Paper-ID: VGI_191137

Lotverfahren

Karl Fuchs [1]

[1] *Preßburg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **9, 10** (9, 10, 2, 3), S. 273–285, 305–319, 47–54, 73–77

1911, 1912

BibTEX:


```
@ARTICLE{Fuchs_VGI_191137,
Title = {Lotverfahren},
Author = {Fuchs, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {273--285, 305--319, 47--54, 73--77},
Number = {9, 10, 2, 3},
Year = {1911, 1912},
Volume = {9, 10}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN
DES
VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 9. **Wien, am 1. September 1911.** **IX. Jahrgang.**

Lotverfahren.

Von Professor **Karl Fuchs** in Preßburg.

I.

Vor einiger Zeit ist im Archiv für Mathematik und Physik eine kurze Notiz von mir erschienen, in der das folgende Näherungsverfahren der Elimination mathematisch kurz entwickelt ist. Es seien n Gleichungen $G_1 G_2 \ldots$ mit n Unbekannten gegeben:

$$\left.\begin{array}{ll} G_1: & a_1 x + b_1 y + \ldots = l_1 \\ G_2: & a_2 x + b_2 y + \ldots = l_2 \\ \ldots & \ldots \end{array}\right\} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Wir fassen diese Gleichungen als Gleichungen von n Ebenen $E_1 E_2 \ldots$ auf, die sich in einem Punkte P_0 von den unbekannten Koordinaten $XY \ldots$ schneiden. Wir können den Punkt P_0 im Raume so finden: Vom Ursprunge O aus projizieren wir einen Punkt, den Wanderpunkt, auf die Ebene E_1. Von dort projizieren wir ihn auf die Ebene E_2, von dort auf E_3 u. s. w. Wir kommen so notwendig dem Punkte P_0 asymptotisch immer näher. Der Wanderpunkt beschreibt so ein Polygon von irgendwelchen Seiten $t_1 t_2 \ldots$ im Raume, und jede Seite t ist ein L o t, das auf eine Ebene gefällt wird. Da wir Länge und Stellwinkel jeden Lotes aus den gegebenen Gleichungen G berechnen können, können wir auch die gewünschten Koordinaten XY des Punktes P_0 in beliebig hoher Annäherung finden. Für dieses Näherungsverfahren habe ich den Ausdruck L o t v e r f a h r e n gebraucht.

Da in der Notiz die Tragweite dieses Gedankens nicht betont war, ist seine Fruchtbarkeit bezweifelt worden. Es soll nun an dieser Stelle gezeigt werden, daß ziemlich a l l e Näherungsverfahren der Elimination mehr oder weniger verkappte Lotverfahren sind. Diese Darstellung wird darum nützlich sein, weil sie uns die oft sehr nahe V e r w a n d t s c h a f t scheinbar ganz heterogener Verfahren erkennen läßt und sie vergleichbar macht, uns überraschende Einblicke in die G r ü n d e vieler Schwierigkeiten im Eliminationsverfahren gewährt und uns in den Stand setzt, G e g e n m i t t e l zu finden.

Der erste Teil der vorliegenden Studie geht von den Ebenen aus, die durch die gegebenen Gleichungen $G_1\, G_2 \ldots$ unmittelbar dargestellt werden. Der zweite Teil wird von Ebenen ausgehen, deren Gleichungen den Kolumnen der gegebenen Gleichungen entnommen sind:

$$\left.\begin{aligned} a_1\xi + a_2\eta + \ldots &= \\ b_1\xi + b_2\eta + \ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Dabei werden die Absoluten $l_1\, l_2 \ldots$ als die bekannten Koordinaten eines Fernpunktes P_0 angesehen. Es wird sich zeigen, daß die Näherungsverfahren, die auf der zweiten geometrischen Deutung der Elimination (Kolumnenebenen) beruhen, bedeutend besser sind, als die Verfahren, die auf der ersten und gebräuchlichen Deutung (Zeilenebenen) beruhen.

Es ist notwendig, zunächst eine Reihe alter und neuer Sätze über die Ebenen im n-dimensionalen Raume kurz darzustellen. Es wird sich eine Terminologie ergeben, die das Labyrinth des Eliminationsproblemes klar und durchsichtig macht, und das allein ist schon ein Gewinn.

Eine Ebene.

Die Gleichung G einer Ebene E im n-dimensionalen Raume R^n lautet:

$$G: \qquad ax + by + \ldots = l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

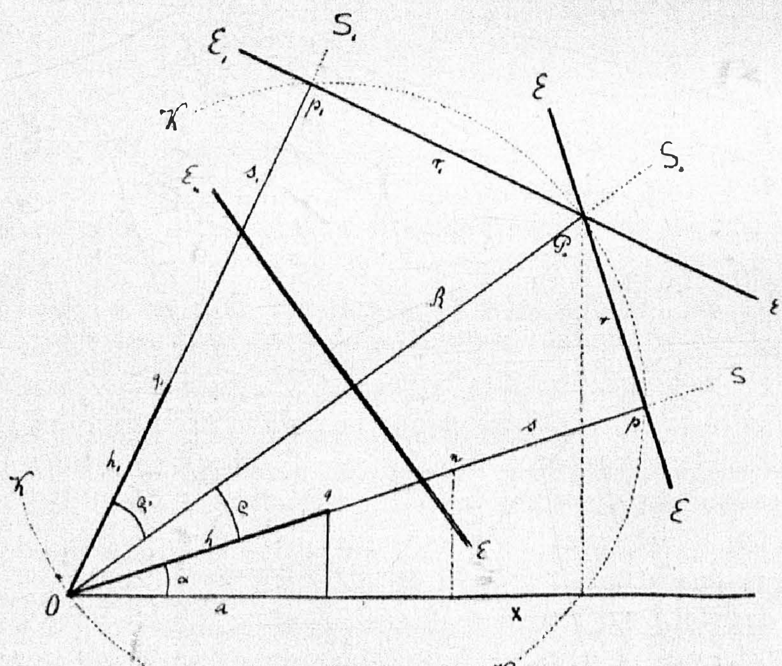

Fig. 1.

Eine solche Ebene ist aber nicht etwa ein zwei-dimensionaler Raum R^2, sondern ein $(n-1)$-dimensionaler Raum R^{n-1}, denn durch den funktionellen Zusammenhang zwischen den Variabeln $xy \ldots$ wird nur eine Variable unserer freien Verfügung entzogen.

Unter der Hypotenuse h der Gleichung G wollen wir die folgende Funktion der Koeffizienten verstehen:

$$h^2 = a^2 + b^2 + \ldots \qquad 4)$$

Wenn wir die Gleichung G mit irgend einem Faktor u multiplizieren, also die Gleichung uG ableiten, dann erhält diese die Hypotenuse

$$t = uh,$$

die wir abgeleitete oder sekundäre Hypotenuse nennen wollen. Die Hypotenuse h fassen wir immer als positive Größe auf.

Die Normalform der Gleichung G lautet:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + \ldots = s \qquad 6)$$

Hier ist s das Stellot der Ebene und $\alpha\beta\ldots$ sind Stellwinkel:

$$\left.\begin{array}{lll} \cos\alpha = \dfrac{a}{h} & \cos\beta = \dfrac{b}{h} & \ldots \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \ldots = 1 & & \end{array}\right\} \qquad 7)$$

Das Stellot s liegt im Normalstrahle S der Ebene E, der durch den Ursprung O geht. Die Stellwinkel $\alpha\beta\ldots$ beziehen sich dem Sinne nach auf den Normalstrahl S und nicht auf das Stellot, das allerdings in diesem Strahle liegt. Die Stellwinkel $\alpha\beta\ldots$ sind die Winkel, die der positive Ast des Strahles S mit den positiven Ästen der Koordinatenachsen bildet. Wenn das Stellot s negativ ist, dann bedeutet das, daß die Ebene E den Strahl S in seinem negativen Aste schneidet. Wenn wir dann die Normalgleichung mit -1 multiplizieren, dann haben wir die Richtung des Strahles S umgekehrt und seinen negativen Ast zum positiven gemacht. An Stelle der Stellwinkel $\alpha\beta\ldots$ sind dann die Stellwinkel

$$\pi - \alpha \qquad \pi - \beta \qquad \ldots$$

getreten und jetzt schneidet dieselbe Ebene E den Strahl im nunmehr positiven Aste.

Diese Erörterung wird uns vor bösen Irrtümern bewahren.

Die Konstitutionsformel der Ebenengleichung S lautet:

$$x \,.\, h\cos\alpha + y \,.\, h\cos\beta + \ldots = hs \qquad 8)$$

Die Absolute l einer Ebenengleichung G ist also das Produkt der Koeffizientenhypotenuse h und des Stellotes s:

$$l = hs \qquad 9)$$

Die Eins-Form der Ebenengleichung ergibt sich, wenn wir die Absolute l wegdividieren, so daß sie die Gestalt erhält:

$$a'x + b'y + \ldots = 1 \qquad 10)$$

Die Konstitutionsformel 8) in der Eins-Form lautet so:

$$\left. x \,.\, \frac{\cos\alpha}{s} + y \,.\, \frac{\cos\beta}{s} + \ldots = 1 \right\} \qquad 11)$$

Die Hypotenuse dieser Gleichung ist:

$$\left. h^2 = \left(\frac{\cos\alpha}{s}\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta}{s}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{s^2} \right\} \qquad 12)$$

Die Hypotenuse einer Einsgleichung ist also der reziproke Wert des Stellotes.

Auf diesem Satze beruht ein bestechend hübsches Näherungsverfahren, das sich in neuerer Zeit großer Beliebtheit erfreut. Wir werden erkennen, daß es bedeutend überschätzt wird.

Der Normalstrahl S wird von der Ebene E in einem Punkte p geschnitten. Es ist das der Fußpunkt oder Endpunkt des Lotes s und wir nennen ihn den Lotpunkt p; seine Koordinaten sind:

$$\left.\begin{array}{lll} x = s\cos\alpha & y = s\cos\beta & \ldots \\ \;\; = \dfrac{la}{h^2} & \;\; = \dfrac{lb}{h^2} & \ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ 13)$$

Die Hypotenuse h der Ebene denken wir uns immer auf dem positiven Ast des Normalstrahles S vom Ursprung O aus aufgetragen. Sie gibt auf dem Strahle S einen zweiten Punkt q, den Hypotenusenpunkt, und dessen Koordinaten sind:

$$h\cos\alpha = a \qquad h\cos\beta = b \quad \ldots\ldots\ 14)$$

Die Koeffizienten $ab\ldots$ der Ebenengleichung G sind also die Projektionen der Hypotenuse h und sind somit die Koordinaten des Hypotenusenpunktes q.

Eine sekundäre Hypotenuse $t = uh$ mit einem Endpunkte u hat entsprechend die orthogonalen Komponenten

$$t\cos\alpha = ua \qquad t\cos\beta = ub \quad \ldots\ldots\ 15)$$

Zwei Gleichungen.

Es seien zwei Gleichungen $G_1\, G_2$ gegeben:

$$\left.\begin{array}{ll} G_1: & a_1 x + b_1 y + \ldots = l_1 \\ G_2: & a_2 x + b_2 y + \ldots = l_2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ 16)$$

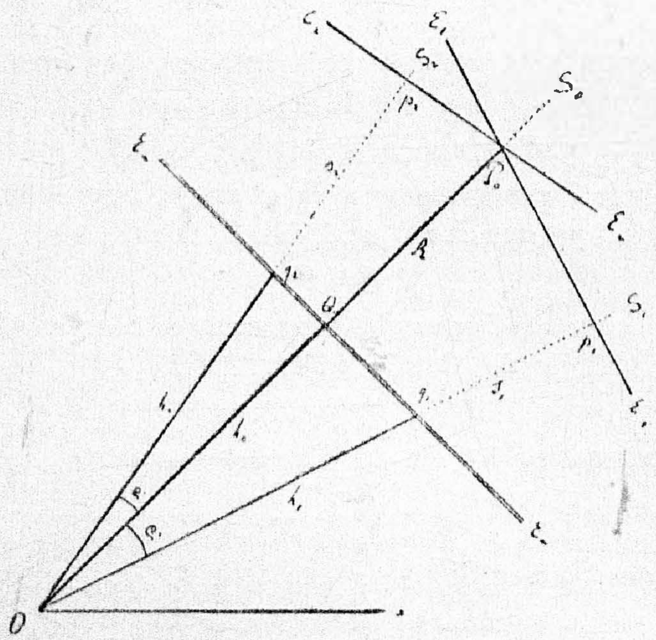

Fig. 2.

Ihnen entsprechen zwei Ebenen $E_1\,E_2$ und auf deren Normalstrahlen $S_1\,S_2$ befinden sich die Lotpunkte $p_1\,p_2$ und die Hypotenusenpunkte $q_1\,q_2$. Uns kümmert der Winkel ε zwischen den Strahlen $S_1\,S_2$. Für ihn gilt:

$$\left.\begin{aligned}\cos\varepsilon &= \cos\alpha_1\,\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\,\cos\beta_2 + \ldots \\ &= \frac{a_1\,a_2 + b_1\,b_2 + \ldots}{h_1\,h_2}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 17)$$

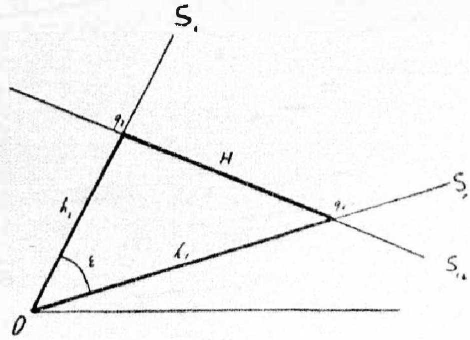

Fig. 3.

Den Winkel ε können wir auch so bestimmen (Figur 3). Von q_1 nach q_2 ziehen wir die Brücke H, die wir berechnen können:

$$H^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + \ldots \quad \ldots\ldots 18)$$

Offenbar ist H die Hypotenuse der Differenzgleichung

$$G = G_1 - G_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 19)$$

denn diese lautet ausgeschrieben so:

$$G\colon \quad (a_1 - a_2)\,x + (b_1 - b_2)\,y + \ldots = (h_1 - h_2) \quad \ldots\ldots 20)$$

Wir kennen nun die drei Seiten des Dreieckes $h_1\,h_2\,H$ und können es zeichnen; wir sehen dann den Winkel ε und können ihn auch aus den Seiten berechnen:

$$\cos\varepsilon = \frac{h_1{}^2 + h_2{}^2 - H^2}{2\,h_1\,h_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 21)$$

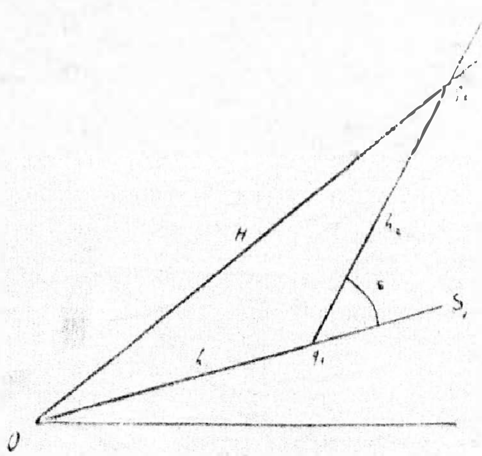

Fig. 4.

Ähnlich ist das folgende Verfahren. Aus den Hypotenusen $h_1 h_2$ bilden wir ein Polygon, indem wir h_2 an h_1 fügen und zeichnen dann die schließende Sehne H. Wir können dann sagen, H sei die geometrische Summe von h_1 und h_2:

$$H \doteq h_1 + h_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

Der Punkt über dem Gleichheitszeichen besagt: wenn wir von O aus die Strecke $h_1 + h_2$ durchlaufen, dann kommen wir im Raume in denselben Punkt, wie wenn wir von O aus die Strecke H durchlaufen.

Die Sehne H ist bestimmt durch

$$H^2 = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 23)$$

Dieses H ist offenbar die Hypotenuse der Summengleichung

$$G = G_1 + G_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

die ausgeschrieben so lautet:

$$G: \qquad (a_1 + a_2)\,x + (b_1 + b_2)\,y + \ldots = (l_1 + l_2) \quad \ldots\ldots \quad 25)$$

Jetzt sehen wir den Winkel ε: es ist der Winkel, um den h_2 vom Strahle S_1 abschwenkt. Wir können ε auch berechnen:

$$\cos \varepsilon = \frac{H^2 - h_1^{\,2} - h_2^{\,2}}{2\, h_1\, h_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

Wenn wir die Hypotenuse der Summengleichung mit H_+, die der Differenzgleichung mit H_- bezeichnen, dann finden wir aus 21) und 26) auch:

$$\cos \varepsilon = \frac{H_+^{\,2} - H_-^{\,2}}{4\, h_1\, h_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 27)$$

Die geometrische Gleichung 22) lautet also korrekt geschrieben so:

$$H_+ \doteq h_1 + h_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 28)$$

Die entsprechende geometrische Gleichung für H_- aber lautet:

$$H_- \doteq h_1 - h_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29)$$

d. h. die Brücke $q_2 q_1$ oder H_- in Fig. 2 ist die geometrische Differenz der Hypotenusen h_1 und h_2.

Summengleichung und Summenebene.

