

Paper-ID: VGI\_191034



## Das Rückwärtseinschneiden auf der Sphäre

Adolf Klingatsch <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **8** (8), S. 259–269

1910

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Klingatsch_VGI_191034,  
Title = {Das Rückwärtseinschneiden auf der Sphäre},  
Author = {Klingatsch, Adolf},  
Journal = {{Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen},  
Pages = {259--269},  
Number = {8},  
Year = {1910},  
Volume = {8}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 8.

Wien, am 1. August 1910.

VIII. Jahrgang.

## Das Rückwärtseinschneiden auf der Sphäre.

Von Prof. A. Klingatsch in Graz.

### I.

Es wären  $P_1, P_2, P_3$  drei ihrer Lage nach gegebene Punkte auf einer Kugel (Fig. 1) und  $\sphericalangle P_1 P P_3 = \alpha_1$ ,  $\sphericalangle P_2 P P_3 = \alpha_2$  die beiden gegebenen Winkel, unter welchen die sphärischen Bögen  $P_1 P_3$  und  $P_2 P_3$  von dem zu bestimmenden Punkte  $P$  erscheinen. Die Ermittlung der Lage von  $P$  bildet dann das in der Überschrift bezeichnete Problem.

Diese Aufgabe behandelte ohne Rücksicht auf eine Anwendung derselben bereits 1846 Grunert.<sup>1)</sup> Dieselbe Lösung wendete 1850 Rümker in seinem Handbuch der Schiffahrtskunde zur Polhöhenbestimmung an. In neuester Zeit hat sich S. Günther<sup>2)</sup> mit dieser Punktbestimmung beschäftigt. Seine Lösung hat die direkte Ermittlung der Polhöhe eines der drei gegebenen Punkte zum Zwecke.

Die bisherigen Lösungen des Rückwärtseinschneidens auf der Kugel gründen sich, soweit uns bekannt, auf Transformationen trigonometrischer Ausdrücke, um dadurch schließlich die Gleichung vierten Grades für einen unbekanntem Winkel oder eine unbekanntem Seite des sphärischen Viereckes  $P P_1 P_2 P_3$  zu finden. Im nächsten Abschnitte wird eine mehr geometrische Lösung gegeben, welche dadurch eine gewisse Anschaulichkeit besitzt und eine relativ einfache rechnerische Behandlung ermöglicht.

Im Gegensatz zu der verwandten Aufgabe des Rückwärtseinschneidens im Raume findet jenes auf der Sphäre unseres Wissens noch keine Anwendung in der Photogrammetrie; eine solche ist aber ziemlich naheliegend, wie die folgenden Ausführungen zeigen.

Es wären  $p_1, p_2, p_3$  die Abbildungen der drei Raumpunkte  $P_1, P_2, P_3$  auf der photographischen Platte und  $\alpha_1, \alpha_2$  die mit einem Theodolit von demselben Stand-

<sup>1)</sup> Grunert: Das Pothenot'sche Problem auf der Kugel. Archiv d. Math. u. Physik. 7. Teil. 1846.

<sup>2)</sup> S. Günther: Das Pothenot'sche Problem auf der Kugeloberfläche. Sitzungsberichte der k. bayer. Akademie d. Wiss. 34. Band. 1904.

punkt  $P$  gemessenen Horizontalwinkel. Wird die innere Orientierung des photographischen Apparates, nämlich die Bilddistanz  $f$ , sowie die Lage des Hauptpunktes (Augpunktes)  $A$  auf der Platte als bekannt vorausgesetzt, so lassen sich nach bekannten Formeln auch leicht die Winkel herleiten, welche die durch das Objektiv  $O$  und die Punkte  $p_1 p_2 p_3$ , resp.  $P_1 P_2 P_3$  gehenden Strahlen miteinander einschließen. Diese Winkel bestimmen eben dann die Seiten  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  des sphärischen Dreieckes  $P_1 P_2 P_3$ , wenn man sich die Raumpunkte, also auch  $p_1 p_2 p_3$  aus  $O$  auf eine mit  $O$  konzentrische Kugel von beliebigem Halbmesser — etwa die Himmelskugel — projiziert denkt.

