Neues Planimeter. System Goethe

Friedrich Goethe [1]

[1] *k. k. Obergeometer in Melk, N.-Ö.*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **8** (8), S. 269–275

1910

BibTEX:

```
@ARTICLE{Goethe_VGI_191035,
Title =  {Neues Planimeter. System Goethe},
Author =  {Goethe, Friedrich},
Journal =  {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages =  {269--275},
Number =  {8},
Year =  {1910},
Volume =  {8}
}
```

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{2\sin^2\frac{\sigma_1}{2}}(u-v) \\ y^2 &= r^2 - \frac{2}{\sin^2\sigma_1}u + \frac{2\cot g\,\sigma_1}{\sin\sigma_1}v \\ z^2 &= \frac{1}{2\cos^2\frac{\sigma_1}{2}}(u+v) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 42)$$

Die Quadrate der Punktkoordinaten der sphärischen C_4 sind wegen 41) durch quadratische Formen von v darstellbar.

Der Schnittwinkel der der Gleichung 41) genügenden Kurven U und V ist veränderlich. Man kann nun leicht eine neue sphärische Kurve ableiten, wenn man jeder U diejenige V als entsprechende zuweist, welche jene orthogonal schneidet.

Die Bedingung ist dann bekanntlich

$$\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 43)$$

Wegen 42) erhält man als den gesuchten Ort, in welchen sich eine U und eine V rechtwinklig schneiden, die sphärische C_4

$$\cos\sigma_1\, x^2 z^2 + \cos^4\frac{\sigma_1}{2}\, y^2 z^2 - \sin^4\frac{\sigma_1}{2}\, x^2 y^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 44)$$

Mit $\sigma_1 = 90^0$ werden aus 39) und 40) konzentrische Kreise, bezw. gleichseitige Hyperbeln. Die Gleichung 44) gibt wieder den Ort für den Orthogonalschnitt der entsprechenden sphärischen Kegelschnitte — die einen sind dann ebene Kurven, also Kreise. Der gesuchte Ort besteht dann aus zwei ebenen Schnitten mit der Kugel; die Ebenen gehen durch Y und schließen mit XY und YZ gleiche Winkel ein.

Neues Planimeter.

System Goethe.

Von **Friedrich Goethe**, k. k. Obergeometer in Melk, N.-Ö.

I.

Das Querprofilplanimeter für geneigtes Terrain.

Nach einem bekannten Lehrsatze findet man den Flächeninhalt eines Dreieckes, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Da nun bei einem bestimmten Böschungsverhältnisse der Winkel γ, den die Böschungslinie mit der vom Rande der Dammkrone (Sohle) gezogenen Lothrechten stets konstant bleibt, so hängt die Fläche dieses Böschungsdreieckes lediglich von der Länge der Böschungslinie b und der Lothrechten a ab.

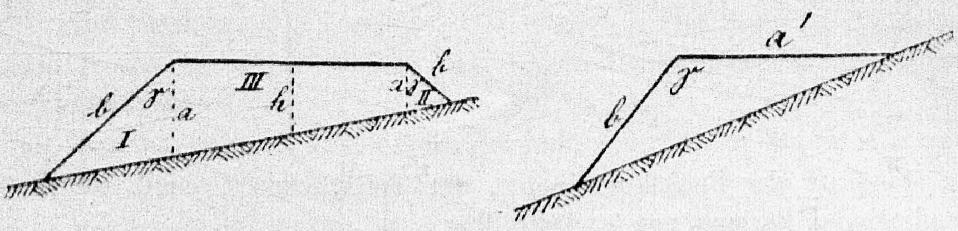

Fig. 1.

Dasselbe gilt für Anschnittsflächen, nur ist statt der Lothrechten a die Horinzontale a' zu nehmen.

Auf obiges basierend und unter der Annahme nur der gebräuchlichsten Böschungsverhältnisse 1 : 1, 1 : 1·25, 1 : 1·5 wurde der Querprofilplanimeter konstruiert, doch kann selbstverständlich für jeden Winkel γ die Länge a (Einheitsfläche) gerechnet und das Instrument sodann verwendet werden oder der Winkel γ eingestellt und die Fläche graphisch ohne Rechnung bestimmt werden, welches Verfahren unter dem Titel: »Planimeter für Dreiecke« später beschrieben ist.