Es seien die Gleichungen $G_1 G_2 \ldots$ von mehreren Ebenen $E_1 E_2 \ldots$ gegeben:

$$\left.\begin{array}{ll} G_1: & a_1 x + b_1 y + \ldots = l_1 \\ G_2: & a_2 x + b_2 y + \ldots = l_2 \\ \ldots & \ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 30)$$

In der Figur 5 sind alle Ebenen in den Ursprung verlegt. Die Ebenen haben die Hypotenusen $h_1 h_2 \ldots$, und wir können die Hypotenusen und ihre Stellwinkel aus den Koeffizienten der gegebenen Gleichungen berechnen. Wir multiplizieren dann die Gleichungen mit irgend welchen Zahlen $u v \ldots$, so daß sie die Hypotenusen

$$t_1 = u\, h_1 \qquad t_2 = v\, h_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31)$$

erhalten, und bilden dann die Summengleichung G der Summenebene E:

$$G = u\, G_1 + v\, G_2 + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad 32)$$

die ausgeschrieben so lautet:

$$G: \qquad (u a_1 + v a_2 + \ldots) x + \ldots = (u l_1 + v l_2 + \ldots) \quad \ldots \quad 33)$$

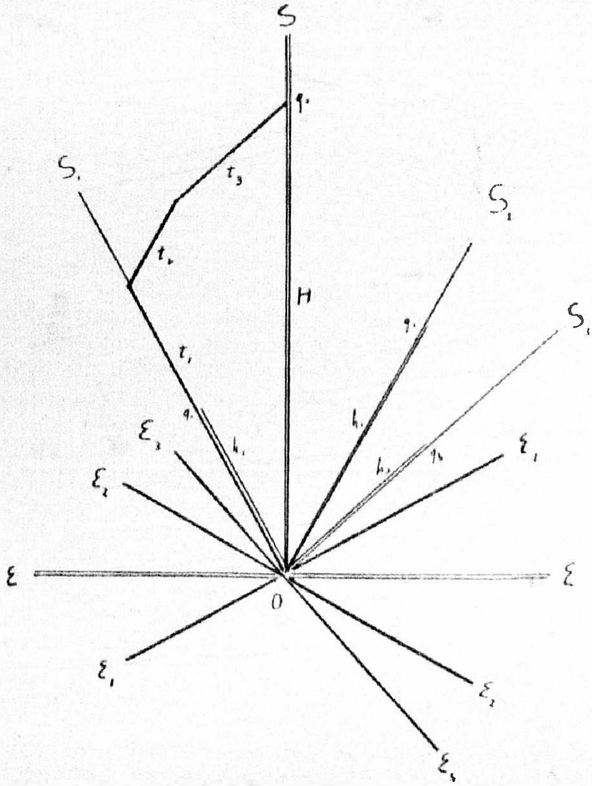

Fig. 5.

Die sekundären Hypotenusen $t_1 t_2 \ldots$ addieren wir geometrisch, d. h. wir bilden aus ihnen von O aus ein Polygon $t_1 t_2 \ldots$ mit dem Endpunkt q_1 und ziehen die schließende Sehne H. Die orthogonalen Projektionen $A B \ldots$ der Sehne H sind offenbar die Projektionen des Polygons auf den Koordinatenachsen:

$$\left.\begin{aligned} A &= u a_1 + v a_2 + \ldots \\ B &= u b_1 + v b_2 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 34)$$

Für H ergibt sich der Ausdruck:

$$H^2 = A^2 + B^2 + \ldots \quad \ldots \ldots \quad 35)$$

und seine Stellwinkel sind:

$$\cos \alpha = \frac{A}{H} \qquad \cos \beta = \frac{B}{H} \quad \ldots \ldots \quad 36)$$

Wenn wir die Werte von $A B \ldots$ mit den Koeffizienten der Summengleichung G vergleichen, dann finden wir, daß H die Hypotenuse der Summengleichung G ist. Es gilt also:

Die Hypotenuse H einer Summengleichung G ist die geometrische Summe der (sekundären) Hypotenusen $u h_1 \quad v h_2 \ldots$ der Teilgleichungen $u G_1 \quad v G_2 \ldots$

Symbolisch gilt also:

$$H \doteq u h_1 + v h_2 + \ldots \quad \ldots \ldots \quad 37)$$

d. h. wenn wir von O aus das Hypotenusenpolygon $t_1 t_2 \ldots$ durchlaufen, kommen wir in denselben Raumpunkt q_i, wie wenn wir von O aus die Hypotenuse H der Summenebene E durchlaufen.

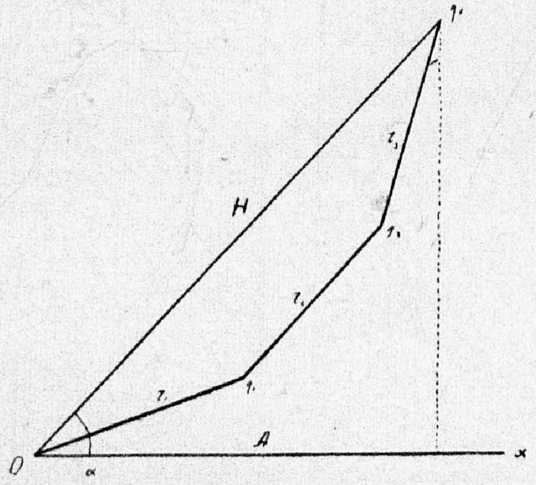

Fig. 6.

Der Fernpunkt P_0.

Wenn im n-dimensionalen Raume n Ebenen gegeben sind, dann schneiden sie sich in einem Punkte P_0 von irgend welchen Koordinaten $X Y \ldots$ und in einem Abstande R vom Ursprung O. Von O aus legen wir durch P_0 einen Strahl S_0, den Nullstrahl. Auch alle Summenebenen G:

$$G = u G_1 + v G_2 + \ldots \qquad 38)$$

die wir aus den gegebenen Gleichungen $G_1 G_2 \ldots$ ableiten, gehen an sich schon durch den Fernpunkt P_0, denn die Werte

$$x = X \qquad y = Y \qquad \ldots$$

die jede einzelne Gleichung $G_1 G_2 \ldots$ befriedigen, befriedigen auch die Summengleichung.

Die mittlere Ebene E_m (Fig. 7). Ein Raumpunkt Q von irgend welchen Koordinaten $xy \ldots$ hat von P_0 irgend einen Abstand d_0, von den n Ebenen $E_1 E_2 \ldots$ aber hat er die n Abstände $d_1 d_2 \ldots$, die wir aus n Gleichungen berechnen können:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + \ldots - s_1 \\ d_2 &= x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + \ldots - s_2 \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \qquad 39)$$

Hier sind $xy \ldots$ bekannt und $d_1 d_2 \ldots$ unbekannt. Nun kehren wir die Aufgabe um: wir suchen die n Koordinaten $xy \ldots$ des Raumpunktes Q, der von allen n Ebenen $E_1 E_2 \ldots$ denselben Abstand

$$d_1 = d_2 = \ldots = d$$

hat. Jetzt haben wir n Gleichungen mit n Unbekannten $xy \ldots$; die Aufgabe ist also lösbar, und es gibt einen Punkt Q, der von allen Ebenen E denselben Abstand d hat. Wenn wir durch P_0 und Q einen Strahl S_m legen, dann hat jeder Punkt dieses Strahles gleichen Abstand von allen n Ebenen E.

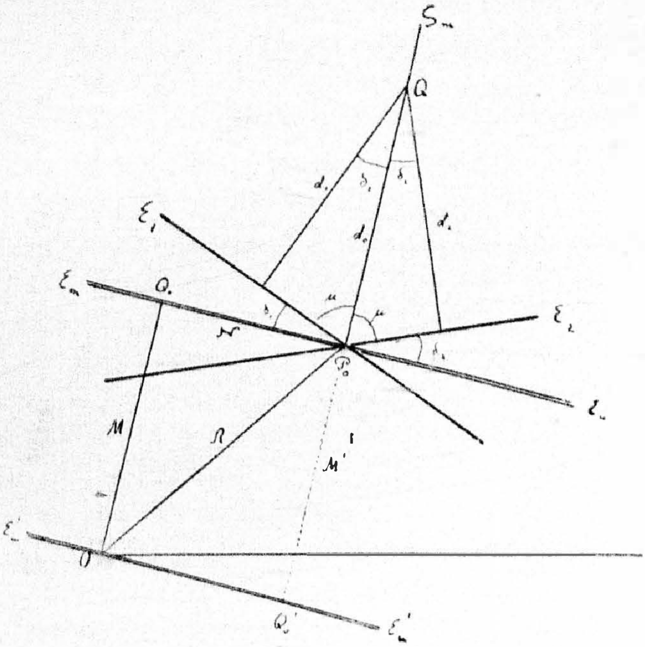

Fig. 7.

Wir bleiben bei dem ersten Punkte Q. Der Normalstrahl S_1 der Ebene E_1 bildet mit dem Strahle S_m einen Winkel δ, der bestimmt ist durch

$$\cos \delta = \frac{d}{d_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 40)$$

Denselben Ausdruck finden wir auch für alle übrigen Ebenen. Der Strahl S_m bildet also mit allen Normalstrahlen $S_1 S_2 \ldots$ denselben Winkel δ, und darum nennen wir ihn den mittleren Strahl S_m.

Normal zum mittleren Strahle S_m legen wir durch P_0 eine Ebene E_m. Mit dieser bilden alle gegebenen Ebenen $E_1 E_2 \ldots$ denselben Winkel δ, und darum nennen wir sie die mittlere Ebene E_m. Die gegebenen Ebenen bilden mit dem mittleren Strahle oder die gegebenen Strahlen mit der mittleren Ebene den Ergänzungswinkel μ zu δ.

Es gibt Gleichungssysteme $G_1 G_2 \ldots$, die allen Eliminationsversuchen die unangenehmsten Tücken entgegensetzen. Es wird sich zeigen, daß diese Tücken dann auftreten werden und müssen, wenn die den Gleichungen entsprechenden Ebenen $E_1 E_2 \ldots$ entweder einen sehr kleinen Winkel δ oder einen sehr kleinen Winkel μ zeigen. Nachdem dieser Grund der Tücken erkannt ist, wird es auch leicht sein, Mittel zu finden, diesen Tücken zu begegnen; diese Mittel sollen bei anderer Gelegenheit entwickelt werden. Wir werden sehen, daß in der Theorie der Schwierigkeiten die Fußpunkte Q_0 und Q_0' eine große Rolle spielen.

Die Lotkugel K. Die gegebenen Ebenen $E_1 E_2 \ldots$ (Fig. 1) gehen durch den Fernpunkt P_0 und werden von ihren Normalstrahlen $S_1 S_2 \ldots$, die durch den Ursprung O gelegt sind, in den Lotpunkten $p_1 p_2 \ldots$ durchstoßen. Ein Lotpunkt p hat von O einen Abstand s und von P_0 einen Abstand r. Er ist der Strahlen-punkt, der zu P_0 am nächsten liegt, und ist der Ebenenpunkt, der zu O am nächsten liegt; r ist der Abstand des Strahles von P_0 und s ist der Abstand der Ebene von O. Dabei gilt:

$$r^2 + s^2 = R^2$$

Daraus folgt, daß alle Lotpunkte $p_1 p_2 \ldots$ in einer Kugelfläche K liegen, deren Mittelpunkt den Vektor R halbiert, deren Achse der Vektor R ist und deren Pole die Punkte P_0 und O sind. Die Kugelfläche schneidet von den Koordinatenachsen Stücke ab, die nichts anderes als die Koordinaten $XY\ldots$ des Fernpunktes P_0 sind. Diese Kugel K nennen wir die Lotkugel.

Wenn wir aus den gegebenen Gleichungen Summengleichungen $G = u G_1 + \ldots$ ableiten, dann liegen auch deren Lotpunkte p in der Lotkugelfläche, weil auch sie durch P_0 gehen. Je länger das Lot s einer Ebene ist, umso näher liegt der entsprechende Lotpunkt p zu P_0. Da wir das Lot s jeder Gleichung G leicht finden, indem wir die Hypotenuse h wegdividieren, so können wir die Gleichungen G leicht nach ihrer Güte ordnen, d. h. nach den Abständen r ihrer Lotpunkte von P_0.

Die Normalebene E_n. Wir wollen allen gegebenen Gleichungen durch entsprechende Divisionen oder Multiplikationen dieselbe Absolute l geben:

$$l_1 = l_2 = \ldots = l$$

Da die Absolute das Produkt von Hypotenuse h und Stellot s ist, so gilt dann:

$$l = h_1 s_1 = h_2 s_2 = \ldots \quad 41)$$

Jeder Strahl S (Fig. 2) bildet mit dem Nullstrahl S_0 einen Winkel ϱ, und es gilt ganz allgemein:

$$s_1 = R \cos \varrho_1 \qquad s_2 = R \cos \varrho_2 \quad \ldots \quad 42)$$

Wir multiplizieren jede Gleichung 42) mit der entsprechenden Hypotenuse:

$$h_1 s_1 = R h_1 \cos \varrho_1 \qquad h_2 s_2 = R h_2 \cos \varrho_2 \quad \ldots \quad 43)$$

Die linken Seiten haben alle denselben Wert l, so daß auch gilt:

$$\frac{l}{R} = h_1 \cos \varrho_1 = h_2 \cos \varrho_2 = \ldots \quad 44)$$

Das bedeutet, daß alle Hypotenusen $h_1 h_2 \ldots$ auf dem Nullstrahle S_0 dieselbe Projektion $l:R$ geben. Daraus folgt, daß die Hypotenusenpunkte $q_1 q_2 \ldots$ aller Strahlen $S_1 S_2 \ldots$ in derselben zum Nullstrahle S_0 normalen Ebene E_n liegen; wir nennen sie die Normalebene E_n.

Die Ebene E_n wird vom Nullstrahl in einem Punkte Q_0 durchstoßen und hat von O einen Abstand h_0:

$$h_0 = \frac{l}{R}.$$

Wenn $l = 1$ ist, d. h. wenn die Gleichungen $G_1 G_2 \ldots$ Eins-Gleichungen sind, dann ist der Abstand h_0 der Normalebene von O der reziproke Wert des Vektors R.

Auf diesen Entwicklungen beruht ein bestechendes Näherungsverfahren. Wir bringen die gegebenen Gleichungen durch Wegdividieren der Absoluten auf die Form:

$$\begin{array}{ll} G_1: & a_1 x + b_1 y + \ldots = 1 \\ G_2: & a_2 x + b_2 y + \ldots = 1 \\ \ldots & \ldots \end{array} \Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 45)$$

Aus diesen können wir eine große Zahl Differenzgleichungen Γ mit der Absoluten Null ableiten:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1: & \alpha_1 x + \beta_1 y + \ldots = 0 \\ \Gamma_2: & \alpha_2 x + \beta_2 y + \ldots = 0 \\ \ldots & \ldots \end{array} \Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

Die Hypotenusenpunkte $q_1 q_2 \ldots$ der Gleichungen $G_1 G_2 \ldots$ liegen alle in einer Normalebene E_n, deren Lot h_0 der reziproke Wert des Vektors R ist. Je kürzer die Hypotenuse h einer Gleichung G ist, umso näher liegt ihr Endpunkt q zum Durchstoßungspunkt Q_0. Dieser Gedanke führt zu folgendem Verfahren. Von einer Ebenengleichung G ziehen wir eine u-fache Ebenengleichung Γ ab und gewinnen eine Ebenengleichung:

$$(a - u\alpha)\,x + (b - u\beta)\,y + \ldots = 1 \quad \ldots\ldots \quad 47)$$

Der Hypotenusenpunkt q dieser Gleichung wird also wieder in E_n liegen, denn die Absolute ist wieder Eins. Wir bestimmen nun u so, daß die Hypotenuse h der Gleichung 47) möglichst kurz, also ein Minimum wird, und finden die Bestimmung:

$$u = \frac{a\alpha + b\beta + \ldots}{\alpha^2 + \beta^2 + \ldots} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 48)$$

Diesen Wert von u setzen wir in 47) ein und gewinnen eine Ebenengleichung G', und der entsprechende Strahl S' hat notwendig einen kleineren Abweichungswinkel $\varrho = \varrho'$ als die ursprüngliche Gleichung G. Durch das gleiche Verfahren gewinnen wir aus G' mittelst einer anderen Γ-Gleichung einen Strahl S'', der dem Vektor R noch näher kommt u. s. w. Endlich gewinnen wir eine Gleichung G, deren Hypotenusenpunkt q schon sehr nahe zu Q_0 und deren Lotpunkt p sehr nahe zu P_0 liegt. Die Koordinaten $x_1 y_1 \ldots$ dieses Lotpunktes können wir aber aus der Ebenengleichung G berechnen:

$$G: \qquad a x + b y + \ldots = 1$$

$$x_1 = \frac{a}{h^2} \qquad y_1 = \frac{b}{h^2} \qquad \ldots \qquad h^2 = a^2 + b^2 + \ldots \quad . \quad 49)$$

Die Werte $x_1 y_1 \ldots$ sind dann sehr gute Näherungswerte.

Dieses bestechende Verfahren erfordert das Wegdividieren der Absoluten. Wir werden später das gleiche Verfahren mittelst Differenzgleichungen kennen lernen, ohne daß das Wegdividieren nötig wäre. Das geometrische Bild wird aber ein ganz anderes sein.

Die geometrische Bedeutung der Γ-Gleichungen sei noch erwähnt. Es sind das Gleichungen von Ebenen, die nicht nur durch P_0, sondern auch durch O gehen, da sie keine Absoluten haben. Alle Γ-Ebenen schneiden sich also im Nullstrahle S_0.

Das einfache Lotverfahren.

Der Grundgedanke des einfachen Lotverfahrens ist schon entwickelt worden. Der erste Näherungsakt besteht darin, daß wir den Wanderpunkt vom Ursprung

O aus längs des Lotes s_1 in den Lotpunkt p_1 bringen (Fig. 1). Dort hat er die Koordinaten:

$$x_1 = \frac{l_1 a_1}{h_1^2} \qquad y_1 = \frac{l_1 b_1}{h_1^2} \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad 50)$$

Diese Koordinaten runden wir auf einstellige, höchstens zweistellige Zahlen ab und nehmen diese abgerundeten Zahlen als Näherungswerte. Die abgerundeten Koordinaten drücken also nicht den Lotpunkt p_1, sondern einen anderen, ihm nahe gelegenen Punkt aus. Dort ist der Wanderpunkt zu denken und dorthin verlegen wir den Koordinatenursprung. Zu dem Zwecke ersetzen wir in gegebenen Gleichungen die Unbekannten $x y \ldots$ durch die Binome

$$x_1 + x \qquad y_1 + y \qquad \ldots$$

Die so gewonnenen numerischen Glieder schaffen wir auf die rechte Seite. Die linken Seiten erhalten dadurch ihre frühere Form, die Absoluten aber sind kleiner geworden. Hiemit ist der erste Näherungsakt beendet.

