Paper-ID: VGI_191142

Beitrag zur rechnerischen Lösung des Pothenot'schen Problems

August Gabrielli [1]

[1] *k. k. Obergeometer in Linz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **9** (10), S. 319–322

1911

BibTEX:

```
@ARTICLE{Gabrielli_VGI_191142,
Title = {Beitrag zur rechnerischen L{\"o}sung des Pothenot'schen Problems},
Author = {Gabrielli, August},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {319--322},
Number = {10},
Year = {1911},
Volume = {9}
}
```

Das heißt in Worten: wir bekommen eine voraussichtlich sehr gute Summengleichung, wenn wir jede der gegebenen Gleichungen mit ihrer eigenen Absoluten, dividiert durch ihr Hypotenusenquadrat, multiplizieren und dann die Gleichungen addieren.

Wenn, was immer geschehen sollte, die Hypotenusen aus den Gleichungen grob wegdividiert sind, so daß für alle Gleichungen etwa gilt:

$$1 < h \lesssim 1 \cdot 3$$

dann kann man 97) genügend genau schreiben:

$$G = l_1 G_1 + l_2 G_2 + \ldots \qquad 98)$$

Das heißt in Worten: Wir erhalten eine gute Summengleichung G, wenn wir jede gegebene Gleichung grob mit ihrer eigenen Absoluten multiplizieren und dann addieren. Die Gleichung 98 lautet dann:

$$[a\,l]\,x + [b\,l]\,y + \ldots = [l^2] \qquad 99)$$

Diese Gleichung läßt leicht erkennen, daß die Summengleichung voraussichtlich gut ist. Die Absolute $[l^2]$ wächst nämlich voraussichtlich hoch an, da sie aus lauter positiven Gliedern besteht. Die Koeffizienten aber laufen voraussichtlich gar nicht hoch an, da sie aus teils positiven, teils negativen Gliedern bestehen. Die Hypotenuse H der Summengleichung wächst also durch die Addition viel weniger, als die Absolute. Da nun das Stellot s der Summengleichung bestimmt ist durch

$$s = \frac{[l^2]}{H} \qquad 100)$$

so ist das Stellot der Summengleichung voraussichtlich groß. Das war eben zu beweisen.

Wir können in der Vereinfachung noch weiter gehen. Bei der Erweiterung der Gleichungen $G_1\ G_2 \ldots$ können wir den Absoluten den numerischen Wert Eins geben. Das heißt mit anderen Worten: wir schreiben alle gegebenen Gleichungen mit positiven Absoluten, indem wir in jeder Gleichung mit negativen Absoluten die Vorzeichen umkehren, und addieren dann die Gleichungen. Die Summengleichung

$$[a]\,x + [b]\,y + \ldots = [l]$$

ist dann voraussichtlich gut.

Beitrag zur rechnerischen Lösung des Pothenotschen Problemes.

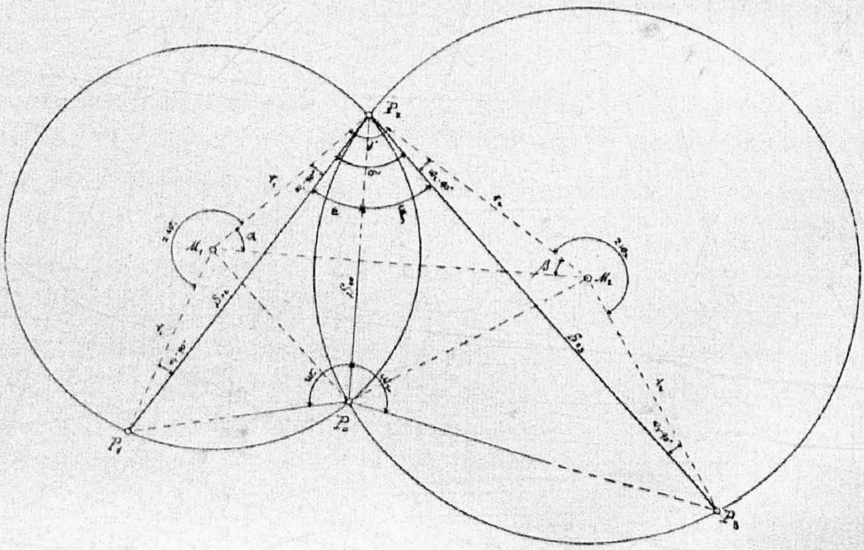
Von **August Gabrielli**, k. k. Obergeometer in Linz.

In den Monatsheften 7 und 8 des III. Jahrganges und in Nr. 10 des VIII. Jahrganges dieser Zeitschrift sind bereits Beiträge zur rechnerischen Lösung des Rückwärtseinschneidens enthalten.

In beiden Fällen wird jedoch die Punktbestimmung durch Einschaltung von Hilfspunkten, deren Koordinaten ebenfalls gerechnet werden müssen, vorgenommen.

