

Paper-ID: VGI_191143



Über die Anwendung der Theorie vom Massen-Ausgleich auf Vermessungen durch die Coast and Geodetic Survey der Vereinigten Staaten

Richard Schumann ¹

¹ *o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **9** (10), S. 323–331

1911

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Schumann_VGI_191143,  
  Title = {{\U}ber die Anwendung der Theorie vom Massen-Ausgleich auf  
    Vermessungen durch die Coast and Geodetic Survey der Vereinigten Staaten},  
  Author = {Schumann, Richard},  
  Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {323--331},  
  Number = {10},  
  Year = {1911},  
  Volume = {9}  
}
```



Über die Anwendung der Theorie vom Massen-Ausgleich auf Vermessungen durch die Coast and Geodetic Survey der Vereinigten Staaten.

Von Prof. Dr. R. Schumann in Wien

1. The figure of the earth and Isostasy from measurements in the United States*), by John F. Hayford. Coast and Geodetic Survey, O. H. Tittmann Superintendent. 178 Seiten, 6 Tafeln. Washington, 1909.

2. Geodetic operations in the United States 1906—1909, by O. H. Tittmann and John F. Hayford. 11 Seiten.

3. The effect of topographic and isostatic compensation upon the intensity of gravity, by John F. Hayford. 25 Seiten. 1 Tafel.

Abhandlung 1) erschien als Veröffentlichung der Coast und Geodetic Survey, 2) und 3) als Anhänge zu Band I der Verhandlungen der 16. allgemeinen Konferenz der internationalen Erdmessung 1909 in London und Cambridge, und zwar im Jahre 1910.

In diesen drei Werken wird zum erstenmale in großem Maßstabe und in summarischer Weise die sogenannte Pratt'sche Theorie vom Ausgleich unter den Massen der Erdkruste angewendet zur Reduktion geodätischer Messungen und zwar hauptsächlich auf die der Vereinigten Staaten von Nordamerika. Der englische Archdeakon Pratt in Indien war um die Mitte des vorigen Jahrhunderts, besonders durch das Studium der Atraktionen des Himalaya, zu der Überzeugung geführt worden, dass in den oberen Schichten der Erdkruste solche Massen, die vom mittleren oder normalen Zustande abweichen, durch darunterliegende Massen von entgegengesetztem Sinne mehr oder weniger ausgeglichen oder kompensiert seien. Denkt man sich die Kruste bis zu einer gewissen, vorläufig noch unbestimmt bleibenden Tiefe zerlegt in gleiche Prismen mit senkrechten Kanten, so soll innerhalb eines jeden Prismas ein Massenausgleich, im wesentlichen der Höhe nach, statthaben; die Prismen sollen gleichen Druck auf eine darunterliegende Niveaulfläche ausüben. Die Prismendurchmesser mögen ein oder mehrere Hundert Kilometer betragen.

Eine solche Verteilung der Massen in den oberen Schichten der Erdkruste wird bestimmten Einfluß auf Richtung und Größe der Schwerkraft ausüben, ebenso auf die damit zusammenhängenden Messungen und Ergebnisse der Gradmessungen, wie große Halbachse und Abplattung des Erdellipsoids. Die Kenntnis und Berücksichtigung dieser Einflüsse wird dazu verhelfen, die innere wie die äußere Genauigkeit der Gradmessungen zu verbessern.

Zu dem Zwecke, die besten Werte der großen Halbachse und der Abplattung für das Gebiet der Vereinigten Staaten zu ermitteln, wurden in der ersten der drei Veröffentlichungen die bis 1906 verfügbaren astronomisch-geodätischen Messungen, und zwar 265 Polhöhen, 79 Längen und 163 Azimute verwendet; sie betreffen zunächst nur die Richtung der Schwerkraft. Das ganze Gebiet liegt zwischen $48^{\circ} 47'$ und $29^{\circ} 57'$ nördlicher Breite, und $67^{\circ} 16'$ und

*) Zur Ergänzung dieser Darlegungen sehe man den Aufsatz des Herrn Laska: «Ueber die Isostasie der Erdkruste», im VIII. Jahrgange dieser Zeitschrift, Heft 12, Seite 388—391.