Das Rückwärtseinschneiden auf der Sphäre ist dann gleichbedeutend mit der Aufgabe, die Zenitdistanzen der drei abgebildeten Punkte  $P_1 P_2 P_3$  zu finden, wenn die beiden Horizontalwinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  gemessen vorliegen. Die Daten für die Aufstellung des photographischen Apparates kommen hier nicht in Betracht; dieses Instrument kann daher beliebig aufgestellt sein. Mit der Bestimmung von  $P$  ist aber die ganze Aufnahme an die Punkte  $P_1 P_2 P_3$ , man kann sie als Leitpunkte bezeichnen, angeschlossen. Dasselbe gilt auch von jeder folgenden aus demselben Standpunkte, jedoch bei anderer Aufstellung des Apparates bewirkten Aufnahme, sofern sich bei dieser zweiten Aufnahme die Abbildungen der früheren Punkte  $P_1 P_2 P_3$  wieder vorfinden.

Wir setzen, um dies klarzulegen, vorerst die Zenitdistanzen von zwei Punkten  $P_1 P_2$ , deren Bilder  $p_1 p_2$  gegeben sind, als bekannt, etwa direkt gemessen voraus. Damit ist die Lage von  $P$ , also jene des Zenitpunktes bekannt, da das sphärische Dreieck  $P_1 P_2 P$  durch seine drei Seiten bestimmt ist. Ist nun  $p_3$  die Abbildung eines dritten Punkte  $P_3$ , so ist durch die Aufnahme auch das sphärische Dreieck  $P_1 P_2 P_3$  gegeben; dadurch sind aber auch die Winkel zwischen den Vertikalebene durch  $P_3$  und  $P_1$  einerseits und durch  $P_3$  und  $P_2$  andererseits bekannt. Ebenso läßt sich damit der Abstand des Punktes  $P_3$  von  $P$ , also die Zenitdistanz von  $P_3$  ableiten. Das Vorstehende gilt aber dann für jeden weiteren abgebildeten Punkt  $P_i$ ; so daß sich für diesen sowohl die Zenitdistanz als auch dessen Azimutunterschied gegenüber  $P_1$  oder  $P_2$  finden läßt. Bedeutet nun  $p_i$  die Abbildung eines Gestirns  $P_i$ , so liefert die photographische Aufnahme dessen Zenitdistanz und damit das Azimut des Gestirns zur Zeit der Aufnahme; durch den bekannten Azimutunterschied zwischen  $P_1$  und  $P_2$ , bzw.  $P_3$  ist aber dann auch das Azimut jedes dieser beiden sogenannten Leitpunkte bestimmt.

Damit ist auch der Weg angedeutet, eine Meridianbestimmung auf photographischem Wege ohne Kenntnis der Aufstellungsdaten des hierzu verwendeten Instrumentes durchzuführen. Dieses letztere Problem wurde vom Verfasser bereits an anderer Stelle) behandelt. Auf dieses läßt sich daher auch das Rückwärtseinschneiden auf der Sphäre in unserer Anwendung zurückführen, indem durch die Lage des Zenitpunktes die Zenitdistanzen von zwei abgebildeten Punkten gegeben sind.

Wir gehen nunmehr zur Lösung unserer Aufgabe über.

<sup>1)</sup> Ein Zweihöhenproblem in der Photogrammetrie. Sitzungsberichte der kais. Akad. d. Wiss. Bd. CXVIII. Abt. II a. 1909.

II.

Der Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems  $XYZ$  wird in den Hauptpunkt  $O$  des Objektivs verlegt, wobei die  $Z$  durch  $P_3$  gehen soll. Die Spuren  $e_1, e, e_2$  der durch  $Z$  und  $P_1, P, P_2$  gehenden Ebenen auf  $XY$  bilden mit  $X$  die Winkel  $\gamma_1, \gamma, \gamma_2$ .

