinie zu gelten hat. Die Breite der einzelnen Stufen entspricht hiebei der Länge des Meßwerkzeuges. Je kleiner der Anreihefehler ist, umso kleiner werden die Stufenhöhen und umsomehr nähert sich die Treppenlinie einer sehr flachen Parabel.

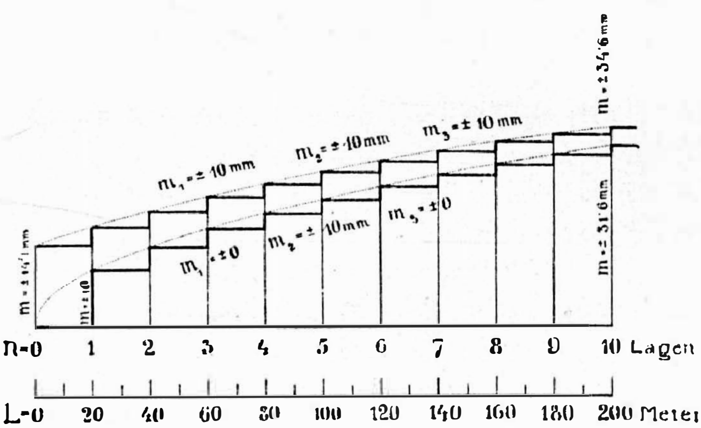

Fig. 2.

In Fig. 2 sehen wir den Verlauf der Treppenlinien und der zugehörigen Leitparabeln für die Fälle

$$m_1 = m_2 = m_3 = \pm 10 \; mm \quad \text{und} \quad m_1 = m_3 = 0, \; m_2 = \pm 10 \; mm$$

verzeichnet. Insbesondere im letzteren Falle zeigt sich bei dem rasch aufsteigenden Parabelstück zwischen $n = 0$ und $n = 1$ der zweifelhafte Wert der Parabel als

Fehlerlinie, denn für ein so rasches Anwachsen des Anreihefehlers innerhalb der ersten Lage, woselbst gar keine Anreihung vorgenommen wurde, fehlt jede Begründung.

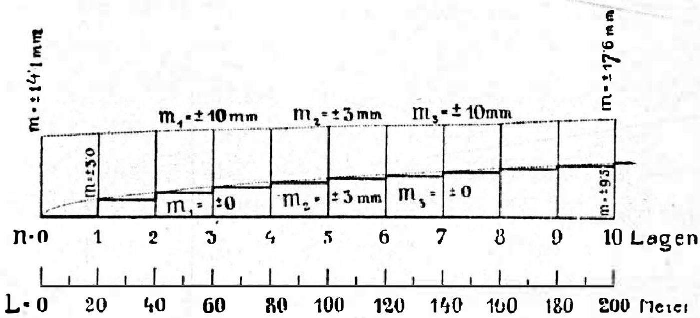

Fig. 3.

In Fig. 3 sind die Treppenlinien und die zugehörigen Leitparabeln für die Fälle $m_1 = \pm 10$, $m_2 = \pm 3$, $m_3 = \pm 10$ *mm* und $m_1 = 0$, $m_2 = \pm 3$, $m_3 = 0$ ersichtlich gemacht.

Es zeigt sich, daß die einzelnen Stufen umso deutlicher hervortreten, je größer der Anreihefehler und je länger das verwendete Meßwerkzeug ist.

III.

An vorstehende theoretische Erwägungen schließe ich das Ergebnis eines Versuches der probeweisen Ermittlung der Fortpflanzungslinie des mittleren zufälligen Längenmeßfehlers bei Vorhandensein von Anlege- und Anreihefehlern.

Auf einem über 4 Meter langen ebenen Holzpfosten wurde sorgfältigst ein glattes Papier gespannt und darauf eine gerade Linie scharf gezogen. Senkrecht dazu gezeichnete Querstriche ergaben sodann die Endpunkte der zu messenden Strecken. Als Maßstäbe dienten zwei steife Papierstreifen mit entsprechenden Marken. Die Möglichkeit des Auftretens irgend eines merklichen konstanten Fehlers, z. B. infolge Verbiegens oder falschen Ausrichtens erschien ausgeschlossen. Der zu untersuchende, in der Regel sehr kleine Anreihefehler wurde nun künstlich vergrößert, indem die Endmarken des einen Maßstabes (M_1) einen Zentimeter breit gemacht und außerdem vom Anlegerand um 5 Zentimeter zurückgeschoben wurden.