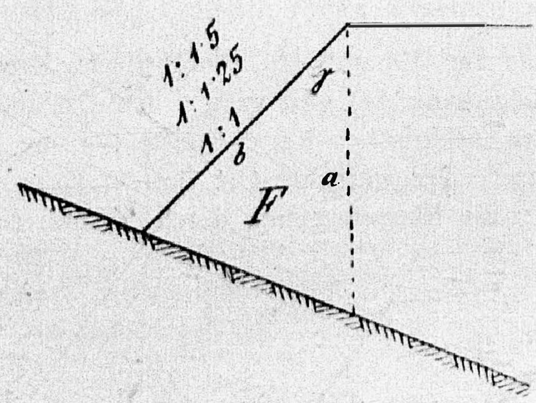

Fig. 2.

1 : 1.

$\gamma = 45^0$

$a = b = 1.$

$F = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma = 0{\cdot}35356 \ldots \ldots 1)$

1 : 1·25

$\gamma = 51^0\, 20'\, 24''$

$a = b = 1.$

$F = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma = 0{\cdot}39043 \ldots \ldots 2)$

$$1 : 1{\cdot}5$$
$$\gamma = 56^0\ 18'\ 30''$$
$$a = b = 1.$$
$$F = \tfrac{1}{2}\, ab \sin\gamma = 0{\cdot}41602 \ldots\ldots 3)$$

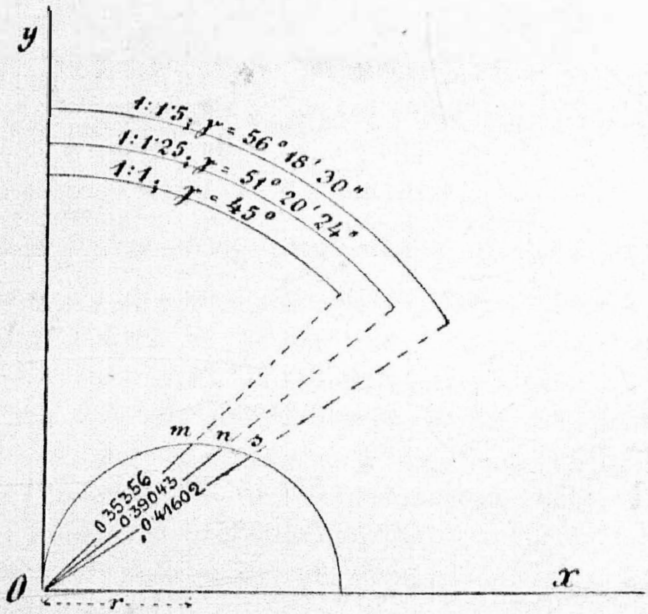

Fig. 3.

Trägt man die gefundenen Flächen . . 1) . . 2) . . 3) mit Berücksichtigung der entsprechenden Winkel von dem Anfangspunkte eines Koordinatensystems

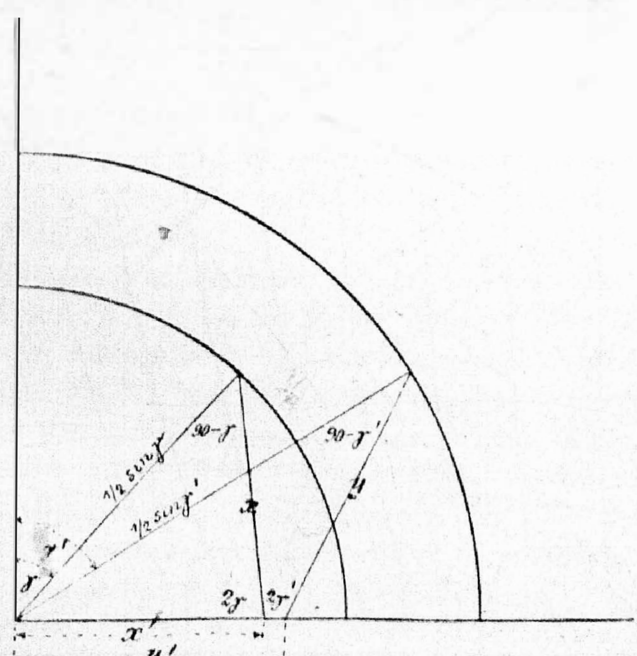

Fig. 4.

nach rechts auf, so bilden die Endpunkte dieser Flächenlängen m, n, s mit dem Anfangspunkte 0 des Achsensystems einen Kreis, dessen Radius r bestimmt ist aus

$$r^2 + r^2 = Om^2 = 0{\cdot}35356^2,$$

daher

$$r = 0{\cdot}25.$$

Beweis:

$$x : \tfrac{1}{2} \sin\gamma = \sin(90-\gamma) : \sin 2\gamma$$

$$x = \frac{\frac{1}{2}\sin\gamma\cos\gamma}{\sin 2\gamma} = \frac{\frac{1}{2}\sin\gamma\cos\gamma}{2\sin\gamma\cos\gamma} = \tfrac{1}{4}$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}\sin\gamma'\cos\gamma'}{\sin 2\gamma'} = \ldots\ldots = \tfrac{1}{4}$$