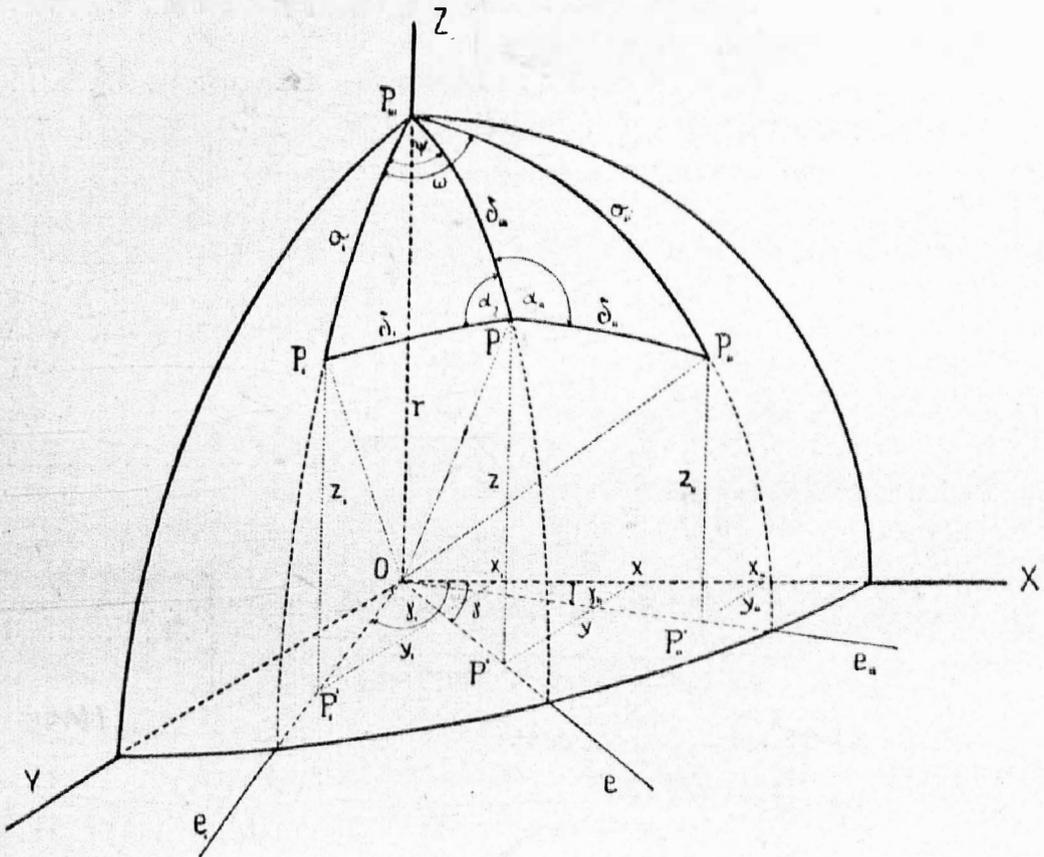


Fig. 1.

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} P_1 P_3 = \sigma_1, \quad P_2 P_3 = \sigma_2, \quad \sphericalangle P_2 P_3 P_1 = \omega_1, \quad \sphericalangle P P_3 P_1 = \psi \\ P_1 P = \delta_1, \quad P_2 P = \delta_2, \quad P_3 P = \delta_3, \end{aligned} \right\} \dots 1)$$

so ist mit Rücksicht auf das gewählte Achsensystem

$$\gamma_1 - \gamma = \psi, \quad \omega - \psi = \gamma - \gamma_2 \dots \dots \dots 2)$$

Sind also  $\sigma_1, \sigma_2, \omega, \alpha_1, \alpha_2$  durch die Aufnahme, bezw. durch die unmittelbare Messung gegeben und wird  $\gamma_1$  beliebig angenommen, so ist die ganze Figur in ihrer Lage gegenüber  $XYZ$  bestimmt und es könnten daher auch die Koordinaten der drei Punkte  $P_1, P_2, P_3$  berechnet werden.