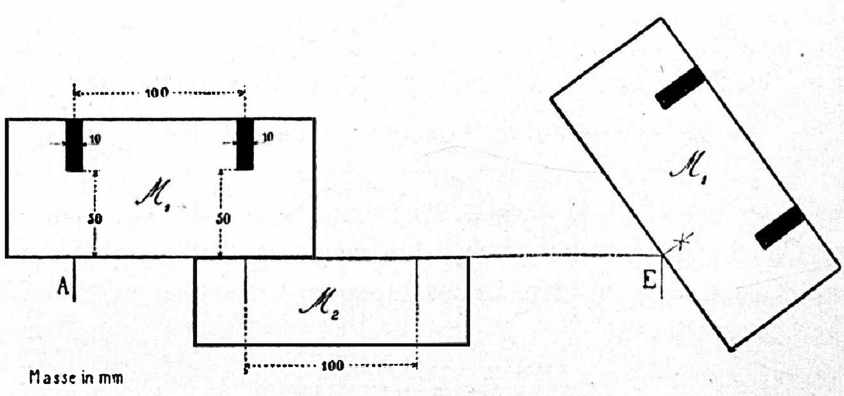

Fig. 4.

Der zweite Maßstab (M_2) hatte zwei feine Strichmarken. Die Länge beider Maßstäbe wurde absichtlich sehr kurz gewählt: sie betrug 10 *cm*. Da der Maßstab M_1 mit den Grobmarken stets an den Anfangspunkt A der Versuchsstrecke angelegt wurde, erscheint für diese Versuche der mittlere Anlegefehler genau gleich dem mittleren Anreihefehler. Zur Bestimmung der Reststrecken diente ein Transversalmaßstab, an welchem 0·005 *cm* direkt abgelesen werden konnten: Die Ablesefehler waren hiemit verschwindend klein gemacht und kamen für unsere Untersuchung nicht in Betracht. Dadurch, daß die Maßstäbe um die Endpunkte der längsten gezeichneten Strecke nach Anbringen einer provisorischen Bleistiftmarke um 180° gedreht wurden — wie dies in Figur 4 rechts angedeutet ist — konnten beliebig lange Strecken gemessen werden. Es obliegt keinem Anstande, an den Versuch die Vorstellung zu knüpfen, man arbeite statt mit 10 Zentimeter langen Maßstäben mit 10 Meter langen Maßstäben, sodaß die Versuchsstrecken statt in Zentimeter in Meter eingetragen werden können, wie dies in Figur 5 (s. Beilage) geschah. Daß sich bei einem 10 Meter langen Maßstab fremde, insbesondere einseitig wirkende Fehlerquellen zumeist geltend machen würden, stört keineswegs unsere lediglich auf den Anlege- und Anreihefehler sich beziehende Untersuchung.

Aus den Differenzen d von 56 Streckenmessungen ergaben sich mit $\frac{d}{\sqrt{2}}$ die in Figur 5 (siehe die beiliegende Tafel) als Ordinaten aufgetragenen mittleren Fehler m. Die mittleren Fehler von 7 zu gleicher Anzahl von vollen Maßstab-Lagen gehörigen Streckenmessungen wurden zum arithmetischen Mittel vereinigt, womit sich ergab:

Anzahl n der überschrittenen vollen Lagen	Mittlerer Fehler m einer Messung	
0	0·031 *cm*	5)
4	0·068	
16	0·169	
33	0·372	
43	0·297	
77	0·495	
131	0·764	
176	1·314	

Da bei unseren Versuchsmessungen der Anlegefehler m_1 gleich ist dem Anreihefehler m_2, erscheint der mittlere Fehler m einer Streckenmessung gegeben mit:

$$m^2 = m_1^2 + n \,.\, m_2^2 = m_1^2 (n + 1)$$

oder

$$m = \pm m_1 \sqrt{n + 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Diese Gleichung gestattet auch, den mittleren Anlege- und Anreihefehler $m_1 = m_2$ auf Grund der aus den Beobachtungen fließenden mittleren Fehler m in 5) zu berechnen; es ist

$$m_1 = m_2 = \pm \frac{m}{\sqrt{n + 1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

und somit für $n = 0$	. . . .	$m_1 = m_2 = \pm 0{\cdot}0310$ *cm*	8)
4	. . . .	$\pm 0{\cdot}0304$	
16	. . . .	$\pm 0{\cdot}0410$	
33	. . . .	$\pm 0{\cdot}0638$	
43	. . . .	$\pm 0{\cdot}0448$	
77	. . . .	$\pm 0{\cdot}0560$	
131	. . . .	$\pm 0{\cdot}0666$	
176	. . . .	$\pm 0{\cdot}0987$	
	Mittelwert	$m_1 = m_2 = \pm 0{\cdot}0540$ *cm*	

Die in 8) verzeichneten Rechnungswerte der mittleren Fehler $m_1 = m_2$ liegen vollkommen im Bereiche der Möglichkeit, denn es ergaben sich bei den Versuchen über den Anlegefehler (bei Strecken unter einer vollen Lage) mit den verwendeten Einstell-Marken mittlere Fehler bis zu 0·120 *cm*, die sich bei späteren separaten Versuchen wiederholten. Die Verschiedenheit der in 8) angegebenen mittleren Fehler darf nicht überraschen, denn die Versuchsmessungen wurden zwar von denselben Beobachtern, nämlich von mir und meinem Assistenten K. Slanina bewerkstelligt, jedoch bei ihrer großen Anzahl naturgemäß zu sehr verschiedenen Zeiten, sodaß beispielsweise Belichtungs- und Stimmungsverhältnisse nicht ohne Einfluß sein mochten. Das mit der Anzahl der Maßstab-Lagen erfolgende Anwachsen des mittleren Anreihefehlers läßt sich auf die naturgemäß eintretende Ermüdung beim oftmals ohne Unterbrechung wiederholten Festhalten der Maßstäbe zurückführen.