Wir erhalten also durch einen Schritt Näherungswerte für alle Unbekannten. Wir müssen alle Koeffizienten multiplizieren, und das wäre ohne die Abrundungen eine böse Arbeit. Wir werden später ganz dasselbe Lotverfahren kennen lernen in einer Form, die diese Mängel nicht hat.

Wenn wir mit den genauen Werten $x_1 y_1 \ldots$ arbeiten, den Ursprung also genau in die Ebene E_1 verlegen, dann ist offenbar nach der Transformation die Absolute l_1 der Gleichung G_1 getilgt, d. h. gleich Null geworden, da ja jetzt E_1 durch den Ursprung geht. Die Abrundungen haben zur Folge, daß l_1 nur nahezu getilgt erscheint. Durch den zweiten Näherungsakt, wenn der Wanderpunkt etwa in die Ebene E_2 projiziert wird, wird dann die Absolute l_2 getilgt, l_1 aber erhält wieder einen größeren Wert.

Der erste Näherungsakt bringt uns dann möglichst nahe zu P_0, wenn wir den Wanderpunkt auf die Ebene mit dem längsten Lote s projizieren. Die Absolute einer Gleichung gibt uns aber nur das Produkt $l = h s$ des Lotes mit der Hypotenuse. Um also besser erkennen zu können, welche Gleichung G das längste Lot s hat, ist es gut, vor Eröffnung des Näherungsverfahrens alle Hypotenusen $h_1 h_2 \ldots$ in einer Vorarbeit zu berechnen und wenigstens grob aus den Gleichungen wegzudividieren. Es genügt schon, wenn man mit der höchsten Stelle der Hypotenuse, also etwa statt mit 583 nur mit 600 dividiert, da schon dadurch alle Hypotenusen auf einen Wert gebracht werden, der von $h = 1$ nur um einige Prozente abweicht. Nach diesen Kürzungen zeigen die Absoluten angenähert die Werte der Lote s und wir werden jedesmal die größte Absolute, also das längste Lot tilgen.

Wenn ein Lotpunkt p nicht in der Nähe des Fernpunktes P_0, sondern in der Nähe des Ursprunges O liegt, dann ist sein Polabstand r viel größer, als das Lot s. Der Polabstand r ist dann nur um ein geringes kleiner als R, d. h. durch die Projektion nach p nähern wir uns nur um ein geringes dem Pole P_0, und durch die Abrundung der Näherungswerte kann auch dieses geringe verloren gehen. Es ist der Fall möglich, daß alle Lotpunkte, auch der des längsten Lotes s, nahe zu O liegen, und wir wissen nichts davon, da wir vorderhand wohl die Lote s berechnen können, aber kein Mittel in der Hand haben, auf die Länge der Polabstände r zu schließen, nachdem wir den Polvektor R nicht kennen. So kann es kommen, daß unsere ganze Näherungsarbeit vergeblich ist: wir kommen nicht vorwärts, die Quadratsumme der Absoluten will nicht kleiner werden. Die im folgenden behandelten Verfahren helfen diesem Übelstande ab.

Neue Ebenen. Aus den gegebenen Gleichungen $G_1 G_2 \ldots$ können wir auch beliebig viel neue Gleichungen G ableiten, u. zw. als Summengleichungen nach dem Schema

$$G = u G_1 + v G_2 + \ldots$$

Wir könnten ebensogut sagen: aus den alten Ebenen $E_1 E_2 \ldots$ können wir beliebig viel neue Ebenen E ableiten, oder aus den alten Strahlen $S_1 S_2 \ldots$ können wir neue Strahlen ableiten. Die abgeleiteten Ebenen gehen alle durch P_0 und die abgeleiteten Strahlen geben alle in der Lotkugel neue Lotpunkte p u. s. w., und wie wir den Wanderpunkt auf die alten Ebenen projizieren, so können wir ihn auch auf die neuen Ebenen projizieren, um dem Fernpunkt P_0 näher zu kommen. Nun gibt es Methoden, aus mehreren alten Ebenen $G_1 G_2 \ldots$ planmäßig eine neue Ebene G abzuleiten, die sicher besser ist, als die beste der Komponentenebenen, d. h. einen besseren Näherungspunkt p gibt, als die beste der verwendeten Ebenen. Da liegt der Gedanke nahe, zunächst nicht zu projizieren, sondern erst planmäßig aus den gegebenen Gleichungen immer bessere Ebenengleichungen abzuleiten, und erst wenn wir eine sehr gute Ebene gefunden zu haben glauben, den Wanderpunkt auf sie zu projizieren. Dann sind wir mit einem Schlage dem Fernpunkte P_0 sehr nahe gekommen.

Es soll nun gesagt werden, wie man aus alten Gleichungen sicher bessere Ebenengleichungen ableiten kann, und wir beginnen mit der Ableitung einer besseren Gleichung aus zwei Gleichungen.

(Fortsetzung, resp. Schluß folgt.)

Über graphische Auflösung von überzähligen linearen Gleichungen zwischen zwei Unbekannten.

Von Prof. Dr. W. Láska in Prag.

Es sei die graphische Darstellung eines Systems von linearen Gleichungen:

$$a_k x + b_k y + c_k = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots n$$

gegeben. Eine jede Gleichung wird darin durch eine Gerade dargestellt, welche in der Fig. 1 einfach mit dem Index 1, 2, 3, 4 bezeichnet erscheint.

Um genäherte Werte für x und y graphisch zu finden, suchen wir die sogenannte Korrelation dieser Darstellung auf. Durch sie werden die Geraden in Punkte verwandelt und man erhält eine nahezu gerade Punktfolge, sobald die urprünglichen Geraden sich in nahezu einem Punkte schneiden.

Dadurch wird die Auffindung von plausiblen x- und y-Werten offenbar wesentlich erleichtert. Das Ziehen der Geraden MN in der Fig. 2 stellt nämlich ein gut definiertes geometrisches Problem dar, während die Auffindung des plau-

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 10. **Wien, am 1. Oktober 1911.** **IX. Jahrgang.**

Lotverfahren.

Von Professor **Karl Fuchs** in Preßburg

(Fortsetzung.)

Die Summe von zwei Ebenen.

$$G = u\,G_1 + v\,G_2.$$

Vom Ursprung 0 aus seien die Strahlen $S_1\,S_2$ gezogen, die den Gleichungen $G_1\,G_2$ entsprechen (Fig. 8). Auf ihnen tragen wir die Strecken

$$t_1 = u\,h_1 \qquad t_2 = v\,h_2$$

auf, bilden aus $t_1\,t_2$ ein Parallelogramm und ziehen nach dem so bestimmten Punkt q den Vektor H, sodaß gilt:

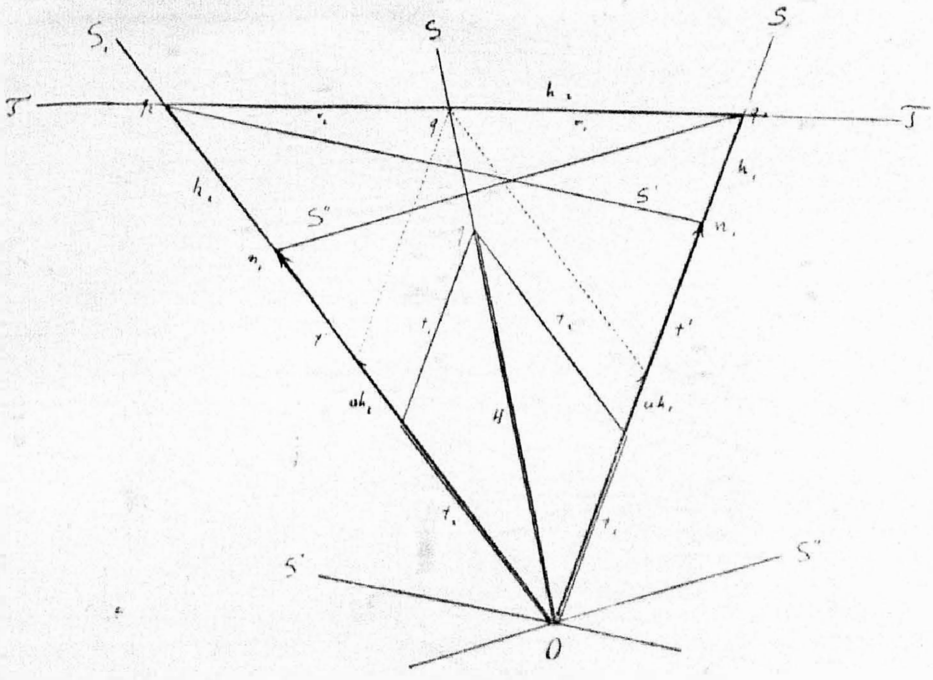

Fig. 8.

$$H = t_1 + t_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 51)$$
$$= u\,h_1 + v\,h_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 52)$$

Dann ist, wie wir wissen, H nach Länge und Richtung die Hypotenuse der Summengleichung $G = u\,G_1 + v\,G_2$.

Wenn wir u und v veränderlich nehmen, dann können wir t_1 und t_2 als schiefe Koordinaten irgend eines Ebenen-Punktes q ansehen. Dann sind die Strahlen $S_1\,S_2$ die schiefen Koordinatenachsen, und q liegt notwendig in der zweidimensionalen Ebene, die durch S_1 und S_2 bestimmt ist. Wir sehen hieraus: wenn wir aus irgend zwei gegebenen Gleichungen $G_1\,G_2$ eine Summengleichung G ableiten, dann liegt der Strahl S dieser Gleichung notwendig in der zweidimensionalen Ebene $S_1\,S_2$. In dieser Ebene kann er jede beliebige Richtung erhalten und die Hypotenuse h der neuen Gleichung kann jede beliebige Länge haben. Ein Summenstrahl kann keine neue Dimension geben.

Für uns hat nur die Richtung des Summenstrahles S Interesse, denn wir wollen Strahlen S ableiten, deren Richtung der des Vektors R möglichst nahe kommt. Die Richtung des abgeleiteten Strahles S hängt lediglich vom Verhältnis $u:v$ der Faktoren $u\,v$ ab, und ist von ihrer absoluten Größe unabhängig; die Größe von u und v beeinflußt nur die Länge der Hypotenuse H. Wir können also auch immer entweder u oder v gleich Eins nehmen.

Die Abbildung 8 zeigt drei frei gewählte Strahlen $S\,S'\,S''$ und es gilt, irgendwie zu jedem Strahle die Stellfaktoren u und v zu bestimmen.

Auf den Strahlen $S_1\,S_2$ tragen wir die entsprechenden Hypotenusen $h_1\,h_2$ auf und ziehen auch die Brücke, die Hypotenuse h_{12}, die geometrisch bestimmt ist, durch:

$$h_{12} = h_1 - h_2$$

1. Den Strahl S' verlegen wir nach q_2, sodaß er vom Strahle S_1 ein Stück t' abschneidet, das wir als Teil von h_1 mit $u\,h_1$ bezeichnen und wir können $u = t' : h_1$ berechnen. Dann ist $u_1\,q_2$ nach Länge und Richtung die Hypotenuse einer Differenzgleichung G':

$$G' = G_2 - u\,G_1$$

Der Strahl S' dieser Gleichung G' hat also die gewünschte Richtung.

2. Den Strahl S'' verlegen wir nach q_1, sodaß er von S_2 ein Stück t'' abschneidet, das wir als Teil von h_2 mit $v\,h_2$ bezeichnen und wir können $v = t'' : h_2$ berechnen. Dann ist $u_2\,q_1$ nach Länge und Richtung die Hypotenuse einer Differenzgleichung G'':

$$G'' = G_1 - v\,G_2$$

und S'' ist der Strahl der Gleichung G''.

3. Der Strahl S schneidet die Brücke in einem Punkt q, der von q_1 und q_2 die Abstände r_1 und r_2 hat. Wir bilden das Parallelogramm des Punktes q, und gewinnen auf S_1 und S_2 zwei Strecken $u\,h_1$ und $v\,h_2$, deren geometrische Summe $O\,q$ die Hypotenuse des Strahles S ist. Es gelten dann die Proportionen:

$$\frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{u\,h_1}{h_1} \qquad\qquad \frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{v\,h_2}{h_2}$$
$$= u \qquad\qquad\qquad = v$$

Hiebei gilt offenbar:

$$u + v = 1$$

Aus den Abständen $r_1\, r_2$ können wir also die Stellfaktoren $u\, v$ berechnen und $O\,q$ ist nach Länge und Richtung die Hypotenuse der Summengleichung G:

$$G = u\, G_1 + v\, G_2$$

und S ist der Strahl dieser Gleichung.

Die letzte Methode — die Berechnung von u und v aus den Abständen $r_1\, r_2$, die wir auf einem durch q_1 und q_2 gelegten Strahle s messen — gilt auch für Strahlen S' oder S'', nur ist dann einer der Abstände $r_1\, r_2$ negativ. In unserer Abbildung würden überdies die Schnittpunkte q' und q'' weit außerhalb des Zeichenblattes fallen.

Der Lotkreis. Auf den Strahlen $S_1\, S_2$ (Fig. 9) tragen wir die Stell-Lote $s_1\, s_2$ der Ebenen $E_1\, E_2$ auf, die durch die Absoluten und Hypotenusen der Gleichungen $G_1\, G_2$ bestimmt sind:

$$s_1 = \frac{l_1}{h_1} \qquad\qquad s_2 = \frac{l_2}{h_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 53)$$

Wir zeichnen auch die Spuren der Ebenen $E_1\, E_2$ in der Ebene $S_1\, S_2$; sie schneiden sich in einem Punkte p_0. Alle Summenebenen E, die wir aus $G_1\, G_2$

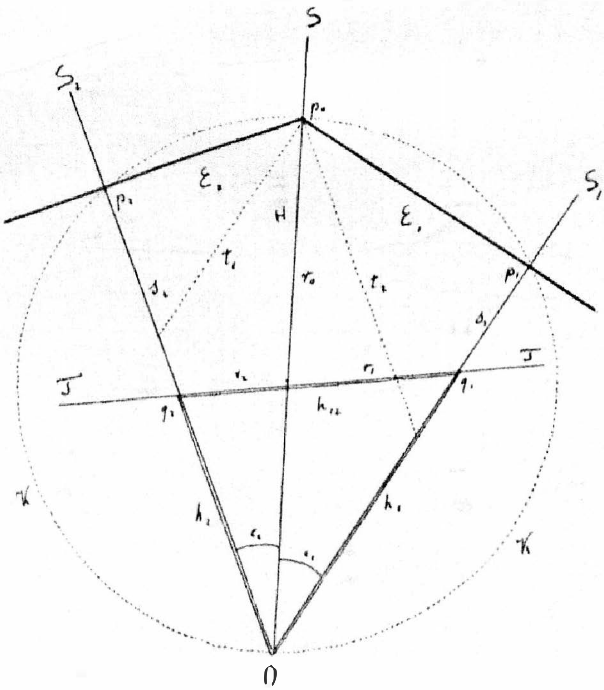

Fig. 9.

ableiten können, gehen ebenfalls durch den Punkt p_0. Daraus folgt, daß die Lotpunkte p aller abgeleiteten Ebenen ebenso wie die Lotpunkte $p_1\, p_2$ in einem Kreise K liegen, dessen Mittelpunkt den Vektor r_0 des Punktes p_0 halbiert, dessen Achse der Vektor ist und dessen Pole die Punkte O und p_0 sind. Der Kreis heißt Lotkreis; alle Lote der abgeleiteten Ebenen sind Sehnen des Lotkreises.

Jetzt liegt es auf der Hand, daß die Summenebene, die die Achse r_0 zum Lote hat, das längste Lot hat, das eine abgeleitete Ebene haben kann, und daß dieses letzte Lot jedenfalls besser ist, als die gegebenen Lote $s_1\ s_2$. Die Stellfaktoren $u\ v$, die diesem besten Strahle, dem durch p_0 gehenden Strahle S_0, entsprechen, können wir etwa in schon beschriebener Weise mittelst des Strahles T bestimmen.