Es wären nun  $x_1, y_1, z_1$ , dann  $x_2, y_2, z_2$  die als bekannt anzusehenden Koordinaten von  $P_1$ , bzw.  $P_2$ , endlich  $x, y, z$  die zu bestimmenden Koordinaten von  $P$ . Der Punkt  $P$  ergibt sich im Schnitt von zwei sphärischen Kurven; die eine gibt den geometrischen Ort aller Punkte  $P$ , für welche der Winkel  $P_1 P P_3 = \alpha_1$  konstant ist, während die zweite sich analog auf  $P_2 P_3$  und  $\alpha_2$  bezieht. Diese beiden nunmehr zu suchenden Kurven entsprechen den beiden Kreisen beim Rückwärts-einschneiden in der Ebene.

Aus dem Dreiecke  $P_1 P P_3$  folgt:

$$\sin \delta_1 = \frac{\sin \psi}{\sin \alpha_1} \sin \sigma_1 \dots \dots \dots 3)$$

$$\cos \delta_1 = \cos \sigma_1 \cos \delta_3 + \sin \sigma_1 \sin \delta_3 \cos \psi \dots \dots \dots 4)$$

Wegen

$$\cos \sigma_1 = \cos \delta_1 \cos \delta_3 + \sin \delta_1 \sin \delta_3 \cos \alpha_1 \dots \dots \dots 5)$$

ist mit Rücksicht auf 3) und 4)

$$\sin \delta_3 = \operatorname{tg} \sigma_1 (\cos \delta_3 \cos \psi + \sin \psi \operatorname{ctg} \alpha_1) \dots \dots \dots 6)$$

Ebenso ergibt sich aus dem Dreiecke  $P_2 P P_3$

$$\sin \delta_3 = \operatorname{tg} \sigma_2 (\cos \delta_3 \cos (\omega - \psi) + \sin (\omega - \psi) \operatorname{ctg} \alpha_2) \dots \dots \dots 7)$$

Ferner folgt

$$\sin \gamma = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \dots \dots \dots 8)$$

$$\sin \delta_3 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}, \quad \cos \delta_3 = \frac{z}{r} \dots \dots \dots 9)$$

wo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \dots \dots \dots 10)$$

der Halbmesser der Kugel ist.

Ebenso ist

$$\left. \begin{aligned} \sin \gamma_1 &= \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, & \cos \gamma_1 &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \\ \sin \gamma_2 &= \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, & \cos \gamma_2 &= \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 11)$$

Mit Rücksicht auf 2) wird daher

$$\sin \psi = \frac{y_1 x - x_1 y}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x^2 + y^2)}}, \quad \cos \psi = \frac{x_1 x + y_1 y}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x^2 + y^2)}} \dots \dots 12)$$

$$\sin (\omega - \psi) = \frac{x_2 y - y_2 x}{\sqrt{(x_2^2 + y_2^2)(x^2 + y^2)}}, \quad \cos (\omega - \psi) = \frac{x_2 x + y_2 y}{\sqrt{(x_2^2 + y_2^2)(x^2 + y^2)}} \dots \dots 13)$$

Wegen

$$\operatorname{tg} \sigma_1 = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{z_1}, \quad \operatorname{tg} \sigma_2 = \frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{z_2} \dots \dots \dots 14)$$

folgen aus 6) und 7) mit den Werten von 9), 12), 13) und 14) die beiden Gleichungen

$$z_1 (x^2 + y^2) = (x_1 x + y_1 y) z + r \operatorname{ctg} \alpha_1 (y_1 x - x_1 y) \dots \dots \dots 15)$$

$$z_2 (x^2 + y^2) = (x_2 x + y_2 y) z + r \operatorname{ctg} \alpha_2 (x_2 y - y_2 x); \dots \dots \dots 16)$$

welche mit 10) die gesuchten Lösungen, nämlich die Koordinaten  $x, y, z$  von  $P$  geben.