Im Nachstehenden soll nun gezeigt werden, daß es auch ohne die erwähnte Einschaltung von Hilfspunkten möglich ist, die Koordinaten des zu bestimmenden Punktes zu finden, ähnlich jener Lösung, welche im Muster XI·*b* der Polygonal-Instruktion mit Zuhilfenahme der Hilfswinkel φ und ψ enthalten ist.

Es sind gegeben die rechtwinkeligen Koordinaten der Punkte P_1 P_2 P_3. Zu bestimmen sind die Koordinaten des Punktes P_0, wenn die Horizontalwinkel von diesem zu den drei gegebenen Punkten gemessen wurden, mit w_1 und w_2.



1. Graphische Lösung:

Dieselbe ist bekannt durch die Konstruktion der beiden Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 unter Zuhilfenahme der Zentriwinkel $2w_1$ und $2w_2$; der Schnittpunkt der beiden Kreise gibt den gesuchten Punkt P_0.

2. Rechnerische Lösung:

1. Da die Punkte P_1 P_2 P_3 gegeben sind durch ihre rechtwinkeligen Koordinaten, so sind ferner bekannt: Länge $P_1 P_2 = s_{12}$, Länge $P_2 P_3 = s_{23}$ und Winkel $P_1 P_2 P_3 = \sigma$, welchen man erhält aus der Differenz der Südwinkel σ_{11} und σ_{23}.

2. Gemessen wurden die Horizontalwinkel w_1 und w_2 von P_0 nach P_1 P_2 P_3.

3. Man rechnet sich die Radien r_1 und r_2 der beiden Kreise M_1 und M_2

$$r_1 = \frac{s_{12}}{2\cos(w_1 - 90)} = \frac{s_{12}}{2\sin w_1}; \quad r_2 = \frac{s_{23}}{2\sin w_2}$$

4. Aus dem Dreiecke M_1 P_2 M_2

$$\gamma = \sigma + w_1 + w_2 - 180^0$$

$$tg\,\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\,cotg\,\frac{\gamma}{2}$$

daraus bestimmt $\frac{\alpha - \beta}{2}$, weiter $90^0 - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$, woraus man durch Addition α und durch Subtraktion β erhält.

5. Aus den gleichschenkeligen Dreiecken $P_2\,M_1\,P_0$ und $P_2\,M_2\,P_0$

$$P_2\,P_0 = s_{20} = 2\,r_1\,\sin\alpha \text{ bezw. } s_0 = 2\,r_2\,\sin\beta$$

hieraus ist die Entfernung $P_2\,P_0 = s_{20}$ bestimmt.

6. $$\varepsilon + w_1 - 90^0 = 90^0 - \alpha \qquad \xi + w_2 - 90^0 = 90^0 - \beta$$
$$\varepsilon = 180^0 - \alpha - w_1 \qquad \xi = 180^0 - w_2 - \beta$$

Hieraus folgt die Bestimmung des Südwinkels σ_{20}

$$\sigma_{20} = \sigma_{21} - \varepsilon = \sigma_{23} + \xi$$

Da nun der Südwinkel und die Entfernung $P_2\,P_0$ gegeben sind, so ist:

$$d\,y = s_{20}\,\cos\sigma_{20} \qquad d\,x = s_{20}\,.\,\sin\sigma_{20}$$
$$y_0 = y_2 + d\,y \qquad x_0 = x_2 + d\,x$$

wodurch die Aufgabe gelöst erscheint; dabei ist noch zu bemerken, daß es für den obigen Rechnungsgang ganz gleichgültig ist, ob w größer oder kleiner als 90^0 ist.

3. Praktische Lösung:

Hiezu wähle ich der Gleichheit halber das Beispiel aus der Polygonal-Instruktion Muster XI b über die Bestimmung des Punktes △ 53.

Gegeben:

P_1 . . . $y_1 = -\,18.152{\cdot}68$; $x_1 = -\,111.044{\cdot}47$

P_2 . . . $y_2 = -\,18\,755{\cdot}73$; $x_2 = -\,112.370{\cdot}96$

P_3 . . . $y_3 = -\,20.272{\cdot}86$; $x_3 = -\,111.178{\cdot}68$

Gemessen:

$$w_1 = 125^0\;5'\;53''$$
$$w_2 = 114^0\;6'\;42''$$

Gerechnet: Winkel $P_1\,P_2\,P_3 = \sigma = 76^0\;17'\;4''$, ebenso s_{12} und s_{23} aus der Instruktion.

Die nun angeführten Nummern der Gleichungen beziehen sich auf vorstehenden Rechnungsgang.