Wir können die Stellfaktoren aber auch algebraisch bestimmen, und das soll hiemit geschehen. Der Punkt p_0 hat im n-dimensionalen Raume irgendwelche Koordinaten $A\ B \ldots$, und seinen Vektor r_0 wollen wir H nennen. In der Ebene der Strahlen $S_1\ S_2$ hat p_0 die schiefen Koordinaten

$$t_1 = u\,h_1 \qquad t_2 = v\,h_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 54)$$

und diese bilden von O aus ein kleines Polygon, dessen schließende Sehne eben H ist. Der Vektor H bildet mit den Strahlen $S_1\ S_2$ die Winkel $\varepsilon_1\ \varepsilon_2$, und es gilt:

$$H \cos \varepsilon_1 = s_1 \qquad H \cos \varepsilon_2 = s_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

Wenn wir auf den Strahlen die entsprechenden Hypotenusen h_1 und h_2 auftragen, dann gilt:

$$\cos \varepsilon_1 = \frac{a_1 A + b_1 B + \ldots}{h_1 H} \qquad \cos \varepsilon_2 = \frac{a_2 A + b_2 B + \ldots}{h_2 H} \quad \ldots \quad 56)$$

Durch die Ausdrücke erhalten die Gleichungen 55) die Formen:

$$\begin{aligned} a_1 A + b_1 B + \ldots &= h_1 s_1 \qquad & a_2 A + b_2 B + \ldots &\ h_2 s_2 \\ &= l_1 & &= l_2 \end{aligned} \quad \ldots \quad 57)$$

Die x-Koordinate A des Punktes p_0 ist offenbar die Summe der x-Projektionen der Polygon-Seiten $t_1 = u\,h_1$ und $t_2 = v\,h_2$, und das entsprechende gilt für alle anderen Koordinaten des Punktes p_0. Es gilt also:

$$A = u\,a_1 + v\,a_2 \qquad B = u\,b_1 + v\,b_2 \qquad C = \ldots \quad \ldots \quad 58)$$

Wenn wir diese Werte in 57) einsetzen und nach u und v ordnen, dann finden wir:

$$\begin{aligned} u\,(a_1^2 + b_1^2 + \ldots) + v\,(a_1 a_2 + b_1 b_2 + \ldots) &= l_1 \\ u\,(a_2 a_1 + b_2 b_1 + \ldots) + v\,(a_2^2 + b_2^2 + \ldots) &= l_2 \end{aligned} \quad \ldots \quad 59)$$

Einfacher können wir eigentlich schreiben:

$$\begin{aligned} u\,[K_1 K_1] + v\,[K_1 K_2] &= l_1 \\ u\,[K_2 K_1] + v\,[K_2 K_2] &= l_2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 60)$$

Die Berechnung der Koffizienten dieser zwei Gleichungen läßt sich geometrisch hübsch veranschaulichen. Auf den Strahlen $S_1\ S_2$ sind (Fig. 9) die beiden Hypotenusen h_1 und h_2 aufgetragen und es ist auch die Brücke h_{12}, die Hypotenuse der Differenzgleichung $G_1 - G_2$, gezeichnet. Diese drei Hypotenusen bilden das Hypotenusendreieck $h_1\ h_2\ h_{12}$ der beiden Gleichungen $G_1\ G_2$. Es gilt dann:

$$[K_1 K_1] = h_1^2 \qquad [\ _2 K_2] = h_2^2 \qquad 2\,[K_1 K_2] = h_1^2 + h_2^2 - h_{12}^2$$

Wenn wir so aus dem Hypotenusendreieck die Koeffizienten von 60) bestimmt und die Stellfaktoren $u\ v$ berechnet haben, dann ist die beste Gleichung G, die wir aus den gegebenen Gleichungen $G_1\ G_2$ ableiten können, bestimmt durch:

$$G = u\, G_1 + v\, G_2.$$

Wenn wir wollen, können wir aus G und einer dritten Gleichung G_3 eine noch bessere Gleichung G' ableiten u.s.w. Endlich machen wir bei einer guten Gleichung G Halt und projizieren den Wanderpunkt auf ihre Ebene.

Der Strahl kleinster Hypotenuse. Denselben besten Strahl S_0 können wir auch viel einfacher finden. Die gegebenen Gleichungen $G_1\ G_2$ sollen lauten:

$$\begin{aligned} G_1: \quad & a_1 x + b_1 y + \ldots = l_1 \\ G_2: \quad & a_2 x + b_2 y + \ldots = l_2 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots \quad 61)$$

Ihnen entsprechen zwei Ebenen $E_1\ E_2$ mit den Normalstrahlen $S_1\ S_2$, auf denen die Hypotenusen $h_1\ h_2$ der Gleichungen aufgetragen sind, und diese Strahlen und Hypotenusen zeichnen wir auch (Fig. 10). Dann zeichnen wir einen beliebigen Strahl S, und wollen die Gleichung G seiner Ebene E als Summengleichung der gegebenen Gleichungen $G_1\ G_2$ darstellen:

$$G = u\, G_1 + v\, G_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 62)$$

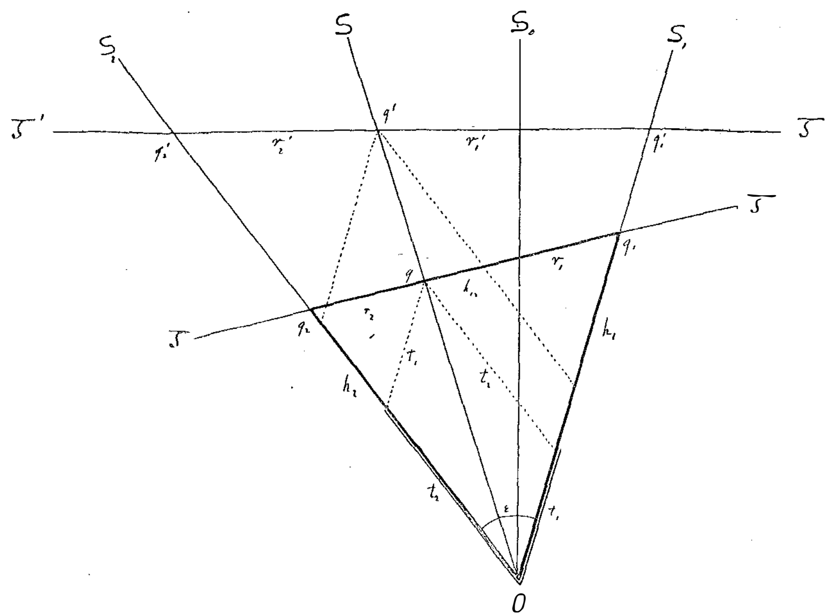

Fig. 10.

Zu dem Zwecke zeichnen wir den Brückenstrahl T und wählen als Hypotenuse H des Strahles S die Strecke $O\,q$. Dieses H muß die geometrische Summe zweier Strecken $t_1 = u\,h_1$ und $t_2 = v\,h_2$ sein:

$$H \doteq u\, h_1 + v\, h_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 63)$$

Wir finden diese Strecken auf den beiden Strahlen $S_1\ S_2$ sehr einfach, indem wir von q aus ein Parallelogramm konstruieren. Nun gelten dann die Proportionen:

$$\frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{l_1}{h_1} = u \qquad \frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{l_2}{h_2} = v \quad \ldots\ldots 64)$$

so daß gilt $u + v = 1$. Wenn wir die so berechneten Werte u v in 63) einsetzen, haben wir die Gleichung G der Ebene, die dem Strahle S entspricht. Die Summengleichung hat dann die Absolute l:

$$l = u\, l_1 + v\, l_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 65)$$

Wesentlich bei diesem Verfahren ist es, daß wir die Hypotenuse H des Summenstrahles von O aus bis zum Brückenstrahl T messen.

Nun wiederholen wir dieses Verfahren auf anderer Grundlage. Die gegebenen Gleichungen bringen wir durch Wegdividieren der Absoluten auf die Form von Einsgleichungen G_1' G_2':

$$\begin{aligned} G_1'&: \quad a_1' x + b_1' y + \ldots = 1 \\ G_2'&: \quad a_2' x + b_2' y + \ldots = 1 \end{aligned} \quad \ldots\ldots 66)$$

Diese Gleichungen haben die Hypotenusen h_1' h_2':

$$h_1' = \frac{h_1}{l_1} \qquad h_2' = \frac{h_2}{l_2} \quad \ldots\ldots 67)$$

Das sind die reciproken Werte der Stellote s_1 s_2 der gegebenen Gleichungen G_1 G_2.

Die Gleichungen G_1 G_2 drücken dieselben Ebenen E_1 E_2 aus wie die Gleichungen G_1 G_2. Wir wollen nun die Summengleichung G'

$$G' = u'\, G_1' + v'\, G_2' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 58)$$

desselben Strahles S nach derselben Brückenmethode, aber auf Grund der Einsgleichungen G_1' G_2' und der Hypotenusen h_1' h_2' ableiten. Wir finden die Werte u' v' nach den Formeln

$$u' = \frac{r_2'}{r_1' + r_2'} \qquad v' = \frac{r_1'}{r_1' + r_2'} \quad \ldots\ldots 69)$$

und die Absolute l' der Summengleichung ist:

$$l' = 1 \,.\, u' + 1 \,.\, v' = 1 \quad \ldots\ldots\ldots 70)$$

Wir sehen jetzt den überraschenden Satz: Jede Summengleichung, die wir aus zwei Einsgleichungen nach der Brückenmethode ableiten, ist wieder eine Einsgleichung.

Was wir suchen, das ist die Summengleichung, die das längste Lot s hat. Die Hypotenuse einer Einsgleichung ist der reciproke Wert ihres Lotes s. Die beste Summengleichung, die wir aus G_1 G_2 ableiten können, wird also die sein, die die kleinste Hypotenuse hat; das ist aber die, deren Strahl S_0 auf dem Brückenstrahl T senkrecht steht.

Hieraus ergibt sich folgendes Verfahren zur Ableitung der besten Summengleichung G aus zwei gegebenen Gleichungen G_1 G_2. Wir berechnen die drei Seiten des Hypotenusendreieckes h_1 h_2 h_{12}, um die Strahlen S_1 S_2 zeichnen zu können. Dann legen wir auf S_1 und S_2 die Strecken

$$h_1' = \frac{h_1}{l_1} \qquad h_2' = \frac{h_2}{l_2}$$

auf, ziehen den Brückenstrahl T' und ziehen normal zu diesem den Strahl S_0.

Diesem Strahl entspricht die beste Summengleichung, und wir bestimmen die Stellfaktoren u v dieses Strahles am einfachsten mittelst des Brückenstrahles T, nicht T', da T die Faktoren für die ursprünglichen Gleichungen gibt. Die Absoluten wegdividieren ist also gar nicht nötig. Für u und v brauchen wir nur zwei Zahlen zu nehmen, die sich so verhalten, wie r_1 und r_2, da nur dieses Verhältnis die Richtung des Strahles S bestimmt.

Wenn wir dieses Näherungsverfahren anwenden wollen, dann ist es zweckmäßig, in einer Vorarbeit die Hypotenusen h_1 h_2 . . . aller gegebenen Gleichungen G_1 G_2 . . . zu berechnen. Das ist aber eine viel geringere Arbeit, als die Absoluten wegzudividieren.

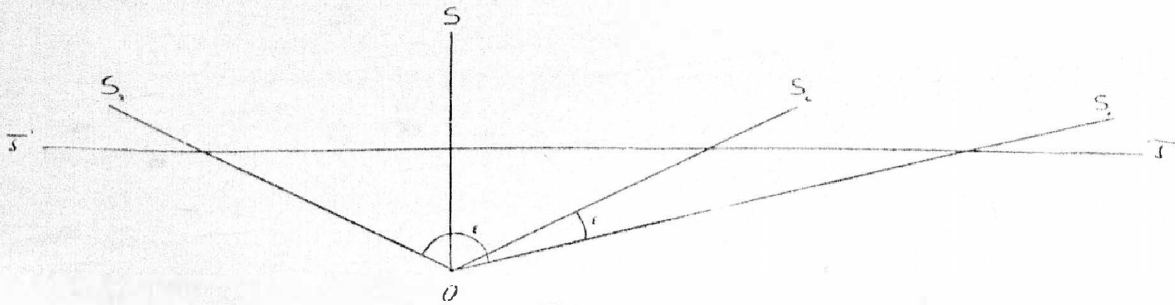

Fig. 11.

Wir sehen aus der Abbildung 11, daß der Summenstrahl S vor allem dann sehr günstig ausfällt, weit besser als die Komponentenstrahlen S_1 S_2, wenn der Winkel ε, den die gegebenen Strahlen S_1 S_2 miteinander bilden, sehr groß ist. Wenn aus den gegebenen Gleichungen die Hypotenusen grob wegdividiert sind, dann können wir leicht erkennen, ob zwei gegebene Gleichungen G_1 G_2 einen guten Summenstrahl geben werden. Wenn die Hypotenuse der Differenzgleichung $G_1 - G_2$ sich dem Werte $h_{12} = 2$ nähert, wird der Summenstrahl sehr gut. Der Summenstrahl wird auch dann sehr gut, wenn der Winkel ε sehr klein und seine Schenkel sehr verschieden lang sind.

Wir wollen diese Kriterien ins Algebraische übertragen und gehen von dem Satze aus, daß die Koeffizienten a b . . . einer Gleichung G die Projektionen der Hypotenuse h sind, die selber auf dem positiven Aste des Strahles S der Gleichung G aufgetragen ist. Die Zeichenfolge der Koeffizienten a b . . . gibt uns also die Raumecke an, in der der (positive) Strahl liegt. So liegt der Strahl der Gleichung

$$+3x - 5y + 7z = 8$$

in der Raumecke der Achsen:

$$(+x, \ -y, \ +z)$$

Der Strahl liegt der Achse des größten Koeffizienten am nächsten, also im Beispiele der z-Achse; er steht am senkrechtesten zu der Achse des kleinsten Koeffizienten, im Beispiele also der x-Achse. Der Strahl nähert sich also den einzelnen Achsen im Verhältnisse zu den entsprechenden Koeffizienten. Wenn die Koeffizienten ziemlich gleich groß sind, dann hat der Strahl eine ziemlich diagonale Richtung.

Wenn wir zwei Gleichungen G_1 G_2 vergleichen wollen, dann müssen wir sie so anschreiben, daß beide eine positive Absolute zeigen, weil sie dann positive Stellote s_1 s_2 haben. Wir fassen in beiden Gleichungen den größten Koeffizienten ins Auge. Wenn diese beiden größten Koeffizienten gleichnamig sind, z. B. a_1 und a_2, dann liegen beide Strahlen derselben Achse, also im Beispiele der x-Achse, nahe. Wenn beide Koeffizienten das gleiche Vorzeichen haben, dann bilden die Strahlen einen kleinen Winkel; wenn sie aber konträre Vorzeichen haben, dann bilden die Strahlen einen großen, d. h. nahezu gestreckten Winkel miteinander.

Wenn auch die zweitgrößten Koeffizienten gleichnamig sind, z. B. b_1 und b_2, dann liegen die beiden Strahlen nahe zur zweidimensionalen Ebene der entsprechenden Achsen, also im Beispiel nahe zur $x\,y$-Ebene E_{12}. Da sind nun zwei Fälle möglich: wenn a_1 und b_1 dieselbe Zeichenfolge haben wie a_2 und b_2, dann liegen die Projektionen der Strahlen S_1 und S_2 in der Ebene E_{12} auf derselben Seite der x-Achse, und das ist der günstige Fall, der ein kleines ε verspricht. Wenn aber a_1 b_1 und a_2 b_2 verschiedene Zeichenfolgen zeigen, z. B. $++$ und $+-$ oder $-+$ und $++$, dann liegen die Projektionen der Strahlen auf entgegengesetzten Seiten der x-Achse, und dann wird ε weniger klein, und das ist der ungünstige Fall. Wir haben also die Regel: wenn die größten Koeffizienten der gegebenen Gleichungen G_1 G_2 gleichnamig sind (a_1 a_2), dann versprechen die Gleichungen einen guten Summenstrahl. Wenn auch die zweitgrößten Koeffizienten gleichnamig sind (b_1 b_2), und a_1 b_1 zeigt dieselbe oder konträre Zeichenfolge wie a_2 b_2, dann sind die Aussichten umso besser.

Da liegt der Gedanke nahe, aus den gegebenen Gleichungen G_1 G_2 ... sich in einer Vorarbeit einen größeren Vorrat von Summengleichungen oder Differenzgleichungen zu verschaffen, deren jede je zwei größte Koeffizienten hat. Man kann dann zu jeder beliebigen Gleichung eine andere finden mit gleichnamigen größten Koeffizienten mit gleicher oder konträrer Zeichenfolge.

Man kann die Regeln noch viel näher spezialisieren, doch hat das keinen praktischen Nutzen.

Wir haben jetzt wieder ein Beispiel dafür, wie nützlich unsere geometrische Darstellung der Elimination ist. Dieselbe Regel über die Auswahl der Gleichungen kann man auch aus der algebraischen Theorie der Elimination ableiten, und hat sie auch schon längst abgeleitet. Dort steht sie aber als einfacher mathematischer Kunstgriff ohne allen Zusammenhang mit der ganzen Theorie. In unserer Darstellung aber fließt die Regel klar und anschaulich aus dem allgemeinen geometrischen Bilde des Eliminationsproblems.

Die Summe von drei Ebenen.

$$G = u\,G_1 + v\,G_2 + w\,G_3.$$

Wenn wir aus drei gegebenen Gleichungen G_1 G_2 G_3 die beste Summengleichung G ableiten wollen, dann stehen uns dieselben drei Verfahren zu Gebote, wie bei zwei Gleichungen.

1. Verfahren der Ein-Ebene. Die gegebenen Gleichungen bringen wir durch Wegdividieren der Absoluten l auf die Form von Eins-Gleichungen $a\,x + b\,y + \ldots = 1$. Von O aus ziehen wir die Strahlen $S_1\,S_2\,S_3$, die den drei Gleichungen entsprechen, und tragen auf den Strahlen die Hypotenusen $K_1\,K_2\,K_3$ der Einsebenen auf:

$$K_1 = \frac{h_1}{l_1} \qquad K_2 = \frac{h_2}{l_2} \qquad K_3 = \frac{h_3}{l_3} \quad \ldots\ldots \quad 71)$$

Die drei Strahlen $S_1\,S_2\,S_3$ sehen wir als schiefe Koordinatenachsen an, dergestalt, daß die Koordinaten $t_1\,t_2\,t_3$:

$$t_1 = u\,K_1 \qquad t_2 = v\,K_2 \qquad t_3 = w\,K_3 \quad \ldots\ldots \quad 72)$$

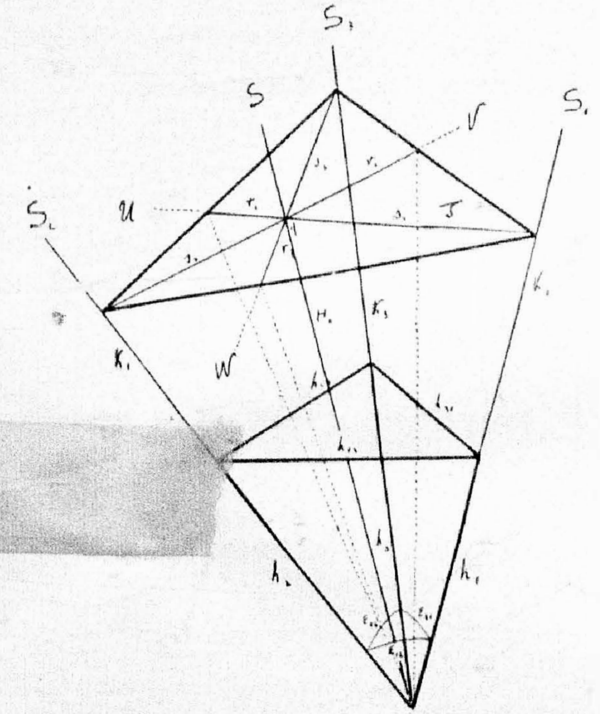

Fig. 12.