127° 24' westlicher Länge gegen Greenwich. Die Verteilung der Stationen ist noch ungleichmäßig; sie bedecken vom ganzen Gebiete knapp die Hälfte. Als Ausgangsstation diente die im Innern liegende Station I. O. Meades Ranch, als Referenz-Ellipsoid das Clarke'sche von 1866.

Aus den mit diesen Unterlagen erhaltenen Abweichungen: astronomische minus geodätische Messung in nordsüdlicher und ostwestlicher Richtung wurden zunächst Niveaukurven einer Geoidfläche konstruiert und mit den Niveaukurven der physischen Erdoberfläche verglichen. Es zeigten sich einige gemeinsame Züge, zum Teil aber auch wesentliche Verschiedenheiten, so daß auch hiernach die Unregelmäßigkeiten der physischen Erdoberfläche diejenigen in der Richtung der Schwerkraft nicht allein bedingen können.

Danach wurde an die topographische Reduktion, die Berechnung der Anziehung der Massen, gegangen, die sich über den Meeresspiegel erheben und diese Reduktionen wurden mit den beobachteten Abweichungen verglichen; sie zeigen ein durchaus anderes Verhalten. Einige drastische Beispiele sind von Herrn Hayford zusammengestellt worden. Man findet sie in der 3. und 4. Spalte im oberen Teile der folgenden Tabelle.

Tabelle 1.

Nr. der Station	Verti- kal	Beobachtete Abweichung		Berechnete Abweichungen						
		(astr. geod.)	(topogr.)	Kompensation bei gleichmäßiger Dichteverteilung bis zu einer Tiefe von km						
				329.8	231.3	162.2	120.9	113.7	79.8	
		"	"			"	"	"		
238	N-S	18.38	- 64.97			- 14.91	- 12.78	- 12.35		
1	O-W	+ 16.98	+ 104.63	"		+ 20.39	+ 16.45	+ 15.69	"	
115	O-W	- 6.62	- 54.30	- 7.96		- 3.23	2.09	- 1.92	- 1.09	
43	O-W	+ 24.84	+ 54.71			+ 22.11	+ 20.38	+ 20.00		
49	N-S	- 13.52	- 27.20			- 9.42	- 8.66	- 8.53		
178	O-W	- 14.77	- 37.46	- 10.32	"	- 9.20	- 8.80	- 8.73		
216	N-S	+ 2.44	- 0.53	+ 3.98	+ 3.70	+ 3.30	+ 2.93	+ 2.85		
169	N-S	+ 1.92	- 12.96	+ 3.86		+ 3.62	+ 3.40	+ 3.33		
205	O W	+ 3.47	- 11.94	+ 3.02	+ 2.78	+ 2.46	+ 2.17	+ 2.11		
209	N-S	+ 1.96	- 10.01	- 0.05	+ 0.03	+ 0.07	+ 0.11	+ 0.10		
		Nach den Ausgleichungen übrig bleibende Abweichungen.								
		Ausgl	A	B		E	H	G		
		"	"	"		"	"	"		
238			- 14.34	+ 10.21		- 3.66	- 4.78	- 5.04		
1			+ 12.95	- 18.75		- 1.12	+ 1.00	+ 1.45		
115			- 5.15	+ 12.41		- 3.84	- 4.52	- 4.61		
43			+ 14.48	+ 8.15		- 1.93	- 1.49	- 1.34		
49			- 11.03	- 10.02		- 3.59	- 3.83	- 3.88		
178			- 12.83	- 20.29		- 6.30	- 6.02	- 5.97		
216			+ 2.79	- 2.91		+ 0.42	+ 0.65	+ 0.69		
169			+ 2.85	2.83		- 1.14	- 0.76	+ 0.68		
205			+ 4.25	- 5.55	"	+ 0.90	+ 1.37	+ 1.46		
209			+ 2.87	- 4.52		+ 2.26	+ 2.41	+ 2.44		

Diese 10 Stationen liegen in verschiedenen Gegenden und die Beobachtungen verteilen sich auf beide Haupthimmelsrichtungen. Die Amplitude der beobachteten Abweichungen ist rund 43", die der berechneten 170", die berechnete Ab-

weichung der Station Nr. 115 ist rund das 8fache der beobachteten; das Verhalten der Vorzeichen ist sehr verschieden.