3.

$$\begin{array}{rl}
\log s_{12} &= 3{\cdot}16350 \\
-\log\sin w_1 &= 9{\cdot}91284 \\
-\log 2 &= 0{\cdot}30103 \\
\hline
\log r_1 &= 2{\cdot}94963 \\
r_1 &= 890{\cdot}50 \\
\hline
r_1 - r_2 &= -\;166{\cdot}51
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log s_{23} &= 3{\cdot}28546 \\
-\log\sin w_2 &= 9{\cdot}96035 \\
-\log 2 &= 0{\cdot}30103 \\
\hline
\log r_2 &= 3{\cdot}02408 \\
r_2 &= 1057{\cdot}01 \\
\hline
r_1 + r_2 &= 1947{\cdot}51
\end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rl}
\log\,(r_1 - r_2) &= 2{\cdot}22144 \\
\log\,\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2} &= 9{\cdot}61190 \\
\hline
\text{Summe} &= 1{\cdot}83334 \\
-\log\,(r_1 + r_2) &= 3{\cdot}28948 \\
\hline
\log\,\operatorname{tg}\dfrac{(\alpha-\beta)}{2} &= 8{\cdot}54386
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\sigma &= 76^0\;17'\;4'' \\
w_1 &= 125^0\;5'\;53'' \\
w_2 &= 114^0\;6'\;42'' \\
\hline
\text{Summe} &= 315^0\;29'\;39'' \\
&-\;180^0 \\
\hline
\gamma &= 135^0\;29'\;39''
\end{array}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 2^\circ\ 0'\ 13'' \qquad \frac{\gamma}{2} = 67^\circ\ 44'\ 50''$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 22^\circ\ 15'\ 10'' \qquad 90 - \frac{\gamma}{2} = 22^\circ\ 15'\ 10'' = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\alpha = 24^\circ\ 15'\ 23''$$

$$\beta = 20^\circ\ 14'\ 57''$$

5.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{\cdot}30103 \\ \log r_1 &= 2{\cdot}94963 \\ \log \sin \alpha &= 9{\cdot}61365 \\ \hline \log s_{20} &= 2{\cdot}86431 \end{aligned} \qquad \text{Probe:} \qquad \begin{aligned} \log 2 &= 0{\cdot}30103 \\ \log r_3 &= 3{\cdot}02408 \\ \log \sin \beta &= 9{\cdot}53921 \\ \hline \log s_{20} &= 2{\cdot}86432 \end{aligned}$$

6. $\varepsilon = 180 - \beta - w_2 = 45^\circ\ 38'\ 21''$

$\sigma_{23} = 308^\circ\ 9'\ 47''$ (Instruktion).

$$\sigma_{20} = 353^\circ\ 48'\ 8''$$

$$\begin{aligned} \log s_{20} &= 2{\cdot}86432 \\ \log \cos \sigma_{20} &= 0{\cdot}03327 \\ \hline \log dy &= 1{\cdot}89759 \\ -dy &= 78{\cdot}99 \\ y_2 &= -\ 18.755{\cdot}73 \\ \hline y_0 &= -\ 18.834{\cdot}72 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log s_{20} &= 2{\cdot}86432 \\ \log \sin \sigma_{20} &= 9{\cdot}99745 \\ \hline \log dx &= 2{\cdot}86177 \\ +dx &= 727{\cdot}39 \\ x_2 &= -\ 112.370{\cdot}96 \\ \hline x_0 &= -\ 111.643{\cdot}57 \end{aligned}$$

wodurch die Übereinstimmung mit dem Resultate der Polygonal-Instruktion gegeben ist.

Daran anknüpfend möchte ich noch bemerken, daß dem Rückwärts-Einschneiden seitens der Vermessungsbeamten draußen im Bezirke, speziell im Gebirge nicht jene Beachtung geschenkt wird, welche demselben infolge des geringen Zeitaufwandes und der großen Genauigkeit zukommen sollte.

Da, wo in der Regel alte Anknüpfungspunkte versagen, im Alpengebiete und im Hochgebirge, wo schon seinerzeit bei der Originalaufnahme nicht mit der wünschenswerten Genauigkeit vorgegangen wurde, wo geodätische Aufnahmen nur mit vielen Schwierigkeiten und großem Zeitaufwande ausgeführt werden können, wird man immer noch am besten die Punktbestimmung nach Pothenot anzuwenden in der Lage sein.

Es mögen sich viele Vermessungsbeamte vielleicht vor dem im ersten Augenblicke komplizierten Rechnungsgange abschrecken lassen, aber ich bin der Meinung, daß es nur auf den ersten praktischen Versuch ankommt, um sich von der Zweckmäßigkeit dieser Punktbestimmung zu überzeugen.

Im Vermessungsbezirke Zell am See, der fast durchwegs Hochlandcharakter zeigt, bin ich häufig in die Lage gekommen, diese Punktbestimmung anzuwenden, nicht nur für lokale geodätische Arbeiten, sondern auch für Präzisionsarbeiten, wie für die Triangulierung von Gemeinden behufs Neuaufnahme nach der Polygonalmethode, und waren die Ergebnisse auch für letztere Arbeiten äußerst zufriedenstellend.