eines Punktes q den Achsen $S_1\,S_2\,S_3$ parallel laufen. Die Gleichung einer Ebene T, die die Achsenabschnitte $K_1\,K_2\,K_3$ hat, lautet:

$$\frac{t_1}{K_1} + \frac{t_2}{K_2} + \frac{t_3}{K_3} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 73)$$

Wenn wir hier die Werte 72) einsetzen, so erhalten wir:

$$u + v + w = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 74)$$

Der Vektor H eines Ebenenpunktes q ist dann, wie wir wissen, die Hypotenuse der Summengleichung G:

$$G = u\,G_1 + v\,G_2 + w\,G_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 75)$$

Hier sind $G_1\,G_2\,G_3$ Einsgleichungen. Wenn wir die Summe wirklich bilden, dann lautet die Summengleichung G so:

$$G: \qquad (u\,a_1 + v\,a_2 + w\,a_3)\,x + \ldots = u + v + w \quad \ldots \quad 76)$$

Da nun nach 74) die Summe der Stellfaktoren $u\,v\,w$ gleich Eins ist, so gilt:

alle Summengleichungen G, die durch irgend einen Punkt q der Ebene T bestimmt sind, sind wieder Einsgleichungen. Die beste Einsgleichung ist nun die, die die kürzeste Hypotenuse H hat. Das ist also die Gleichung G, deren Strahl S_0 normal auf der Ebene T steht.

Nachdem das Problem prinzipiell gelöst ist, gehen wir an die praktische Durchführung. Die ursprünglichen gegebenen Gleichungen G_1 G_2 G_3 haben die Hypotenusen h_1 h_2 h_3, die wir berechnen. Wenn diese Hypotenusen auf den Strahlen S_1 S_2 S_3 aufgetragen sind, dann können wir zwischen ihren Endpunkten drei Brücken h_{12} h_{23} h_{31} spannen, und diese sind die Hypotenusen der drei Differenzgleichungen

$$G_1 - G_2 \qquad G_2 - G_3 \qquad G_3 - G_1 \quad \ldots \quad 77)$$

Die sechs Hypotenusen h_1 h_2 h_3 h_{12} h_{23} h_{31} sind nun die Kanten eines Tetraeders, des h-Tetraeders der drei Strahlen S_1 S_2 S_3, und dadurch sind auch alle Winkel bestimmt, insbesondere die Winkel ε_{12} ε_{23} ε_{31} zwischen den drei Strahlen. Wenn wir dann auf die verlängerten Strahlen von O aus die Hypotenusen K_1 K_2 K_3 auftragen und durch die Endpunkte die Ebene T legen, dann haben wir ein zweites Tetraeder, das K-Tetraeder, und es ist leicht, graphisch die Spitze O auf die Basis T zu projizieren, und so den Punkt q der kleinsten Hypotenuse H zu konstruieren.

Um nun auch die Stellfaktoren u v w zu bestimmen, die dem Punkt q entsprechen, verfahren wir so: Durch die Hypotenuse H_0, also O und q, legen wir drei Ebenen U V W, die durch die drei Ecken des Basisdreieckes gehen. Sie geben im Dreieck drei Schnittlinien

$$r_1 + s_1 \qquad r_2 + s_2 \qquad r_3 + s_3$$

Die Ebene U gibt uns die Proportionen:

$$\frac{r_1}{r_1 + s_1} = \frac{u\,K_1}{K_1} = u$$

Entsprechende Gleichungen geben die Ebenen V und W, so daß gilt:

$$u = \frac{r_1}{r_1 + s_1} \qquad v = \frac{r_2}{r_2 + s_2} \qquad w = \frac{r_3}{r_3 + s_3} \quad \ldots \quad 78)$$

Daß die Summe dieser Brücken gleich Eins ist, das ist ein interessanter geometrischer Satz. Mit u v w müßten wir die gegebenen Einsgleichungen multiplizieren. Die ursprünglichen Einsgleichungen G_1 G_2 G_3 aber müssen wir mit

$$\frac{u}{l_1} \qquad \frac{v}{l_2} \qquad \frac{w}{l_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 79)$$

multiplizieren, so daß die beste Gleichung, die wir aus den gegebenen Gleichungen ableiten können, so lautet:

$$G = \frac{u}{l_1} \cdot G_1 + \frac{v}{l_2} \cdot G_2 + \frac{w}{l_3} \cdot G_3 \quad \ldots\ldots \quad 80)$$

Wir sehen, daß es durchaus nicht notwendig ist, in den gegebenen Gleichungen die Absoluten wirklich wegzudividieren, denn wir brauchen von den Einsgleichungen nur die Quotienten

$$h_1 : l_1 \qquad h_2 : l_2 \qquad h_3 : l_3$$

Hiemit sind wir fertig. Diese Lösung des Problems, aus drei Gleichungen die beste Summengleichung abzuleiten, hat mehr theorethischen als praktischen Wert. Wir erkennen, daß der Summenstrahl vor allem dann sehr günstig ausfällt, wenn die Winkel ε, die die drei Strahlen miteinander bilden, sehr groß sind, nahezu gestreckte Winkel. Auch wenn sie sehr klein sind, aber K_1 K_2 K_3 sehr verschiedene Werte haben, ergibt sich ein sehr günstiger Summenstrahl. Man kann aber auch beweisen, daß das Dreistrahlen-Verfahren sehr selten einen wesentlich besseren Strahl geben wird, als dieselben drei Strahlen bei dem viel einfacheren zweimaligen Zweistrahlen-Verfahren.

Graphisches Lotkugel-Verfahren. Nachdem wir das Hypotenusen-Tetraeder berechnet und so die Winkel zwischen den Strahlen S_1 S_2 S_3 bestimmt haben, tragen wir nicht die Hypotenusen K_1 K_2 K_3, sondern die Stellote s_1 s_2 s_3:

$$s_1 = \frac{l_1}{h_1} \qquad s_2 = \frac{l_2}{h_2} \qquad s_3 = \frac{l_3}{h_3} \qquad \ldots\ldots\ldots 81)$$

der gegebenen Gleichungen auf. Wenn wir durch die Endpunkte p_1 p_2 p_3 der Lote die entsprechenden Ebenen E_1 E_2 E_3 legen, dann schneiden sich diese in

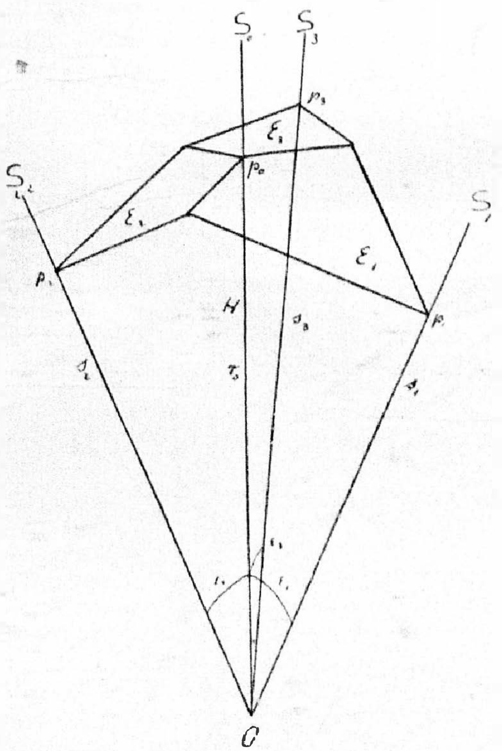

Fig. 13.

einem Punkte p_0, der einen Vektor r_0 hat. Wir konstruieren nun die bekannte Lotkugel K, deren Mittelpunkt den Vektor r_0 halbiert, und die durch die Punkte O und p_0 geht. Alle Summenebenen, die wir von den drei gegebenen Gleichungen G_1 G_2 G_3 ableiten können, gehen durch den Punkt p_0 und haben ihren Lotpunkt in der Lotkugelfläche K. Was wir suchen, ist die Summenebene, die das längste Lot hat. Das ist offenbar die Ebene E, deren Lot s der Vektor r_0 ist, deren

Lotpunkt also der Schnittpunkt p_0 ist. Die schiefen Koordinaten $t_1\, t_2\, t_3$ dieses Punktes p_0 finden wir, wenn wir von p_0 aus zu jedem Strahle eine Parallele zur gegenüberliegenden Koordinatenebene ziehen. Wir erhalten so die von O aus zu messenden Strahlenstücke $t_1\, t_2\, t_3$, aus denen wir die Stellfaktoren $u\, v\, w$ finden:

$$u = \frac{t_1}{h} \qquad v = \frac{t_2}{h_2} \qquad w = \frac{t_3}{h_3} \quad \ldots\ldots \quad 82)$$

Die Gleichung der besten Ebene G ist dann:

$$G = u\, G_1 + v\, G_2 + w\, G_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 83)$$

Das alles kann man leicht graphisch machen.

Algebraisches Lotkugelverfahren. Wir wollen für die Stellfaktoren $u\, v\, w$ algebraische Ausdrücke entwickeln. Der Pol p_0 hat im n-dimensionalen Raume irgendwelche Koordinaten $A\, B \ldots$, und seinen Vektor r_0 wollen wir H nennen. Die Strahlenkoordinaten desselben Punktes p_0 sind ein Polygon von den Seiten:

$$t_1 = u\, h_1 \qquad t_2 = v\, h_2 \qquad t_3 = w\, h_3 \quad \ldots\ldots \quad 84)$$

Die x-Koordinate A ist die Summe der x-Projektionen der Polygonseiten $t_1\, t_2\, t_3$ und das entsprechende gilt von $B\, C \ldots$:

$$\left.\begin{aligned} A &= u\, a_1 + v\, a_2 + w\, a_3 \\ B &= u\, b_1 + v\, b_2 + w\, b_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 85)$$

Der Vektor H bildet mit den drei Strahlen $S_1\, S_2\, S_3$ irgendwelche Winkel $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3$, und es gilt offenbar:

$$H \cos \varepsilon_1 = s_1 \qquad H \cos \varepsilon_2 = s_2 \qquad H \cos \varepsilon_3 = s_3 \quad \ldots . \quad 86)$$

Der Winkel ε_1, den der Vektor H mit der Hypotenuse h_1 auf dem Strahle S_1, also auch mit dem Strahle selber bildet, ist:

$$\cos \varepsilon_1 = \frac{a_1\, A + b_1\, B + \ldots}{h_1\, H} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 87)$$

Die entsprechenden Ausdrücke gelten für ε_2 und ε_3. Wenn wir diese Ausdrücke in 86) einsetzen, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_1\, A + b_1\, B + \ldots &= h_1\, s_1 & \qquad a_2\, A + b_2\, B + \ldots &= h_2\, s_2 \\ &= t_1 & &= t_2 \end{aligned} \quad \ldots \quad 88)$$

Wir setzen für $A\, B \ldots$ ihre Werte ein und ordnen nach $u\, v\, w$:

$$\left.\begin{aligned} u\,(a_1^2 + b_1^2 + \ldots) + v\,(a_1 a_2 + b_1 b_2 + \ldots) + w\,(a_1 a_3 + b_1 b_3 + \ldots) &= t_1 \\ u\,(a_2 a_1 + b_2 b_1 + \ldots) + v\,(a_2^2 + b_2^2 + \ldots) + w\,(a_2 a_3 + b_2 b_3 + \ldots) &= t_2 \\ u\,(a_3 a_1 + b_3 b_1 + \ldots) + v\,(a_3 a_2 + b_3 b_2 + \ldots) + w\,(a_3^2 + b_3^2 + \ldots) &= t_3 \end{aligned}\right\} \quad 89)$$

was wir einfacher so schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} u\,[K_1 K_1] + v\,[K_1 K_2] + w\,[K_1 K_3] &= t_1 \\ u\,[K_2 K_1] + v\,[K_2 K_2] + w\,[K_2 K_3] &= t_2 \\ u\,[K_3 K_1] + v\,[K_3 K_2] + w\,[K_3 K_3] &= t_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 90)$$

In den Klammern stehen Normalkoeffizienten, die man alle aus den sechs Seiten des schon berechneten Hypotenusentetraeders berechnen kann. Es gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} [K_1 K_1] = h_1^2 & 2\,[K_1 K_2] = h_1^2 + h_2^2 - h_{12}^2 \\ [K_2 K_2] = h_2^2 & 2\,[K_2 K_3] = h_2^2 + h_3^2 - h_{23}^2 \\ [K_3 K_3] = h_3^2 & 2\,[K_3 K_1] = h_3^2 + h_1^2 - h_{31}^2 \end{array}\right\} \quad 91)$$

Wenn wir aus den drei Gleichungen 90) die drei Stellfaktoren $u\ v\ w$ berechnet haben, dann ergibt sich die beste Summengleichung G, die man aus den drei gegebenen Gleichungen $G_1\ G_2\ G_3$ ableiten kann:

$$G = u\,G_1 + v\,G_2 + w\,G_3.$$

Die Gleiehung G kann man dann noch durch zwei andere Gleichungen $G_4\ G_5$ abermals verbessern usw. Bei irgend einer Summengleichung G brechen wir ab, und projizieren den Wanderpunkt in ihren Lotpunkt p, der voraussichtlich sehr nahe bei P_0 liegt.

Die Summe von vielen Ebenen.

Das Problem, wie wir vom Ursprung O aus mittelst der gegebenen Strahlen $S_1\ S_2\ldots$ möglichst nahe an den Fernpunkt P_0 herankommen können, wollen wir nun auf eine wieder andere Art betrachten.

Durch den Ursprung O legen wir eine Normalebene E_0, die auf dem Zielstrahle S_0 normal steht. Auf den Strahlen $S_1\ S_2\ldots$ tragen wir in der Richtung der Lote $s_1\ s_2\ldots$ von O aus irgendwelche ganz beliebige, gleiche oder ungleiche Strecken $t_1\ t_2\ldots$ auf. Wenn wir aus diesen Strahlen $t_1\ t_2\ldots$ von O aus ein Polygon $t_1\ t_2\ldots$ bauen, dann kommen wir in irgendeinen Raumpunkt u, und durch diesen legen wir von O aus einen neuen Strahl S. Es läßt sich nun zeigen, daß dieser Summenstrahl S mit großer Wahrscheinlichkeit besser ist, d. h. näher an P_0 herankommt, als alle gegebenen Strahlen.

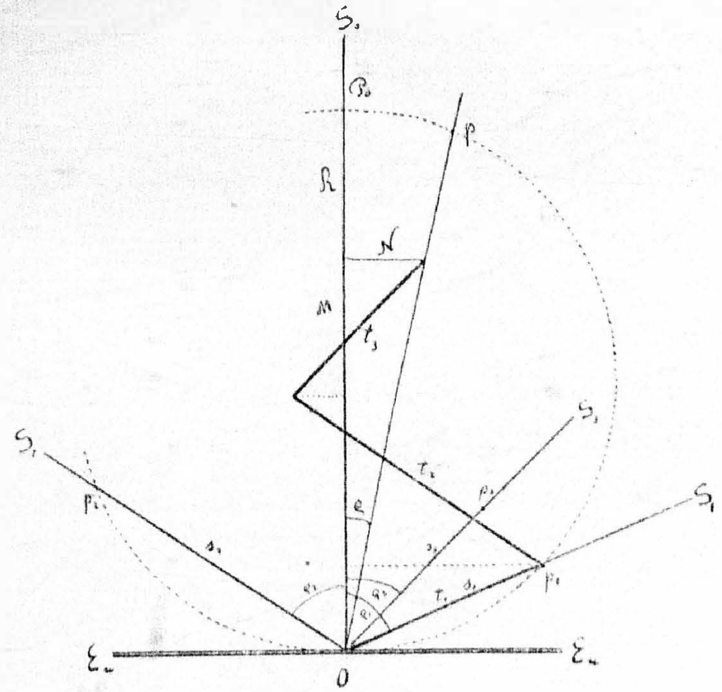

Fig. 14.

Wir erwägen so. Die Strecke t_1 hat auf dem Zielstrahl S_0 eine Komponente $t_1 \cos \varrho_1$ die gegen P_0 gerichtet ist, und in der Ebene E_n eine Komponente $t_1 \sin \varrho_1$, die normal zu S_0 in irgendeiner Richtung läuft. Das gilt von allen Seiten des Polygons: alle geben auf den Strahl S_0 eine positive Projektion $t \cos \varrho$, und diese Projektionen addieren sich arithmetisch zu einer Summe M. Alle geben auch in der Ebene E_n eine Projektion $\tau = t \sin \varrho$; diese Projektionen haben aber verschiedene Richtungen; sie bilden in der Ebene E_n ein Polygon $\tau_1 \tau_2 \ldots$, und dessen von O ausgehende Schlußsehne N ist höchstwahrscheinlich gegen M klein, vielleicht sehr klein. Die Sehne N ist der Abstand des Punktes n von dem Strahle S_0, und der Summenstrahl S bildet mit dem Zielstrahle S_2 einen Winkel ϱ, für den gilt:

$$tg\, \varrho = \frac{N}{M}$$

Dieser Winkel ϱ ist also höchstwahrscheinlich klein; kleiner als der Abstandswinkel ϱ irgend eines der gegebenen Strahlen $S_1\, S_2 \ldots$. Hiemit ist der Grundgedanke mehrerer Näherungsverfahren gegeben.