Nachbarstationen verhalten sich ähnlich, wie aus der 2. und 3. Spalte folgender Tabelle hervorgeht; das ganze Gebiet ist von Herrn Hayford in vier Bezirke (nordöstlicher, südöstlicher, zentraler, westlicher) geteilt worden und für jeden wurden Breiten-, Längen- und Azimut-Abweichungen für sich zusammengestellt, so daß im ganzen 12 Gruppen von Abweichungen entstehen. Tabelle 2 enthält die hier willkürlich herausgegriffenen Längenabweichungen des südöstlichen Bezirkes.

Tabelle 2.

Nr. der Station	Beobachtete Abweichung (astr.-geod.)	Berechnete Abweichung (topogr.)	Berechnete Abweichungen.				
			Kompensation bei gleichmäßiger Dichteverteilung bis zu einer Tiefe von km				
			329.8	162.2	120.9	113.7	79.8
	"	"	"	"	"	"	"
87	+ 2.16	- 21.75	+ 2.39	+ 2.14	+ 1.86	+ 1.79	+ 1.38
114	- 2.24	- 41.98	- 8.39	- 5.66	- 4.76	- 4.60	- 3.67
90	- 0.41	- 43.61	- 8.43	- 5.45	- 4.53	- 4.35	- 3.37
92	- 2.57	- 40.99	- 7.80	- 5.23	- 4.38	- 4.21	- 3.35
99	- 4.26	- 41.66	- 5.63	- 3.16	- 2.53	- 2.44	- 1.86
100	- 2.96	- 41.24	- 5.04	- 2.53	- 1.89	- 1.80	- 1.24
101	- 5.07	- 40.68	- 4.34	- 1.82	- 1.20	- 1.10	- 0.57
118	- 5.37	- 40.88	- 4.53	- 2.02	- 1.39	- 1.30	- 0.78
113	- 3.57	- 44.31	- 5.27	- 2.43	- 1.77	- 1.66	- 1.16
119	+ 1.14	- 35.24	- 4.59	- 2.56	- 1.97	- 1.88	- 1.37
130	+ 0.96	- 22.20	- 0.53	- 0.14	- 0.07	- 0.07	- 0.05
123	+ 0.80	- 14.21	+ 0.89	+ 0.53	+ 0.37	+ 0.33	+ 0.18
131	- 1.03	- 16.57	+ 0.43	+ 0.37	+ 0.31	+ 0.31	+ 0.23
132	- 1.64	- 14.40	+ 0.24	+ 0.20	+ 0.16	+ 0.16	+ 0.09
137	+ 3.41	- 15.11	- 0.57	- 0.31	- 0.24	- 0.24	- 0.19
141	- 0.19	- 14.59	- 1.09	- 0.44	- 0.29	- 0.27	- 0.17

Nach den Ausgleichungen übrig bleibende Abweichungen.

	Ausgl. A	B	E	H	G
	"	"	"	"	"
87	+ 2.76	- 1.70	- 0.39	+ 0.17	+ 0.27
114	- 1.33	+ 8.35	+ 2.85	+ 2.36	+ 2.27
90	+ 0.57	+ 10.59	+ 4.44	+ 3.96	+ 3.85
92	- 1.57	+ 5.46	+ 2.06	+ 1.65	+ 1.55
99	- 3.10	+ 1.55	- 1.77	- 1.90	- 1.91
100	- 1.80	+ 2.37	- 1.12	- 1.24	- 1.25
101	- 3.91	- 0.41	- 3.93	- 4.04	- 4.06
118	- 4.21	- 0.52	- 4.03	- 4.15	- 4.16
113	- 2.46	+ 5.52	- 1.82	- 1.97	- 2.00
119	+ 1.83	+ 8.99	+ 3.24	+ 2.96	+ 2.92
130	+ 1.22	+ 3.71	+ 0.83	+ 0.90	+ 0.92
123	+ 0.77	+ 1.09	+ 0.15	+ 0.43	+ 0.37
131	- 1.01	+ 0.47	- 1.56	- 1.34	- 1.46
132	- 1.78	+ 0.56	- 1.93	- 1.80	- 1.92
137	+ 3.21	+ 7.43	+ 3.64	+ 3.65	+ 3.53
141	- 0.64	+ 7.99	+ 0.30	+ 0.10	- 0.05

Die Vorzeichen der topographischen Reduktion in den 9 Gruppen des nordöstlichen, südöstlichen und zentralen Bezirkes sowie der Breitengruppe des westlichen Bezirkes sind durchwegs negativ; von den 26 Vorzeichen der Längengruppe des westlichen Bezirkes ist nur eine, von den 65 der Azimutgruppe sind nur drei negativ. Dieses Verhalten hängt offenbar mit der Lage des vermessenen Gebietes zum nordamerikanischen Kontinent zusammen.