Der zum Winkel $\gamma = 45^0$ gehörige Bogen b ist bei $r = 0{\cdot}35356$ gleich $0{\cdot}2777$, desgleichen bei

$$\gamma = 51^0\ 20'\ 24''$$
$$b' = 0{\cdot}34986$$

und bei

$$\gamma = 56^0\ 18'\ 30''$$
$$b'' = 0{\cdot}40885.$$

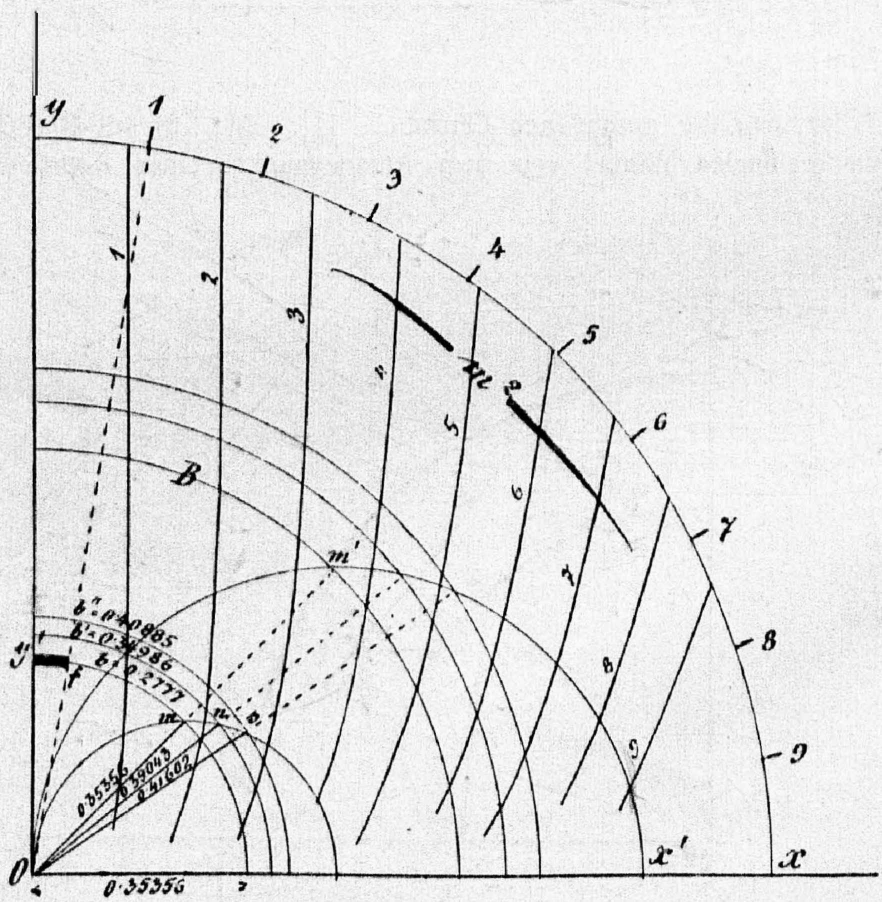

Fig. 5.

Im Weiteren sei hier nur das Böschungsverhältnis 1 : 1 mit $\gamma = 45^0$ erörtert, da für die anderen Winkel derselbe Vorgang anzuwenden ist.

B : b = $om' : om$; nachdem $om' = 2\,om$, ist B = 2 b u. s. w.

In der Linie om' ist das Produkt $a \sin \gamma$ ($\gamma = 45^0$) enthalten und entspricht jedem a eine entsprechende Bogenlänge b.

Bei einem Radius von 3·5356 ($\gamma = 45^0$) ist die zugehörige Länge des Viertelbogens:

$$\frac{2\,r\pi}{4} = \frac{r\pi}{2} = \tfrac{1}{2} \sin \gamma \frac{\pi}{2} = \tfrac{1}{4}\,\pi \sin \gamma = 5·553 = 2\,b = B.$$

Wenn nun die Länge des Viertelbogens als Fläche 3·5356 m^2 angenommen wird, so entspricht 1 m^2 einer Bogenlänge von $\frac{5·553}{3·5356} = 1·57080$ Teile der ursprünglich angenommenen Maßeinheit. Dasselbe Resultat, nämlich 1·57080 kommt beim gleichen Verfahren auch für die anderen 2 Fälle, respektive für alle $\sphericalangle \gamma$ heraus, daher beliebig $r \times 1·57080$ Länge des Viertelbogens.