Es ist offenbar am zweckmäßigsten, für die Strecken $t_1\, t_2 \ldots$ auf den gegebenen Strahlen die schon vorhandenen Lote $s_1\, s_2 \ldots$ zu nehmen, da dann die besten Strahlen den größten Einfluß auf die Richtung des Summenstrahles S haben. Wir finden dann die Koordinaten $x_n\, y_n$ des Punktes n so, daß wir die Lote $s_1\, s_2 \ldots$ in ihre orthagonalen Komponenten zerlegen und die Komponenten achsenweise addieren. Diese Komponenten sind durch die Koordinaten der Lotpunkte $p_1\, p_2 \ldots$ gegeben, und so gilt denn:

$$x_n = \frac{l_1 a_1}{h_1^2} + \frac{l_2 a_2}{h_2^2} + \ldots \qquad y_n = \frac{l_1 b_1}{h_1^2} + \frac{l_2 b_2}{h_2^2} + \ldots \quad 92)$$

Zweckmäßiger ist aber eine andere Behandlung des Problems. Die Strecken $t_1\, t_2 \ldots$ stellen wir als Vielfache der entsprechenden Hypotenuse dar:

$$t_1 = u\, h_1 \qquad t_2 = v\, h_2 \quad \ldots \quad 93)$$

Dann ist die Schlußsehne H des Polygons $t_1\, t_2 \ldots$ nach Länge und Richtung die Hypotenuse einer Summengleichung G:

$$G = u\, G_1 + v\, G_2 + \ldots \quad 94)$$

Der Strahl S dieser Gleichung G ist sehr wahrscheinlich ein guter Strahl, welche Werte wir immer den Stellfaktoren $uv \ldots$ geben. Besonders gut ist aber vermutlich der Strahl S, wenn die Polygonstrecken die Werte

$$\begin{aligned} t_1 &= s_1 & t_2 &= s_2 & \ldots\ldots \\ &= \frac{l_1}{h_1} & &= \frac{l_2}{h_2} & \ldots\ldots \end{aligned} \quad 95)$$

haben. Wenn wir diese Werte in 93) einführen, dann erhalten die Stellfaktoren die Werte:

$$u = \frac{l_1}{h_1^2} \qquad v = \frac{l_2}{h_2^2} \quad \ldots \quad 96)$$

und die Summengleichung G wird so dargestellt:

$$G = \frac{l_1}{h_1^2} \cdot G_1 + \frac{l_2}{h_2^2} \cdot G_2 + \ldots \quad 97)$$

Das heißt in Worten: wir bekommen eine voraussichtlich sehr gute Summengleichung, wenn wir jede der gegebenen Gleichungen mit ihrer eigenen Absoluten, dividiert durch ihr Hypotenusenquadrat, multiplizieren und dann die Gleichungen addieren.

Wenn, was immer geschehen sollte, die Hypotenusen aus den Gleichungen grob wegdividiert sind, so daß für alle Gleichungen etwa gilt:

$$1 < h \leq 1 \cdot 3$$

dann kann man 97) genügend genau schreiben:

$$G = l_1 G_1 + l_2 G_2 + \ldots \qquad 98)$$

Das heißt in Worten: Wir erhalten eine gute Summengleichung G, wenn wir jede gegebene Gleichung grob mit ihrer eigenen Absoluten multiplizieren und dann addieren. Die Gleichung 98 lautet dann:

$$[a\,l]\,x + [b\,l]\,y + \ldots = [l^2] \qquad 99)$$

Diese Gleichung läßt leicht erkennen, daß die Summengleichung voraussichtlich gut ist. Die Absolute $[l^2]$ wächst nämlich voraussichtlich hoch an, da sie aus lauter positiven Gliedern besteht. Die Koeffizienten aber laufen voraussichtlich gar nicht hoch an, da sie aus teils positiven, teils negativen Gliedern bestehen. Die Hypotenuse H der Summengleichung wächst also durch die Addition viel weniger, als die Absolute. Da nun das Stellot s der Summengleichung bestimmt ist durch

$$s = \frac{[l^2]}{H} \qquad 100)$$

so ist das Stellot der Summengleichung voraussichtlich groß. Das war eben zu beweisen.

Wir können in der Vereinfachung noch weiter gehen. Bei der Erweiterung der Gleichungen $G_1\,G_2 \ldots$ können wir den Absoluten den numerischen Wert Eins geben. Das heißt mit anderen Worten: wir schreiben alle gegebenen Gleichungen mit positiven Absoluten, indem wir in jeder Gleichung mit negativen Absoluten die Vorzeichen umkehren, und addieren dann die Gleichungen. Die Summengleichung

$$[a]\,x + [b]\,y + \ldots = [l]$$

ist dann voraussichtlich gut.

Beitrag zur rechnerischen Lösung des Pothenotschen Problemes.

Von **August Gabrielli**, k. k. Obergeometer in Linz.

In den Monatsheften 7 und 8 des III. Jahrganges und in Nr. 10 des VIII. Jahrganges dieser Zeitschrift sind bereits Beiträge zur rechnerischen Lösung des Rückwärtseinschneidens enthalten.

In beiden Fällen wird jedoch die Punktbestimmung durch Einschaltung von Hilfspunkten, deren Koordinaten ebenfalls gerechnet werden müssen, vorgenommen.

Lotverfahren.

Von Prof. **Karl Fuchs** in Preßburg.

(Fortsetzung).

Es seien n Gleichungen $G_1\ G_2 \ldots$ mit n Unbekannten $x\ y \ldots$ gegeben:

$$\begin{array}{ll} G_1 & a_1 x + b_1 y + \ldots = l_1 \\ G_2 & a_2 x + b_2 y + \ldots = l_2 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

und es gelte durch Elimination die Werte $X\ Y \ldots$ der Unbekannten zu bekommen. Man kann das Problem auf verschiedene Arten geometrisch deuten. Die einfachste und älteste Deutung ist die, daß wir die gegebenen Gleichungen als Gleichungen von Ebenen $E_1\ E_2 \ldots$ auffassen. Die n Ebenen im n-dimensionalen Raume schneiden sich in einem Punkte P_0 von den Koordinaten $X\ Y \ldots$, und es gilt, aus den Gleichungen der Ebenen die Koordinaten des Schnittpunktes P_0 zu berechnen. Diese geometrische Deutung ist in einer ersten Studie besprochen worden. In der vorliegenden zweiten Studie soll eine zweite geometrische Deutung besprochen worden.

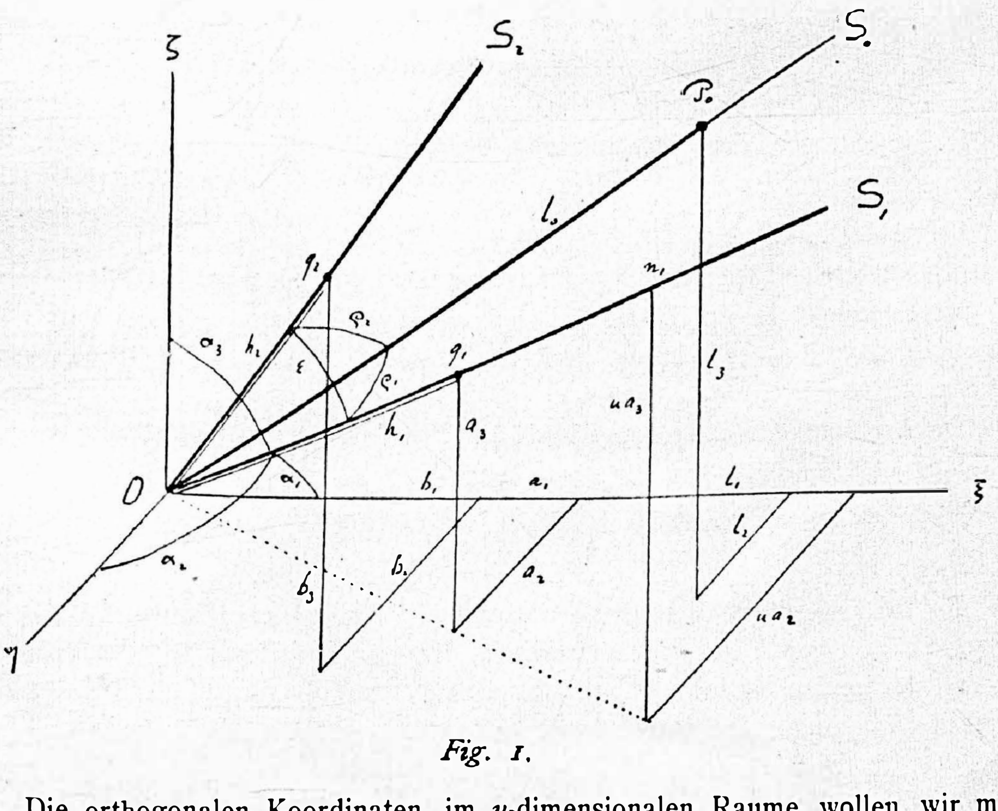

Fig. 1.

Die orthogonalen Koordinaten im n-dimensionalen Raume wollen wir mit $\xi\ \eta \ldots$ bezeichnen. In den gegebenen Gleichungen stehen die Koeffizienten in Kolumnen. Die Koeffizienten der ersten Kolumne sehen wir als Koordinaten eines Punktes q_1 an:

$$\xi = a_1 \qquad \eta = a_2 \qquad \zeta = a_3 \quad \ldots\ldots\ldots 2)$$

und den Vektor des Punktes q_1 bezeichnen wir mit h_1:

$$h_1^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3)$$

Die Stellwinkel $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots$ dieses Vektors sind also:

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_1}{h_1} \qquad \cos\alpha_2 = \frac{a_2}{h_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Die verlängerte Hypotenuse h_1 gibt einen Strahl S_1 und die Ursprungsebene, die normal zu S_1 liegt, hat die Gleichung:

$$E_1 \qquad a_1\,\xi + a_2\,\eta + a_3\,\zeta + \ldots = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Wir können diese Ebenengleichung auch die Gleichung des Strahles S_1 nennen. Die Hypotenuse h_1 sehen wir immer als positiv an; der Ast des Strahles S_1, in dem die Hypotenuse liegt, ist der positive Ast, und die Stellwinkel $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ sind die Winkel, die dieser positive Ast mit den positiven Koordinatenachsen bildet.

So gibt uns jede der Koeffizientenkolumnen einen Raumpunkt q, einen Strahl S und eine Ebene E.

Auf den Strahlen $S_1\ S_2 \ldots$ können wir beliebige Strecken $t_1\ t_2 \ldots$ auftragen. Diese Strecken stellen wir immer als Vielfache der entsprechenden Hypotenuse dar, die also dadurch den Charakter eines Maßes bekommt. Insbesondere schreiben wir:

$$t_1 = h_1\,x \qquad t_2 = h_2\,y \qquad t_3 = h_3\,z \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

So erscheint jede der Variablen $x\ y \ldots$ als Wegzahl eines besonderen Strahles S. Die Projektionen der Hypotenuse h_1 sind die Koeffizienten $a_1\ a_2 \ldots$; die Projektionen einer Strecke t_1 sind also:

$$a_1\,x \qquad a_2\,x \qquad a_3\,x \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Ebenso können wir sagen: der Hypotenusenpunkt q_1 hat die Koordinaten $a_1\,a_2 \ldots$, und der Endpunkt m_1 der Strecke t_1 hat die Koordinaten $a_1\,x,\ a_2\,x \ldots$ Das Entsprechende gilt auch für die anderen Strahlen. So hat t_2 die Projektionen $b_1 y,\ b_2 y \ldots$

Die Absoluten $l_1\ l_2 \ldots$ sehen wir als die Koordinaten eines Raumpunktes P_0 an:

$$\xi_0 = l_1 \qquad \eta_0 = l_2 \qquad \zeta_0 = l_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

Der Vektor l_0 des Fernpunktes ist also:

$$l_0^2 = l_1^2 + l_2^2 + \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Es ist immer möglich, vom Ursprung O nach dem Fernpunkt P_0 ein Polygon von Seiten $t_1\ t_2 \ldots$ zu spannen, derart, daß jede Seite t die Richtung des entsprechenden Strahles S hat. Dann muß das Polygon auf der ξ-Achse die Projektion l_1 haben. Die Projektionen der einzelnen Seite $t_1\ t_2 \ldots$ sind:

$$a_1\,x \qquad b_1\,y \qquad c_1\,z \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Es muß also gelten:

$$a_1\,x + b_1\,y + \ldots = l_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Das ist aber die erste der gegebenen Gleichungen G. Wenn wir ausdrücken, daß die Projektionen des Polygons auf der η-Achse gleich l_2 sein muß, dann erhalten wir die zweite gegebene Gleichung G_2 usw. Hiemit sind die gegebenen Gleichungen geometrisch auf ein Seitenpolygon im Raume gedeutet.

Das einfache Lotverfahren.

Das einfache Lotverfahren ist ein Näherungsverfahren; wir bemühen uns wieder, den Wanderpunkt von O aus mit Hilfe der Strahlen S dem Fernpunkte immer näher zu bringen. Durch den Fernpunkt P_0 legen wir Ebenen $E_1\ E_2 \ldots$ parallel zu den Ursprungsebenen. Die Strahlen S sind dann Normalstrahlen zu den P_0-Ebenen und durchstoßen diese dann in Lotpunkten $p_1\ p_2 \ldots$, die wieder in einer Lotkugel K liegen, deren Achse der Vektor l_0 des Fernpunktes ist, und deren Pole O und P_0 sind. Die Näherung des Wanderpunktes erfolgt wieder so, daß wir ihn von O aus von Ebene in Ebene projizieren. Er kommt dann notwendig dem Fernpunkte immer näher. Die Wege $t_1\ t_2 \ldots$, die der Wanderpunkt zurücklegt, haben die Richtungen der Strahlen S und bilden ein Polygon, das gleichsam in einer Spirale sich dem Punkte P_0 nähert.

Auf seinem Wege wird der Wanderpunkt wiederholt auf die Ebene E_1 projiziert, legt also in der Richtung des Strahles S_1 mehrere Strecken $t_1'\ t_1'' \ldots$ zurück. Aneinandergefügt geben diese Teilstrecken einen Weg

$$t_1 = t_1' + t_1'' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 12)$$

den der Wanderpunkt auf dem Strahle S_1 zurückgelegt hat. Ebenso addieren wir die Strecken, die der Wanderpunkt auf jedem anderen Strahle zurückgelegt hat. Die resultierenden Strecken $t_1\ t_2 \ldots$ sind dann die gesuchten Seiten des Polygons, das von O nach P_0 gespannt ist.

Wir ersehen aus diesem orientierenden Ueberblick einen sehr bedeutenden Vorteil des neuen Verfahrens gegen das alte; wir kennen von allem Anfang an die Koordinaten des Fernpunktes P_0 und wissen somit in jedem Augenblick, wie nahe wir schon an P_0 gekommen sind.

Wir wollen nun den ersten Näherungsakt ausführen und den Wanderpunkt auf die Ebene E_1 projizieren. Der Strahl S_1 bildet mit dem Vektor l_0 einen Winkel ϱ_1. Auf dem Strahl S_1 aufgetragen ist die Hypotenuse h_1, und wir können den Winkel ϱ_1 aus den Projektionen von l_0 und h_1 berechnen:

$$\cos \varrho_1 = \frac{l_1 a_1 + l_2 a_2 \ldots}{l_0 h_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 13)$$

Wenn wir dem Wanderpunkt den Strahl S_1 als Führungsstrahl geben, und wir wollen ihn möglichst nahe an P_0 heranbringen, dann müssen wir ihn über einen Weg t_1 in den Lotpunkt p_1 in E_1 bringen. Es gilt dann:

$$t_1 = l_0 \cos \varrho_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 14)$$

Wenn wir für t_1 seinen Wert $h_1 x$ und für $\cos \varrho_1$ den Wert 13) einsetzen, dann ergibt sich:

$$x = \frac{l_1 a_1 + l_2 a_2 + \ldots}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

Das ist der erste Näherungswert x_1 der Variablen x. In bezug auf den Wanderpunkt hat jetzt der Fernpunkt P_0 die kleineren Koordinaten

$$l_1 - a_1 x \qquad l_2 - a_2 x \qquad l_3 - a_3 x \quad \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

Wir könnten jetzt den Koordinatenursprung in den Wanderpunkt nach p_1 verlegen. Hiermit ist der erste Näherungsakt beendet.

Nach unserer Deutung beziehen sich also die Koordinaten $l_1\ l_2\ \ldots$ des Fernpunktes dem Sinne nach nicht auf den Punkt O, sondern auf den Wanderpunkt, der allerdings am Anfange des Näherungsaktes in O liegt. Wenn wir den Wanderpunkt auf einem Strahle S möglichst nahe an P_0 herangebracht haben, haben wir seinen Abstand l_0 von P_0 zu einem Minimum gemacht:

$$l_1^2 + l_2^2 + \ldots = \text{Min.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

Den Gedanken, durch Aenderung einer einzigen Variablen x die Quadratsumme $[l^2]$ zu einem Minimum zu machen, können wir auch rein algebraisch durchführen. Wenn wir in den gegebenen Gleichungen $G_1\ G_2 \ldots$ für x das Binom $x_1 + x$ einführen, wo x_1 ein vorderhand unbestimmter Näherungswert ist, und wir schaffen die x_1-Glieder nach rechts, dann lautet die Bedingung 17) so:

$$(l_1 - a_1 x_1)^2 + (l_2 - a_2 x_1)^2 + \ldots = \text{Min.} \quad \ldots\ldots \quad 18)$$

woraus sich die Bestimmung gibt:

$$x_1 = \frac{l_1 a_1 + l_2 a_2 + \ldots}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

also genau dieselbe Bestimmung, die uns das geometrische Bild gegeben hat.