Eine derartige Verteilung der Vorzeichen ist nun bei den beobachteten Abweichungen der 9 Gruppen der zuerst genannten Bezirke überhaupt nicht vorhanden, wohl aber im westlichen Bezirke, und zwar im gleichen Sinne wie bei der topographischen, wenn auch nicht so ausgeprägt.

Um diese Widersprüche zu beseitigen, wurde zur Pratt'schen Hypothese Zuflucht genommen, und zwar wurde sie folgendermaßen in die Form einer »working hypothesis« gebracht: Die Meereshöhe wird als normal betrachtet, die darüberliegende Masse wird durch eine Verminderung der Dichtigkeit der unter der Meeresfläche liegenden Schichten bis zu einer gewissen, vorläufig unbekannt bleibenden Ausgleichstiefe h_u kompensiert. Das Wasser des Ozeans wird kondensiert über dem Meeresboden zu einer Schichte von mittlerer Dichtigkeit 2.67, der leere Raum zwischen der so entstehenden Schichtoberfläche bis zur Meeresfläche wird durch eine Vermehrung der Dichtigkeit unterhalb bis h_u kompensiert. Die Änderung der Dichtigkeit der Schichte unter der Meeresoberfläche soll proportional sein mit der Höhe der Schichte zwischen Meeresoberfläche und der eingeebneten Erdoberfläche, auf der See nach Kondensation des Meerwassers.

Zur Berechnung selbst wurde die Erdoberfläche, mit der betreffenden Station selbst als Mittelpunkt, in Zonen und Sektionen geteilt. Es mögen bedeuten:

δ die mittlere Krustendichtigkeit,

Δ die mittlere Erddichtigkeit,

a' und a die Azimute zweier aufeinanderfolgender Vertikalschnitte,

r' und r_1 zwei aufeinanderfolgende Radien;

dann lautet nach Clarke die Formel für die Anziehung einer horizontalen Schichte von der Dichte h :

$$A = \text{topographische Anziehung} = 12.44 \frac{\delta h}{\Delta} (\sin a' - \sin a) \lg \frac{r'}{r_1}. \quad \text{Die}$$

Konstante 12.44 hängt mit den Dimensionen des Erdkörpers zusammen.

Die Oberflächeneinteilung wurde so getroffen, daß die Sinus in arithmetischer, die Radien in geometrischer Progression wachsen, und zwar wurde aus Zweckmäßigkeitsgründen genommen: $\sin a' - \sin a = 0, 25, \frac{r'}{r_1} = 1.426$. Damit entstand die einfache Formel

$$A = 0.000\ 1000 \times \text{mittlerer Höhe innerhalb einer Netzmasche in Fuß.}$$

Die mittlere Meereshöhe innerhalb einer Masche wurde mit Hilfe von Gittern aus Höhenschichtenkarten gewonnen.