Trägt man nun von der Linie oy oder ox ab- oder aufwärts auf beliebigen Viertelbögen mit dem Mittelpunkte O die Teile 1·57080 hintereinander auf, so bilden die Verbindungen der so gefundenen Punkte krumme Flächenlinien, deren jeder Punkt von den gewählten Achsen oy oder ox am Bogen gemessen gleich weit absteht und ergeben diese Linien fortlaufend von y oder x an numeriert die m^2.

Die Bogenlänge 1·57 in 10 Teile geteilt gibt uns $10 \times 0·1\ m^2$.

Wird nun der Viertelbogen xy (beliebiger Radius) in 10 Teile geteilt, überträgt man das auf der Linie Om' ($a \sin \gamma$) gefundene a (z. B. m) auf die Verbindungslinie des am Viertelkreise yx zu findenden b (z. B. 1) mit dem Kreismittelpunkte O, so fällt m auf f und zeigt uns die Länge $y'f$ direkt die Fläche in m^2 für die Formel

$$F = \tfrac{1}{2}\,a\,b \sin \gamma,$$

wobei a und $b = 1$ und $\gamma = 45^0$ angenommen ist.

Der Arbeitsvorgang ergibt sich daher wie folgt.

Es ist die Fläche eines 1 : 1 geböschten Dreieckes mit den Seitenlängen $a = 3$ und $b = 4$ zu bestimmen.

Man legt den Arm A an die Linie 1 : 1 (a) an, stellt den Schieber S auf 3 und dreht sodann den Arm A bis auf 4 (am Bogen). Der Schnitt des Indexes am Schieber mit den Flächenlinien gibt uns die gesuchte Fläche.

Hat man daher die Flächen von Querprofilen bei stetig geneigtem Terrain, also trapezoidischer Form zu bestimmen, so greift man am gezeichneten Querprofile die Längen a und a, b und b und h ab, bestimmt die Flächen von I und II nach vorstehender Art, die Kernfläche III mit Hilfe des Rechenschiebers für trapezförmige Querprofile[1]) (nur das Rechteck ohne Böschungsdreiecken) und ergibt uns die Summe dieser Daten die gesamte Fläche.

---

[1]) Wurde gleichfalls vom Verfasser konstruiert und wird der Artikel darüber demnächst veröffentlicht.

Um die Instrumente nicht oft zu wechseln, ist es angezeigt, zuerst alle Kernflächen, sodann die Böschungsdreiecke zu rechnen, ebenso hat man vor dem Flächenrechnen alle nötigen Daten am gezeichneten Profile einzutragen.

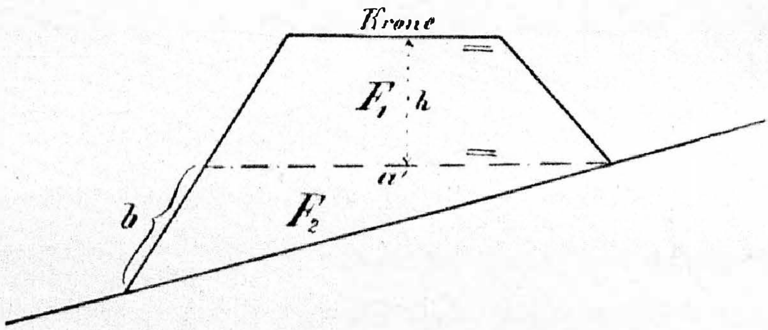

Fig. 6.

Eine andere Art der Flächenberechnung trapezoidischer Querprofile wäre die, daß man die Querschnittsfläche nach Figur 6 in **zwei** Teile zerlegt und F_1 mit dem vorher erwähnten Rechenschieber für trapezförmige Querprofile, F_2 dagegen mit dem Querprofilplanimeter für geneigtes Terrain abschiebt (siehe Anschnittsflächen), wodurch man nur 2 zu summierende Flächenansätze erhält.

Diese Art ist jedenfalls die raschere, da man am gezeichneten Querprofil nur h, a' und b abzugreifen braucht.

Anschnittflächen.

Der Vorgang zum Berechnen von Anschnittsflächen ist derselbe, nur ist a' statt a zu nehmen und entfällt die Abschiebung einer Kernfläche.