Nach dem ersten Näherungsakt folgt der zweite, indem wir den Wanderpunkt etwa mittelst des Strahles S_2 über eine Strecke $h_2 y$ auf die Ebene E_2 projizieren. Wir erhalten so einen Näherungswert y_1 usw. Wie wir sehen, ist unser neues einfaches Lotverfahren nur das geometrische Bild des alten algebraischen Näherungsverfahrens der Einzelinkremente. Wir erkennen zugleich einen zweiten großen Vorteil des neuen Lotverfahrens: während im alten Lotverfahren der Absolutentilgung jeder einzelne Näherungsakt für alle Variabeln Inkremente gegeben hat, gibt das neue Lotverfahren nur einer Variabeln ein Inkrement.

Wir können jetzt vergleichen: Das Tilgungsverfahren, äußerlich so grundverschieden vom Verfahren der Einzelinkremente, ist geometrisch mit ihm identisch: Projektion des Wanderpunktes von Ebene zu Ebene; beide führen also gleich rasch zum Ziele und sind gleich gut. Nur verlangt das Tilgungsverfahren mit seinen vielen Inkrementen unverhältnismäßig mehr Mühe als das Verfahren der Einzelinkremente.

Beim neuen Lotverfahren kommt man dem Fernpunkte P_0 offenbar am nächsten, wenn man zum Führungsstrahl den Strahl nimmt, der den kleinsten Winkel ϱ mit dem Vektor l_0 bildet. Am einfachsten orientiert man sich über die Winkel ϱ der Strahlen S mittelst der Hypotenusendreiecke, die wir schon kennen. Das Verfahren soll nochmals kurz beschrieben werden.

Auf dem Zielstrahl S_0, der durch P_0 geht, liegt die Hypotenuse l_0 mit dem Endpunkt P_0, und auf dem Strahle S_1 liegt die Hypotenuse h_1 mit dem Endpunkt q_1. Wir spannen zwischen P_0 und q_1 die Brücke h_{01}, deren Endpunkte P_0 und p_1 die Koordinatendifferenzen

$$a_1 - l_1 \qquad a_2 - l_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

zeigen, so daß wir h_{01} berechnen können:

$$h^2_{01} = (a_1 - l_1)^2 + (a_2 - l_2)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

Jetzt kennen wir alle drei Seiten des Dreieckes $l_0\ h_1\ h_{01}$; wir können es zeichnen, und wenn wir es gezeichnet haben, sehen wir den gesuchten Winkel ϱ und können auch den Näherungswert x einfach graphisch bestimmen; wir fällen von P_0 ein Lot auf S_1 und gewinnen den Lotpunkt p_1, also auch die Strecke t_1, und wenn wir diese durch h_1 dividieren, haben wir den Näherungswert x.

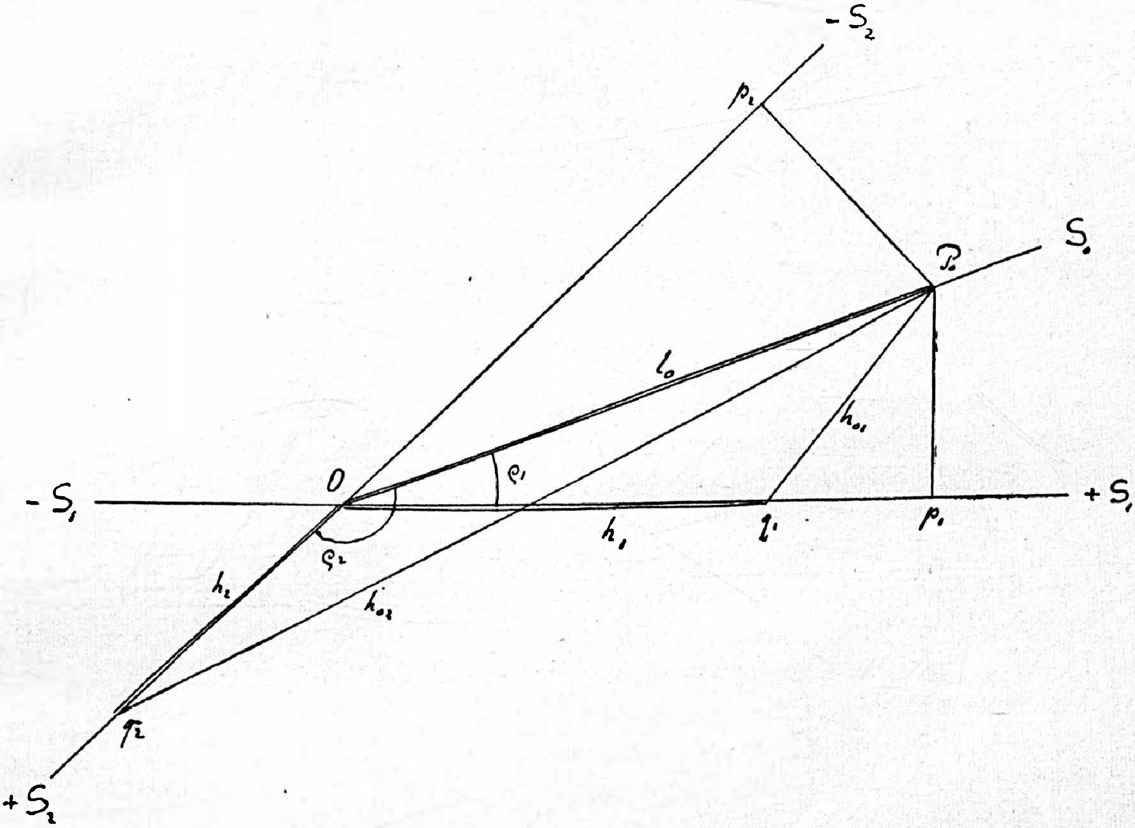

Fig. 2.

So berechnen wir denn eine Reihe von Hypotenusen

$$h_{01} \qquad h_{02} \qquad h_{03} \dots$$

und zeichnen die entsprechenden Hypotenusendreiecke. Welches Dreieck die kleinsten Winkel ϱ zeigt, dem entnehmen wir den entsprechenden Näherungswert x oder y oder z usw. Wenn der Winkel ϱ nahezu ein gestreckter ist, dann ist der Strahl wieder günstig, nur liegt der Näherungspunkt p dann am negativen Ast des Strahles.

Die Zeichnung läßt uns unmittelbar eine Gefahr erkennen, die uns bei algebraischer Behandlung entgeht. Es kann vorkommen, daß die Hypotenuse h_1 gegen l_0 sehr klein ist, und dann wird die Zeichnung unsicher. In diesem Falle tragen wir auf S_1 ein Vielfaches von h_1 auf, etwa Kh_1 mit einem Endpunkte m_1 und ziehen die Brücke von P_0 nach m_1. Die Koordinaten von m_1 sind $Ka_1\ \ Ka_2, \dots$ und die Hypotenuse h_{01} ist dann:

$$h_{01}^2 = (Ka_1 - l_1)^2 + (Ka_2 - l_2)^2 + \dots \dots \dots \qquad 22)$$

Jetzt ist die Zeichnung viel sicherer. Wenn umgekehrt l_0 gegen h_1 sehr klein ist, dann tragen wir auf S_0 ein Vielfaches $K l_0$ des Vektors auf, und die Brücke ist dann bestimmt durch:

$$h_{01}^2 = (a_1 - K l_1)^2 + (a_2 - K l_2)^2 + \ldots \ldots \ldots \quad 23)$$

So machen wir es bei allen Strahlen. Die Näherungswerte $x\ y \ldots$ werden natürlich auf Grund der einfachen Hypotenuse berechnet, z. B. $x = t_1 : h_1$ und nicht $x = t_1 : K h_1$.

Es taucht die Frage auf, ob wir der Gleichung G eines Strahles S nicht ansehen können, ob ihr Strahl einen großen oder kleinen Winkel mit dem Zielstrahl S_0 macht. Man kann es. Wenn die Koeffizienten $a_1\ a_2 \ldots$ die Gleichung G_1 eines Strahles S_1 den Absoluten $l_1\ l_2 \ldots$ proportional sind, dann geht der Strahl S_1 geradezu durch den Fernpunkt P_0. Wenn die Koeffizientes $a_1\ a_2 \ldots$ eines Strahles also nur wenig von der Proportionalität

$$\frac{a_1}{l_1} = \frac{a_2}{l_2} = \frac{a_3}{l_3} = \ldots$$

abweichen, dann weicht der Strahl S_1 nur wenig vom Strahle S_0 ab. Es wiederholen sich hier die Erwägungen des ersten Artikels über Lotverfahren.

So viel über das einfache Lotverfahren mit Kolumnenebenen.

Differenzstrahlen.

Die Endpunkte $q_1\ q_2$ der Hypotenusen $h_1\ h_2$ wollen wir, wie schon oft, mit der Brücke h_{12} verbinden. Der Punkt q_1 hat die Koordinaten $a_1\ a_2 \ldots$, der Punkt q_2 hat die Koordinaten $b_1\ b_2 \ldots$; die Brücke h_{12} ist also durch die Koordinatendifferenzen bestimmt:

$$h_{12}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots \ldots \ldots \quad 24)$$

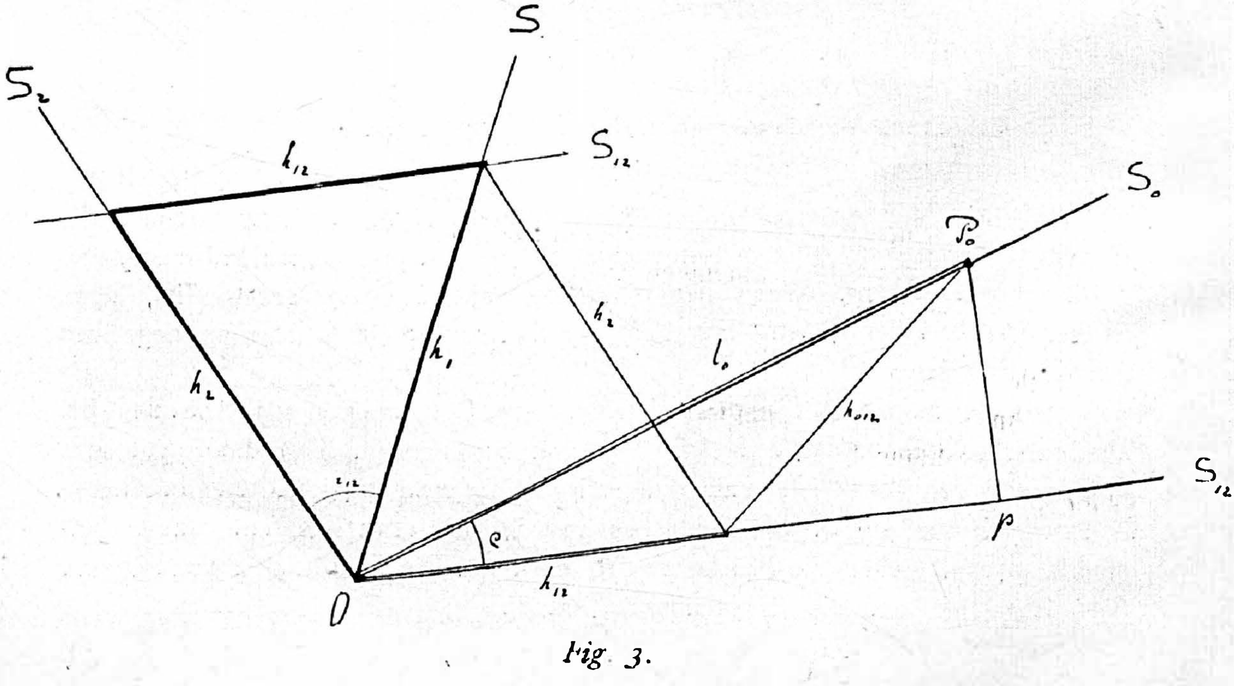

Fig. 3.

Die positive Richtung von h_{12} führt dann von q_2 nach q_1. Es gelten dann die beiden gleichwertigen geometrischen Gleichungen:

$$h_2 + h_{12} \doteq h_1 \qquad h_{12} \doteq h_1 - h_2 \quad \ldots\ldots\ldots \; 25)$$

Die erste Gleichung sagt: wenn man von O aus das Polygon $h_2\, h_{12}$ durchlauft, dann kommt man in denselben Raumpunkt, wie wenn man von O aus die Strecke h_1 durchlauft. Die zweite Gleichung sagt: wenn man von O aus die Strecke h_{12} durchlauft, die in Länge und Richtung mit der Brücke h_{12} übereinstimmt, dann kommt man in denselben Raumpunkt, wie wenn man von O aus erst die Strecke h_1 und von deren Endpunkt aus eine Strecke $-h_2$ durchlauft, die die Länge der Hypotenuse h_2, aber die entgegengesetzte Richtung hat.

Die verlängerten Hypotenusen $h_1\; h_2\; h_{12}$ geben die beiden Strahlen S_1 und S_2 und den Differenzstrahl oder Brückenstrahl h_{12}, und alle drei Strahlen denken wir uns von O aus gezogen. Wir betrachten die geometrische Gleichung:

$$h_{12} \doteq h_1 - h_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 26)$$

Wir multiplizieren beiderseits mit irgendeinem Faktor u:

$$u\, h_{12} \doteq u\, h_1 - u\, h_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 27)$$

Diese Gleichung können wir so deuten: Wenn wir von irgendeinem Raumpunkte u aus in der positiven Richtung des Brückenstrahles h_{12} eine Strecke $t_{12} = u\, h_{12}$ durchlaufen, dann kommen wir in denselben Punkt, wie wenn wir von u aus erst in der positiven Richtung des Strahles S_1 einen Weg $t_1 = u\, h_1$, und vom erreichten Punkt aus in der negativen Richtung des Strahles S_2 einen Weg $t_2 = u\, h_2$ zurücklegen.

Das alles hat folgende praktische Bedeutung. Nehmen wir an, wir hätten den Wanderpunkt von O aus zum Führungsstrahl den Differenzstrahl S_{12} gegeben und auf diesem den Wanderpunkt möglichst nahe an P_0 in den Näherungspunkt p_{12} herangebracht. Der Wanderpunkt hat dann auf S_{12} einen Weg $t_{12} = u\, h_{12}$ zurückgelegt, und u ist bestimmt durch

$$u = \frac{l_1 (a_1 - b_1) + l_2 (a_2 - b_2) + \ldots}{h_{12}^2} \quad \ldots\ldots\ldots \; 28)$$

Die Binome im Zähler sind die orthogonalen Komponenten von h_{12}. Jetzt haben wir einen Näherungswert der Variablen u, die dem Strahle S_{12} zukommt, der uns aber unmittelbar nichts nützt. Nun sagt uns aber Gl 27), daß wir in denselben Näherungspunkt p_{12} auch so gelangen können, daß wir auf S_1 einen Weg $t_1 = + u\, h_1$ und auf S_2 einen Weg $t_2 = - u\, h_2$ zurücklegen. Hiemit sind uns an Stelle des wertlosen Näherungswertes $u = u$ die wertvollen Näherungswerte $x = + u$ und $y = - u$ gegeben. Wir können also sagen: $u = u$ ist äquivalent mit $x = + u$ und $y = - u$:

$$u = u \text{ äquiv. } x = + u \qquad y = - u \quad \ldots\ldots\ldots \; 29)$$

So können wir also aus den gegebenen n Hypotenusenpunkten $q_1\, q_2 \ldots$ eine sehr große Zahl von Brückenstrahlen

$$\begin{array}{lll} S_{12} & S_{13} & S_{14} \ldots \\ & S_{23} & S_{24} \ldots \\ & & \ldots \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; 30)$$

ableiten, deren Variable wir mit u_{12} u_{13} . . . bezeichnen können. Wir buchen diese Strahlen, indem wir in die Tafel die den gegebenen Gleichungen G_1 G_2 . . . entsprechenden neuen Kolumnen anschließen, z. B.:

$$l_1 = a_1 x + b_1 y + \ldots + (a_1 - b_1) u_{12} + \ldots$$
$$l_2 = a_2 x + b_2 y + \ldots + (a_2 - b_2) u_{12} + \ldots \qquad \ldots\ldots 31)$$
$$\ldots\ldots$$

Jeder Näherungswert $u = u$, den uns irgendeiner dieser Differenzstrahlen als Führungsmittel liefert, ist zwar an sich wertlos, gibt aber für die Variabeln seiner Komponentenstrahlen zwei gleiche und entgegengesetzte Näherungswerte. Vor jedem Näherungsakt suchen wir uns aus den gegebenen Kolumnen 31) diejenige heraus, deren Koeffizienten den entsprechenden Absoluten einigermaßen proportional sind, wenigstens insoferne, daß den größten Absoluten die größten Koeffizienten entsprechen, mit gleicher oder konträrer Zeichenfolge, und die beste Kolumne verwenden wir zum Näherungswert.

Summenstrahlen. Wir können neue Strahlen auch so gewinnen, daß wir zwei neue Koeffizientenkolumnen, etwa die erste und zweite, addieren, und so eine neue Kolumne mit einer Variabeln v_{12} bilden. Die Hypotenusengleichung lautet dann

$$h_{12} = h_1 + h_2 \qquad \ldots\ldots 32)$$

und die Äquivalenzgleichung lautet:

$$v = v \quad \text{äqu.} \quad x = v \quad y = v \qquad \ldots\ldots 33)$$

So können wir die Zahl der disponibeln Strahlen abermals bedeutend vermehren.

(Schluß folgt).

Reformvorschläge.

Von Evidenzhaltungsobergeometer **F. Goethe** in Melk.