Soll genauer beachtet werden, daß die Oberfläche der anziehenden Schichte um die Höhe h' über oder unter dem angezogenen Punkte liegt, so ist die Formel anzuwenden:

$$A = 12.44 \frac{\delta \cdot h'}{\Delta} (\sin a' - \sin a) \lg \frac{r' + \sqrt{r'^2 + h'^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + h_1^2}}$$

Die vorige Formel ist angewendet worden für die Anziehung der Massen über der Erdoberfläche, diese wurden also als im Horizonte der Station liegend angenommen; die zweite, genauere Formel ist angewendet worden für die unter der Meeresfläche liegenden Massen. Es erwies sich als nötig, in der Berücksichtigung der horizontalen Anziehung bis rund 4000 km Abstand von der Station zu gehen; die beiden Schichten wurden dabei als ebene, im Horizont der Station liegende angesehen, was näherungsweise erlaubt ist. Errichtet man in den 4 Ecken einer Masche zwischen den Koordinaten $a' a r' r_1$ Senkrechte auf dem Horizont, nennt Q den Querschnitt des so entstehenden Prismas, so sei die Masse über dem Meereshorizont $Q \cdot h_0 \cdot \delta_0$, die kompensierende Masse unter ihm $Q \cdot h_u \cdot \delta_u$, so soll sein $h_0 \delta_0 = -h_u \cdot \delta_u$, wodurch der Prattischen Hypothese in rechnerischer Weise Ausdruck gegeben wird. Die Größe $\delta_u = -\delta_0 \cdot \frac{h_0}{h_u}$ kann positiv oder negativ sein, ihr absoluter Betrag zählt nach einigen Hundertteilen, dem Sinne nach ist sie eine Vermehrung oder Verminderung der Dichtigkeit der unteren Schichte.

Damit wird:

die topographische Ablenkung der Masse über dem Meeresspiegel

$$A_0 = +12.44 \frac{\delta_0 h_0}{\Delta} (\sin a' - \sin a) \lg \frac{r'}{r_1},$$

diejenige der kompensierenden Masse unterhalb

$$A_u = -12.44 \frac{\delta_0 h_0}{\Delta} (\sin a' - \sin a) \lg \frac{r' + \sqrt{r'^2 + h_u^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + h_u^2}}$$

Numerisch gegeben ist von beiden A_0 , die als wirksam angenommene Summe beider Anziehungen ist $A_0 + A_u$. Der Faktor, mit dem A_0 zu multiplizieren ist, um $A_0 + A_u$ zu erhalten, wird

$$F = \frac{A_0 + A_u}{A_0} = 1 - \frac{\lg \frac{r' + \sqrt{r'^2 + h_u^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + h_u^2}}}{\lg 1.426}$$

F ist allen Maschen einer Zone gemeinsam und kann zur leichteren Übersicht über seinen Verlauf anstatt von 3 Argumenten $r_1 r' h_u$ auch nur von einem Argumente abhängig gemacht werden, nämlich von dem Depressionswinkel i , unter dem die Tiefe h_u von der Station aus erscheint; es wird mit $\cos i = r_1 : \sqrt{r_1^2 + h_u^2}$ und $r' : r_1 = 1.426$ in erster Näherung

$$F = 1 - 0,8244 \cos i - 0,1756 \cos^3 i.$$

Für entfernte Maschen und Massen ist i klein, damit wird F und die kompensierte Anziehung klein; für sehr nahe Massen ist i nahe 90° , F nahe 1, das heißt: die Anziehung der oberen Schichte überwiegt.

Die Summe der topographischen Beiträge aller Maschen eines Ringes wird mit dem zugehörigen F multipliziert und die Produkte werden über sämtliche

Ringe summiert. Die mit Rücksicht auf eine solche Kompensation berechneten topographischen Anziehungen für eine Gruppe stehen in der 4. bis 8. Rubrik der Tabelle 2 und für die von Herrn Hayford getroffene Auswahl in der 5. bis 10. Rubrik der Tabelle 1; sie nähern sich offenbar den beobachteten, nicht nur im großen und ganzen, sondern vielfach auch im einzelnen, wenn auch nicht ausschließlich; sie variieren noch je nach der Ausgleichstiefe h_n , das plausibleste h_n soll aus einem Ausgleich nach der Methode der kleinsten Quadrate folgen.