II.

Planimeter für Dreiecke.

Da die Länge der Sehne $O\,m$ (Flächeneinheit) für jeden beliebigen Winkel γ durch den mit dem Radius 0·25 gezogenem Kreisbogen $O\,m\,x'$ gegeben ist, kann man die vorstehende Methode durch Anlegen der Linie $O\,y$ an eine Dreiecksseite und des Armes A an die 2. Dreiecksseite anwenden, wobei die Größe des Winkels γ ziffernmäßig **nicht** bekannt zu sein braucht.

Sucht man am eingestellten Arme A auf der durch Kreise in 10 gleiche Teile geteilten Linie Om das a und dreht den Arm mit eingeschobenem a (Index am Schieber) auf b (Äußere Kreisteilung), so gibt der Schnitt des Indexes mit den Flächenlinien die gesuchte Fläche.

Vorausgesetzt ist jedoch hier, daß die Viertelbogenscheibe durchsichtig (aus Zelluloid) ist, um durch dieselbe die 2. Dreiecksseite wahrnehmen zu können.

III.

Entwurf eines Flächeninstrumentes.

Gerade so wie man am Papier bei bekannten Längen der Dreiecksseiten die Fläche direkt ermitteln kann, könnte dies auch am Felde geschehen!

Es müßte die $\frac{1}{4}$ Alhidade eines Tachymeters mit den Flächenlinien und die $\frac{1}{2}$ Alhidade mit den $\frac{1}{10}$ Kreisbögen, sowie der $\frac{1}{4}$ Limbus mit der $\frac{1}{10}$ Teilung versehen werden.

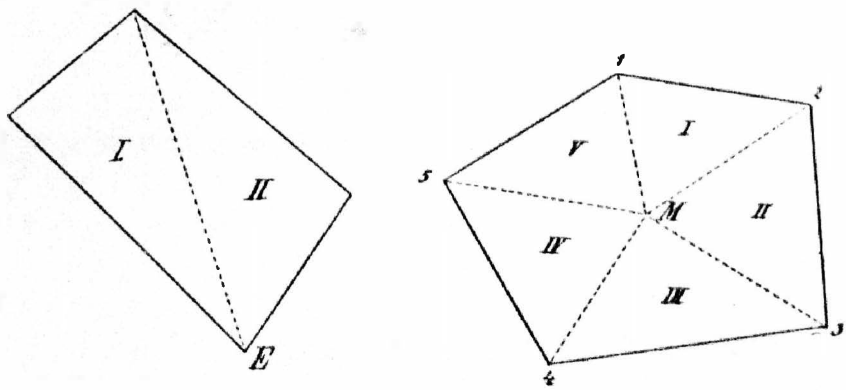

Fig. 7.

Zur Flächenaufnahme wird das Instrument beiläufig in die Mitte *M* (bei Rechtecken und Dreiecken etc. auf eine Ecke *E*) der aufzunehmenden Fläche gestellt, tachymetrisch die Längen M_1 M_2 bestimmt, M_2 am Bodenarm, der // mit der Rohraxe über der Alhidade liegt, eingeschoben, sodann dieser Arm auf die entsprechende Teilung am $\frac{1}{4}$ Limbus eingestellt.

Der Index am Bodenarm zeigt sodann die Fläche.

Mit welcher Genauigkeit vorstehend skiziertes Instrument arbeiten würde, müßte natürlich erst geprüft werden und könnte die Genauigkeit durch Anbringung von entsprechenden Nonien wesentlich vergrößert werden.

Jedenfalls wäre es angezeigt, dieses erste Projekt eines Flächenmeßinstrumentes einer genaueren wissenschaftlichen Ergründung und Prüfung zu unterziehen.

Ein Beitrag zur Vermarkungsfrage.

Von **Wilhelm Saller**, Geometer der k. k. Staatsbahnen.

Der Eisenbahngeometer erscheint an der so häufig aufgeworfenen Vermarkungsfrage in einem derart hohen Maße interessiert, daß es gewiß nicht unbegründet erscheinen wird, wenn diese Frage auch von seinem Standpunkte aus einer kleinen Erörterung unterzogen wird.

Hiezu ist es aber unerläßlich, jene gesetzlichen Bestimmungen bzw. Vorschriften kurz zu erwähnen, welche auf diesen Gegenstand Bezug haben, oder mit anderen Worten gesagt, welche bei Herstellung der Grundeinlösungspläne für Eisenbahnbauten von maßgebendem Einfluß sind, die Richtschnur hiefür bieten.