Als man vor mehreren Monaten die Ernennung hervorragender Männer des öffentlichen Lebens zu Mitgliedern der Kommission zur Förderung der Verwaltungsreform erfuhr, wurde diese Aktion selbstredend in den Kreisen der Staatsbeamtenschaft lebhaft erörtert.

Hiebei machten sich Bedenken geltend, ob es der so zusammengesetzten Kommission gelingen werde, allein und ohne Zuziehung von Beamten des ausübenden Dienstes das zu erzielen, was sowohl die Regierung als die Beamtenschaft anstrebt und erwünscht.

Sehr zu begrüßen ist es daher, daß in einer Sitzung anfangs Dezember 1911 der Vorsitzende dieser Kommission Freiherr von Schwartzenau den Antrag einbrachte, auf breitester Grundlage der Beamtenschaft die Möglichkeit zu bieten, bei dieser Arbeit mitzuwirken und daß dieser Antrag angenommen wurde.

Der Gedanke ist gut und wird nicht verfehlen, unter den Beamten auf fruchtbaren Boden zu fallen.

Da für das Katasterwesen diese Zeitschrift den Ort bildet, wo Reformvorschläge wohl in der verständnisvollsten Weise einer Beurteilung unterzogen werden können, so sei es dem Verfasser gestattet, in großen Zügen einige An-

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \frac{y}{r}}{\sin \frac{x}{r}} \cdot \xi = \frac{\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3}}{\frac{x}{r} - \frac{x^3}{6r^3}} \left(x + \frac{x^3}{12r^2} - \frac{xy^2}{4r^2}\right)$$

$$\eta = \frac{y + \frac{y^3}{2r^2}}{1 - \frac{x^2}{6r^2}} \left(1 + \frac{x^2}{12r^2} - \frac{y^2}{4r^2}\right)$$

$$\eta = \left(y + \frac{y^3}{3r^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{6r^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{12r^2} - \frac{y^2}{4r^2}\right)$$

$$\eta = \left(y + \frac{y^3}{3r^2} + \frac{x^2}{6r^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{12r^2} - \frac{y^2}{4r^2}\right)$$

$$\eta = y + \frac{y^3}{3r^2} + \frac{x^2 y}{6r^2} + \frac{x^2 y}{12r^2} - \frac{y^3}{4r^2}$$

$$\eta = y + \frac{y^3}{12r^2} + \frac{x^2 y}{4r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Analog würde sich die Aufgabe für jede externe Projektion rechnerisch behandeln lassen, da sich hiebei nur der Winkel δ ändert. Würde sich das Zentrum Z in der Entfernung e von der Kugelfläche, also in der Entfernung $(2r + e)$ von M befinden, so wäre $\operatorname{tg} \delta = \frac{x_0}{e + r + z_0}$

$$\xi = (2r + e) \cdot \operatorname{tg} \delta, \quad \eta = \frac{y_0}{x_0} \cdot \xi.$$

Lotverfahren.

Von Prof. **Karl Fuchs** in Preßburg.

(Schluß).

Kombinierte Strahlen.

Zwei Strahlen. Die Strahlen $S_1 S_2$, die von O ausgehen, bestimmen eine zweidimensionale Ebene E_{12}, in der sie liegen. Wir können die Strahlen $S_1 S_2$ als schiefe Koordinatenachsen in der Ebene E_{12} ansehen, und dann können wir jeden beliebigen Punkt q dieser Ebene mittelst zweier Koordinaten $t_1 t_2$:

$$t_1 = u\, h_1 \qquad t_2 = v\, h_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

bestimmen. Der Punkt q hat dann einen Vektor H und die Koordinaten

$$\xi = u\, a_1 + v\, b_1 \qquad \eta = u\, a_2 + v\, b_2 \qquad \zeta = \ldots\ldots\ldots \quad 35)$$

Der Abstand des Ebenenpunktes q vom Fernpunkt P_0 ist durch die Koordinatendifferenz von q und P_0 bestimmt:

$$r^2 = (\xi - l_1)^2 + (\eta - l_2)^2 + \ldots\ldots\ldots \quad 36)$$

Wir haben nun die Absicht, dem Wanderpunkte in O weder den Führungsstrahl S_1 noch den Führungsstrahl S_2, sondern die ganze Ebene E_{12} zur Führungsebene zu geben und ihn in den Ebenenpunkt q zu bringen, der zu P_0 am nächsten liegt. Diesen besten Ebenenpunkt q finden wir, wenn wir r^2 zu einem Minimum machen. Wenn wir r^2 entwickeln, ergibt sich:

$$r^2 = u^2 [a^2] + v^2 [b^2] + 2uv [ab] - 2u [al] - 2v [bl] + [l^2] \quad . \; . \; 37)$$

Daraus ergeben sich für u und v die Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u [a^2] + v [ab] &= [a l] \\ u [a b] + v [b^2] &= [b l] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 38)$$

Diese Werte von u und v führen den Wanderpunkt so nahe an P_0, als das in der Ebene E_{12} oder mit Hilfe der kombinierten Strahlen $S_1 S_2$ überhaupt möglich ist. Die Variabeln der speziellen Strahlen $S_1 S_2$ heißen aber nicht u und v, sondern x und y, und die berechneten günstigsten Werte von u und v sind also simultane Näherungswerte von x und y:

$$x = u \qquad y = v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 39)$$

Wir können jetzt auch den Strahl S_{12} berechnen, der in der Ebene E_{12} durch den besten Punkt q geht. Es gilt nämlich für den Vektor H des Punktes q die geometrische Gleichung:

$$H = u\, h_1 + v\, h_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 40)$$

Hier sind $h_1\, h_2$ die Hypotenusen der Komponentenstrahlen, und H nehmen wir für die Hypotenuse des gesuchten Strahles S_{12}. Nach früheren Erläuterungen ist die Länge der Hypotenuse H bestimmt durch

$$H^2 = (u\, a_1 + v\, b_1)^2 + (u\, a_2 + v\, b_2)^2 + \ldots \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 41)$$

Die Normalebene des Strahles S_{12} hat die Gleichung:

$$A\, \xi + B\, \eta + \ldots = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 42)$$

wobei die Koeffizienten $A\, B \ldots$ des Strahles S_{12}, d. h. die Projektionen seiner Hypotenuse H, die Werte haben:

$$A = u\, a_1 + v\, b_1 \qquad B = u\, a_2 + v\, b_2 \qquad C = \ldots \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 43)$$

Wir finden also die Koeffizienten des Strahles S_{12}, indem wir die u-fachen Koeffizienten der ersten Kolumne der Gleichungen $G_1\, G_2 \ldots$ zu den v-fachen Koeffizienten der zweiten Kolumne addieren. Die Variable des Strahles S_{12} können wir etwa mit w_{12} bezeichnen, so daß eine Strecke t_{12} auf diesem Strahle so geschrieben wird:

$$t_{12} = H w_{12} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 44)$$

Wenn H übermäßig groß sein sollte, dann benutzen wir die Zerlegung:

$$\left.\begin{aligned} t_{12} &= \frac{H}{n} \cdot n\, w_{12} \\ &= H^1 .\, w^1_{12} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 45)$$

d. h. wir können für den Strahl eine n-mal kleinere Hypotenuse H^1 annehmen, müssen dafür aber eine neue Variable $w'_{11} = n\, w_{12}$ einführen.

Wir wollen noch die Äquivalenzgleichung des Strahles S_{12} aufschreiben. Wir multiplizieren 40) mit w_{12}:

$$H w_{12} = u\, w_{12}\, h_1 + v\, w_{12}\, h_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 46)$$

Daraus ergibt sich die Äquivalenzgleichung:

$$w_{12} = w_{12} \qquad \text{äqu.} \qquad x = u\, w_{12} \qquad y = v\, w_{12} \quad . \; . \; . \; . \; 47)$$

Das beschriebene Verfahren können wir in doppelter Beziehung ein Lotverfahren nennen. Man kann das Verfahren so betrachten, daß wir von P_0 aus auf die Ebene E_{12} der beiden Strahlen $S_1\,S_2$ ein Lot r gefällt haben; man kann es aber auch so betrachten, daß wir in der Ebene E_{12} einen günstigsten Strahl S_{12} berechnet haben und auf diesem haben wir den Wanderpunkt in den Lotpunkt q der durch P_0 gelegten Normalebene E gelegt.

Das beschriebene Verfahren hätten wir auch viel einfacher, rein algebraisch entwickeln können. Wenn wir in den gegebenen Gleichungen $G_1\,G_2\ldots$ den Unbekannten xy irgendwelche noch nicht näher bestimmte Näherungswerte $x_1 y_2$ geben und die dadurch gewonnenen Glieder nach rechts schaffen, dann erhalten die Absoluten die verminderten Werte:

$$l_1' = l_1 - a_1 x - b_1 y \qquad l_2' = l_2 - a_2 x - b_2 y \qquad \ldots\ldots$$

Wir suchen nun die Werte von x und y, die die Quadratsumme der neuen Absoluten zu einem Minimum machen. Wir finden dann die Bestimmungen 38), nur steht x und y an Stelle von u und v. Die einfachen algebraischen Entwicklungen der verschiedenen Näherungsverfahren haben den Nachteil, daß man außerstand bleibt, die verschiedenen Verfahren zu vergleichen und gegeneinander abzuwägen. Die geometrische Entwicklung aber, obwohl weit mühevoller, hat den Vorteil, daß ziemlich alle Verfahren auf den einen Grundtypus des Lotverfahrens zurückgeführt werden und dadurch kommen wir in den Stand, die einzelnen Verfahren zu vergleichen und gegeneinander abzuwägen. Jeder Schritt, den wir machen, fließt dann aus dem geometrischen Gesamtbilde.

Drei Strahlen. Nach dem Vorbild des Zweistrahlenverfahrens können wir auch mit drei Strahlen $S_1\,S_2\,S_3$ arbeiten. Es soll von O aus ein Polygon von drei Seiten $t_1\,t_2\,t_3$ entworfen werden und die drei Seiten sollen die Richtungen der Strahlen $S_1\,S_2\,S_3$ haben, so daß gilt:

$$t_1 = x h_1 \qquad t_2 = y h_2 \qquad t_3 = z h_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 48)$$

Die Zahlen xyz sollen so gewählt werden, daß der Endpunkt q des Polygons möglichst nahe an P_0 herankommt. Wir rechnen so. Das Polygon gibt auf den Koordinatenachsen die Projektionen:

$$\begin{aligned} A &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ B &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

Das sind je die drei ersten Glieder der gegebenen Gleichungen $G_1\,G_2\ldots$ Der Abstand r des Endpunktes q von P_0 ist bestimmt durch

$$r^2 = (A - l_1)^2 + (B - l_2)^2 + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad 50)$$

Wenn wir durch Differentiation die Minimumbedingung zum Ausdrucke bringen, dann finden wir Normalgleichungen nach dem Vorbilde von:

$$\begin{aligned} x\,[aa] + y\,[ab] + z\,[ac] &= [al] \\ x\,[ba] + y\,[bb] + z\,[bc] &= [bl] \\ x\,[ca] + y\,[cb] + z\,[cc] &= [cl] \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 51)$$

Diese drei Gleichungen geben durch Elimination die besten Näherungswerte von xyz; sie geben das Polygon, das den Wanderpunkt so nahe an P_0 bringt, als das mit den drei gegebenen Strahlen möglich ist. Die so berechneten Näherungswerte $x y z$ setzen wir in den gegebenen Gleichungen $G_1 G_2 \ldots$ ein, d. h. wir verlegen den Ursprung nach den Näherungspunkt q.

Methode der kleinsten Quadrate.

Eine Aufgabe der Methode der kleinsten Quadrate liegt vor, wenn die Anzahl m der gegebenen Gleichungen $G_1 G_2 \ldots$ größer ist, als die Anzahl n der Unbekannten. Wenn man aber nach der Methode der Kolumnenebenen rechnet, dann kehrt sich das Verhältnis um: die Kolumnenebenen von der Grundform

$$a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \zeta + \ldots = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 52)$$

liegen in einem m-dimensionalem Raume und der Fernpunkt P_0 hat m Koordinaten $l_1 l_2 \ldots$; es sind aber nur n Strahlen $S_1 S_2 \ldots$ mit den n Variablen $x y \ldots$ da. Die Zahl n der gegebenen Gleichungen ist also kleiner, als die Zahl m der Dimensionen. Die n Strahlen $S_1 S_2 \ldots$ beherrschen nur n Dimensionen von den m Dimensionen des Raumes und es ist somit unmöglich, mittelst der Strahlen S den Wanderpunkt in den Fernpunkt P_0 zu bringen. Es ist also unmöglich die Quadratsumme $[l^2]$ der Absoluten unter ein gewisses Minimum zu bringen und unser Näherungsverfahren führt uns nur in einen Punkt p_0, dessen Abstand l_0 von P_0:

$$l_0^2 = [l^2]$$

der kleinste erreichbare Abstand ist. Es ist klar, daß die beschriebenen Näherungsverfahren ebensogut zur Aufsuchung des Punktes des kleinsten Abstandes p_0 verwendet werden können, wie zur Konstruktion eines Polygons, das bis nach P_0 führt.

Eliminierung einer Dimension.

Wenn n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben sind, dann brauchen wir zur geometrischen Deutung der Gleichungen einen n-dimensionalen Raum und dabei ist es gleichgültig, ob wir uns an das alte Bild der Zeilenebenen oder an das neue Bild der Kolumnenebenen halten. Wenn wir aus den gegebenen Gleichungen eine Unbekannte, etwa x, eliminieren, was eine sehr lästige Arbeit ist, dann wird eine Gleichung überflüssig und wir brauchen nur mehr einen $(n - 1)$-dimensionalen Raum, gleichgültig ob wir das alte oder das neue Ebenenbild vornehmen. Der Wegfall einer Dimension ist aber eine große Erleichterung der Arbeit.

Wenn wir mit Kolumnenebenen arbeiten, dann können wir eine Dimension wegfallen machen auch ohne das lästige Verfahren der Elimination einer Unbekannten. Wenn wir nämlich aus den gegebenen Gleichungen $G_1 G_2 \ldots$ die mittlere Gleichung berechnen, indem wir alle Gleichungen addieren und die Summengleichung durch n dividieren, dann können wir diese mittlere Gleichung G_m von jeder gegebenen Gleichung $G_1 G_2 \ldots$ abziehen und die Folge wird sein, daß in jeder Kolumne der umgearbeiten Gleichungen die Summe der Koeffizienten gleich Null ist:

$$a_1 + a_2 + \ldots = 0 \qquad b_1 + b_2 + \ldots = 0 \qquad l_1 + l_2 + \ldots = 0 \;.\;.\; 53)$$

Daraus aber folgt weiter, daß im Raume $\xi \eta \ldots$ alle Hypotenusenpunkte $q_1 q_2 \ldots$ also auch alle Strahlen $S_1 S_2 \ldots$ und auch der Fernpunkt P_0 in einer Ebene E_m liegen, die durch den Ursprung 0 geht und die Gleichung hat:

$$\xi + \eta + \ldots = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 54)$$

Der Normalstrahl S_m dieser Ebene liegt also in der positiven Raumecke des Achsensystems $\xi \eta \ldots$ und bildet mit den Achsen lauter gleiche Winkel $\mu_1 = \mu_2 = \ldots$, die man leicht berechnet; es gilt nämlich

$$[\cos^2 \mu] = n \cos^2 \mu = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 55)$$

oder

$$\cos \mu = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Diese Ebene E_m im n-dimensionalen Raum ist selber ein $(n-1)$-dimensionaler Raum. Wir haben also im Näherungsverfahren die Vorteile des Wegfalls einer Dimension, ohne eliminiert zu haben. Wenn also beispielsweise drei Gleichungen $G_1 G_2 G_3$ gegeben waren und wir haben von diesen die mittlere Gleichung G_m abgezogen, dann genügen im Verfahren der Kolumnenebenen schon zwei Strahlen, den Fernpunkt P_0 von 0 aus zu erreichen und das geschieht durch zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Gleichschenkelige Abschiebedreiecke
„System Skrbek".

Von k. k. Obergeometer Wenzel Šedivý in Tabor.

Zum obigen, in der Februar-Nummer dieser Zeitschrift publizierten Artikel sei mir gestattet, zum Zwecke der Ergänzung einige Worte beizufügen, denn gerade in meiner Evidenzhaltungskanzlei fand anläßlich einer vor vier Jahren seitens des Herrn Oberinspektors Alois Skrbek stattgefundenen Revision dieser Abschiebeapparat seinen Ursprung. Genannter Herr Oberinspektor hat damals sofort ein flüchtig entworfenes Modell aus Papier konstruiert, worauf die von der Firma Josef und Johann Frič, Meßinstrumentenfabrik in Prag, nach seiner Anleitung erzeugten Abschiebedreiecke seit jener Zeit nicht nur bei manchen Evidenzhaltungsbeamten, sondern auch in vielen ziviltechnischen Bureaus mit Beliebtheit und mit vollkommenem Erfolge zur Anwendung gelangen.

Bei der Konstruierung der Dreiecke ging man von dem Bestreben aus, den Evidenzhaltungsgeometern ein solches Instrumentchen zu schaffen, welches ihnen die Kartierung im Maßstabe 1 : 2880 hauptsächlich von Veränderungen bei kleineren Objekten, z. B. Häusern, diversen Zubauten, geringen Vorsprüngen etc., sowie der neu aufgenommenen Straßen präzise, ohne quälende Anstrengung des Auges, mit Beschleunigung und ohne Beschädigung der Mappe, die durch das Auftragen und Abstechen der Längen mit dem Zirkel unbedingt leidet, ermöglicht.

Um diese vorgeschilderten Begünstigungen zu sichern, wurde zur Wahl der gleichschenkeligen Dreiecke geschritten. Die verhältnismäßige Größe der Dreiecke