Die Fehlergleichung für eine Station und für eine nordsüdliche Abweichung beispielsweise wird in der bekannten Form angesetzt:

$$k(\varphi) + l(\lambda) + m(\alpha) + n \frac{a}{100} + \rho(10000e^2) + \varphi \text{ astr.} - \varphi \text{ geod.} = A_m.$$

Es bedeuten (φ) (λ) (α) gesuchte Verbesserungen der Koordinaten der Ausgangsstation, a und e^2 solche der großen Halbachse und des Quadrates der Excentricität der Meridianellipse; $k, l, m, \frac{n}{100}, 10000\rho$ sind theoretische, numerisch angegebene Koeffizienten, φ astr. die beobachtete astronomische, φ geod. die auf Grund der oben erwähnten Ausgangswerte berechnete geodätische Polhöhe, A die nach der Ausgleichung übrig bleibende Lotabweichung. Die Ausgleichung dieser 507 Fehlergleichungen wird auf 5 verschiedene Arten vollzogen und zwar sind die absoluten Glieder bei Lösung

A :	die beobachteten Lotabweichungen selbst,
B :	« « « minus unveränderte topographische Anziehung,
E :	« « « minus topograph. Anziehung für Ausgleichstiefe 162.2 km,
H :	« « « minus topograph. Anziehung für Ausgleichstiefe 120.9 km,
G :	« « « minus topograph. Anziehung für Ausgleichstiefe 113.7 km.

Lösung A entspricht dem bisher üblichen Verfahren. Welche der Lösungen und welche der Ausgleichstiefen anzunehmen ist, wird nach der Größe der übrig bleibenden Quadratsummen entschieden; diese sind:

für Lösung	A 13922
	B 65434
	E 8220
	H 8020
	G 8013

Demgemäß wurde Lösung G als plausibleste vorgezogen; B gibt eine Achsenverbesserung von ± 5 km und eine Abplattung 1:269, also ganz unannehmbare Resultate. Die resultierenden Verbesserungen der Koordinaten der Ausgangsstation interessieren hier wenig, sie sind unauffällig; die große Halbachse erhält gemäß G eine Vergrößerung von $\pm 76 \text{ m} \pm 34 \text{ m}$, die Abplattung wird 1:297.8 ± 0.9 , sehr gut stimmend mit den besten neuen Werten, die dicht bei 1:298 liegen. Es wird auch hier wieder bestätigt, daß die Bessel'sche Halbachse und die

Clarke'sche Abplattung aufgegeben werden müssen. Die ausgeglichenen Lotabweichungen findet man oben in den zweiten Hälften der Tabellen 1 und 2; (zum Teil waren auch topographische Abweichungen für andere Ausgleichstiefen, nämlich 329.8, 231.3 und 79.8 km berechnet, aber nicht mit zur Ausgleichung herangezogen worden.) Man kann sie zurückführen auf Ungenauigkeit der topographischen Anziehung der oberirdischen Masse, Unkenntnis der Verteilung der unterirdischen Massen, zum kleinsten Teil auf die Ungenauigkeit der astronomischen Daten; letztere kann man im Durchschnitt auf ± 0.3 schätzen.

Da absolute Lotabweichungen zur Zeit nicht zu erlangen sind, wird immer ein Entschluß zur Annahme eines endgültigen Systems von Lotabweichungen nötig werden. Man wird sich umso eher für ein System entschließen, je weniger sich die berechneten Lotabweichungen mit den Voraussetzungen ändern. Wie man sieht, ändern sich die obigen ausgeglichenen Lotabweichungen bei Lösung $E // B$ nur noch um einige 0.1, die Änderungen sind also von der Ordnung der Beobachtungsgenauigkeit.

Die Seiten 116 bis 169 sind in der Hauptsache der Untersuchung einer großen Zahl von Fehlerquellen und anderer Annahmen über die Grundlagen der ganzen Rechnung gewidmet. Durch ein besonderes Verfahren wird auch die plausibelste Ausgleichstiefe aus den Restquadratsummen der drei Lösungen $E // G$ ermittelt, es ergibt sich 113.0 km, wenig von der der Lösung G zugrunde gelegten abweichend. Den mittleren Fehler dieses Wertes, den Herr Hayford nicht angibt, hat später Herr Helmert*) berechnet zu ± 14 km. Es ist hervorzuheben, daß sich die Ausgleichstiefe als eine sehr empfindliche Größe herausstellt insoferne, als sie sich bei anderen Annahmen über die Verteilung der Dichte δ , stark ändert; für die verschiedenen von Herrn Hayford gerechneten Annahmen schwankt sie zwischen 60 km und 287 km, aus anderen Gründen sind aber die betreffenden Annahmen unwahrscheinlich.