Mit Rücksicht auf diesen immerhin merklichen Einfluß der Ermüdung bei lang andauerndem Längenmessen empfiehlt es sich, nicht zu kurze Maßstäbe zu verwenden und bei sehr langen Meßstrecken eine Unterteilung in Teilstrecken vorzunehmen.

Im übrigen stimmt der berechnete mittlere Anlege- und Anreihefehler $m_1 = m_2 = 0{\cdot}0540$ mit dem in der Beobachtungsreihe 5) enthaltenen Werte 0·031 befriedigend überein.

Unter Zugrundelegung des Rechnungswertes $m_1 = m_2 = 0{\cdot}0540$ wurde in Figur 5 nach der Formel 6) die Parabel gezeichnet und an diese in der Anfangsstrecke die nach den früheren Ausführungen theoretisch giltige Stufenlinie als Linie des zu erwartenden mittleren Einflusses der Anlege- und Anreihefehler angelehnt. Im weiteren Verlaufe fällt die Stufenlinie nahe in die Parabel.

Für $n = 0$	. . . ist . . .	$m = 0{\cdot}054$
4	. . . .	0·121
16	. . . .	0·223
33	. . . .	0·315
43	. . . .	0·358
77	. . . .	0·477
131	. . . .	0·620
176	. . . .	0·718

Die Figur 5 zeigt noch, daß die Parabel bei Messungen, wo der Anreihefehler sehr heruntergebracht wird, praktisch ausreichend genau die Fortpflanzungskurve der mittleren zufälligen Fehler darstellt.

Geodäsie, Meteorologie, Aerogeodäsie, Situations- und Reliefpläne auf der internationalen Hygiene-Ausstellung in Dresden.

Von **Dr. F. Köhler.**

Auf dem schönsten Platze, fast im Zentrum der Stadt Dresden, in dem berühmten königlichen «Großen Garten», einem offenen riesenhaften, prachtvoll gepflegten Park von etwa 155 *ha* Ausdehnung, und in den gegenüberliegenden Anlagen hat die «Internationale Hygiene-Ausstellung» mitten in dem Grün der prächtigen Baumgruppen und Rasenflächen ihre Paläste aufgebaut und die darin enthaltenen Schätze dem weiten Publikum zur Schau gebracht.

Es war eine glückliche Idee, in dieses herrliche, mit reiner Luft und schönem, reichem Grün gefüllte Terrain diese Ausstellung, die — man kann sagen — alles enthalten hat, was der Erhaltung und Förderung der menschlichen Gesundheit dient, zu legen.

Über vier Jahre haben die hervorragendsten Männer der deutschen hygienischen Wissenschaft nach einem wohldurchdachten Plane die Vorbereitungen für diese großartige Ausstellung getroffen.

Nicht weniger arbeiteten die Architekten mit den Geodäten, um in dieses herrliche Gelände die monumentalen Bauten so zu verteilen, daß sie dessen Schönheit noch erhöhten.

Diese schwierige Aufgabe haben sie glänzend durchgeführt!

21 Architekten haben mehr als 50 Ausstellungsgebäude entworfen, die durch ihren würdigen und ernsten Stil die Ausstellungsgäste in ihre Säle freundlich luden.

Überall, sowohl in dem Äußeren als auch in dem Inneren zeigte sich die größte Einfachheit, sodaß alles dem hohen Zwecke der Ausstellung angepaßt war.

Die schön angelegten Plätze und die ringsherum verteilten Paläste verrieten, daß hier auch der Geometer dem Architekten mitgeholfen hat.

Schon die schön angelegte Säulenhalle, die den Haupteingang bildete, verriet die Mitwirkung des Geometers.

Sie war mit Geschick und Überlegenheit an eine dazu geeignete Stelle gelegt.

Der hinter dem Haupteingange sich öffnende weite Platzraum war schön gegliedert. Vorne einen Vorplatz bildend und weiter sich imposant zu einem Festplatz erweiternd und von Gebäuden und Bäumen eingeschlossen.

Die senkrecht dazu gelegte volkstümliche Ausstellung gab die zweite Achse der ganzen Anlage.

Es war wirklich eine Freude für den Geodäten, diese schöne Verteilung und Gruppierung der Paläste zu durchwandern.