Den Schluß der ersten Veröffentlichung bilden Vergleiche mit den Ergebnissen anderer Gradmessungen, sowie eine kurze Zusammenfassung der Schlüsse, zu denen die ganze Untersuchung führt. —

Die zweite Veröffentlichung ergänzt die erste durch das in den Jahren 1906–1909 hinzutretende Beobachtungsmaterial; dies sind nicht weniger als 258 astronomische Daten, nämlich 116 Polhöhen, 52 Längen, 90 Azimute. Die neuen Stationen liegen teils zwischen den alten, teils in anderen Gegenden.

Das neue Material wurde erstens für sich ebenso behandelt wie das frühere, es lieferte nichts wesentlich neues; die Ausgleichstiefe ergab sich zu 102.3 km.

Zweitens wurden die $507 + 258 = 765$ Beobachtungen zusammen ausgeglichen; es ergab sich als Verbesserung der Clarke'schen großen Halbachse: $+ 106 \text{ m} \pm 18 \text{ m}$, als Abplattung $1:297.0 \pm 0.5$. Damit wird die große Halbachse für das Vermessungsgebiet der Vereinigten Staaten $6\,378\,388 \text{ m} \pm 18 \text{ m}$. Für die Ausgleichstiefe wurde erhalten 122.2 km.

*) Über die Genauigkeit der Dimensionen des Hayford'schen Erdellipsoids: von F. R. Helmert. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1911 II.

(Hier muß eingefügt werden, daß um dieselbe Zeit Herr Helmert*) aus dem Verhalten der Schwerestörungen an den Steilküsten der Kontinente mit Benützung der Pratt'schen Idee vom Massenausgleich erhielt: 118 + 22 km; als Referenzfläche diente nicht wie bei Herrn Hayford die Meeresoberfläche, sondern eine Fläche in 4000 Meter Tiefe. Diese Übereinstimmung ist bemerkenswert, weil der Helmert'sche Wert auf den Messungen der Intensität der Schwerkraft beruht, die Hayford'schen jedoch, wie schon erwähnt, auf denen der Richtung.)

In der dritten Abhandlung untersucht Herr Hayford das Verhalten der Intensität der Schwerkraft von 56 amerikanischen und von 16 außeramerikanischen Stationen gegenüber der Pratt'schen Hypothese, und zwar unter Annahme einer Ausgleichstiefe von 113.7 km (die Ergebnisse der zweiten Abhandlung waren derzeit noch nicht verfügbar). Es werden die Anziehungen je zweier übereinanderliegender, zylindrischer Massenelemente berechnet, die sich kompensieren; dabei wird im Gegensatz zu früher die Kugelgestalt der Erde angenommen. Die Oberfläche wird wiederum in gewisser, für die Rechnung zweckmäßiger Weise eingeteilt und der Einfluß der zylindrischen Elementenpaare über die ganze Kugel summiert. Die entferntesten Unterteile sind allerdings sehr groß; so ist der der Station gegenüberliegende Teil eine Kalotte mit einem sphärischen Radius von 29°.

An die beobachteten Schwerkraftswerte werden 3 Reduktionen einzeln angebracht:

1. die Vertikalanziehung der sich (nach Pratt) kompensierenden Massen,
2. die bekannte Bouguer'sche Reduktion für die zwischen der Station und dem Meereshorizont liegende Erdschichte,
3. die Reduktion in freier Luft.

Diese drei verschieden reduzierten Schwerkraftswerte werden mit der Helmert'schen Formel für normale Schwere von 1901 verglichen. Als entscheidend nimmt Herr Hayford an die Mittel der absoluten Beträge der Abweichungen; sie sind in cm

		bei Reduktion		
		nach Pratt	nach Bouguer	in freier Luft
für 56 amerikanische + 16 außer- amerikanische	} Stationen	0.018	0.066	0.030
		0.099	0.249	0.202

Somit spricht auch diese Art des Vergleiches zugunsten eines Ausgleiches der Massen nach Pratt. —

Durch diese gewaltigen Arbeiten der Coast and Geodetic Survey ist zweifellos erwiesen, daß durch die von ihr angewendete Reduktionsmethode eine bedeutende Verbesserung in der Uebereinstimmung ihrer Ergebnisse aus Gradmessungen wie aus Schweremessungen erreicht ist. Trotzdem kann man noch Bedenken tragen, auf die gleiche Art sämtliche Schweremessungen zu reduzieren,

* Die Tiefe der Ausgleichsfläche bei der Pratt'schen Hypothese für das Gleichgewicht der Erdkruste und der Verlauf der Schwerestörung vom Innern der Kontinente und Ozeane nach den Küsten; von F. R. Helmert. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften. 1909. XLVIII.

ein Gedanke, der am Schlusse der dritten Abhandlung (S. 389: General conclusion) angeregt wird; dem Referenten erscheint es wenigstens angezeigt, die Theorie des Massen-Ausgleichs vorher auf noch andere Art in Formeln und in Rechnung zu bringen.

Einmal ist es schwer, sich die Vorstellung: «eine nur wenige km dicke Schichte an der Erdoberfläche ist durch einen Dichtigkeitsunterschied kompensiert, der sich gleichmäßig bis zu einer Tiefe von rund 120 km erstreckt» ohne Bedenken anzueignen.

Zweitens ist es wohl nötig, die Entwicklungen weiter zu treiben, als hier geschehen ist. Die sich kompensierenden Massen der beiden zylindrischen Elemente sind zwar ihrem Betrage nach einander gleich, aber das eine hat eine Höhe (h_0) von einigen km, während das zweite eine solche (h_u) von 120 km hat; bedeutet R den Erdradius, so ist das Verhältnis $\frac{h_0}{R}$ von der Ordnung

$\frac{1}{5000} = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{100}$, $\frac{h_u}{R}$ dagegen von der Ordnung $\frac{1}{50}$. Nun ist die Summe der Wirkungen beider sich kompensierenden Elemente eine kleinere Größe als eine einzelne Komponente, namentlich bei größerer Entfernung von der Station; dabei muß untersucht werden, in welcher Weise sich der Unterschied zwischen zylindrischen und kegelförmigen Elementen geltend macht. Erstere stehen offenbar in Widerspruch mit der Kugelgestalt der Erdoberfläche. Rechnet man z. B. für eine Antipodenstation die Vertikalanziehung eines kompensierenden Elementenpaares sowohl bei zylindrischer Gestalt als bei kegelförmiger, so erhält man wesentlich verschiedene Beträge. Bei verschiedener Annahme der Gestalt und der Dichtigkeitsverteilung schwankt die Anziehung des Elementes an der Oberfläche infolge seiner geringen Dimensionen wenig, dagegen stehen die Schwankungen in der Anziehung des unteren Elementes infolge seiner größeren Tiefenerstreckung in einem endlichen Verhältnis zu der kleineren Summe der beiden sich kompensierenden Anziehungen. Zu beachten ist, daß diese Elementaranziehung über eine sphärische Kalotte von 29° Radius zu summieren ist. Der Umstand, daß die Beiträge aus den entfernteren Gebieten praktisch klein sind, entbindet nicht von der Notwendigkeit, Mängel der Theorie zu beheben.

Kleine Mitteilungen.

Metrisches Maß- und Gewichtssystem in Bosnien. Kürzlich wurde durch Landesgesetz, das am 1. September 1911 in Kraft trat, an Stelle des bisher üblichen türkischen Maßes und Gewichtes auch in Bosnien und der Herzegowina das metrische Maß- und Gewichtssystem obligatorisch eingeführt. Die Grundlagen der gesetzlichen Maße sollen nun auch in den Reichslanden das Meter und das Kilogramm sein. Gleichzeitig wurden Vorschriften über die obligatorische Eichung erlassen.