Werden 15) und 16) quadriert, so folgen bei Beachtung von 10) die Gleichungen

$$[z_1 (x^2 + y^2) - (x_1 x + y_1 y) z]^2 = (x^2 + y^2 + z^2) (y_1 x - x_1 y)^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_1 \dots 17)$$

$$[z_2 (x^2 + y^2) - (x_2 x + y_2 y) z]^2 = (x^2 + y^2 + z^2) (x_2 y - y_2 x)^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_2 \dots 18)$$

Dabei ist 17) in Verbindung mit 10) diejenige auf der Kugel liegende, also sphärische Kurve, welche den geometrischen Ort aller Punkte  $P$  vorstellt,

von welchen aus der sphärische Abstand  $P_1 P_2 = \sigma_1$  unter dem gegebenen Winkel  $\alpha_1$  erscheint, während für 18) in Verbindung mit 10) dasselbe für  $\sigma_2$  und  $\alpha_2$  gilt.

Nennt man  $\xi \eta \zeta$  die Koordinaten der Mantelfläche jenes Kegels, dessen Spitze sich in  $O$  befindet und dessen Leitlinie 17), resp. 18) ist, so hat man wegen

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta}{z}, \dots \dots \dots 19)$$

$$x = \frac{r \xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}, y = \frac{r \eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}, z = \frac{r \zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}, \dots 20)$$

Werden die Werte 20) in 17) oder 18) eingesetzt, so erhält man dieselben Gleichungen, wie wenn in 17), resp. 18)  $x, y, z$  unmittelbar durch  $\xi, \eta, \zeta$  ersetzt werden. Die beiden projizierenden Kegel sind daher vom vierten Grade, folglich haben auch die sphärischen Kurven 17) und 18) denselben Grad, wenn, wie üblich, der Grad einer sphärischen Kurve nach jenem des Kegels, der diese Kurve aus dem Mittelpunkte der zugehörigen Kugel auf diese projiziert, bemessen wird.

Aus 15) und 16) ist unmittelbar zu entnehmen, daß die eine Kurve durch  $P_3$  und  $P_1$ , die andere durch  $P_3$  und  $P_2$  geht.

Wäre  $\alpha_1$  oder  $\alpha_2$  ein rechter Winkel, so wird der betreffende projizierende Kegel ein solcher vom zweiten Grade; die bezügliche Kurve ist dann ein sphärischer Kegelschnitt.

Für die weitere Auflösung bestimmen wir aus 15) und 16)

$$z = \frac{\{s_1 \cotg \alpha_2 (x_2 y - y_2 x) - s_2 \cotg \alpha_1 (y_1 x - x_1 y)\} (x^2 + y^2)}{(x_1 x + y_1 y)(x_2 y - y_2 x) \cotg \alpha_2 - (x_2 x + y_2 y)(y_1 x - x_1 y) \cotg \alpha_1} \dots 21)$$

Wir diesen Wert in 17) eingesetzt, so folgt

$$(x^2 + y^2) \left[ \{s_2 (x_1 x + y_1 y) - s_1 (x_2 x + y_2 y)\}^2 - \{s_1 (x_2 y - y_2 x) \cotg \alpha_2 - s_2 (y_1 x - x_1 y) \cotg \alpha_1\}^2 \right] = \dots 22)$$

Bisher wurde der Winkel  $\gamma_1$ , den die durch  $Z$  und  $P_1$  gehende Ebene mit  $XZ$  bildet, beliebig angenommen. Zur weiteren Vereinfachung setzen wir unbeschadet der Allgemeinheit  $\gamma_1 = \vartheta$  und somit  $\gamma_1 = \vartheta$ .

Mit den Bezeichnungen

$$\frac{y}{x} = u, \frac{z}{x} = v, \frac{s_1}{x_1} = v_1, \frac{y_2}{x_2} = u_2, \frac{s_2}{x_2} = v_2 \dots \dots \dots 23)$$

wird aus 22)

$$(1 + u^2) \{ (v_2 - v_1 (1 + u_2 u))^2 - (v_1 \cotg \alpha_2 (u - u_2) + v_2 \cotg \alpha_1 u)^2 \} - \dots 24)$$

Mit dem aus dieser Gleichung folgenden Werte  $u$  findet man mit den Bezeichnungen 23) die Unbekannte  $v$  aus 21) nämlich

$$v = \frac{[v_1 \cotg \alpha_2 (u - u_2) + v_2 \cotg \alpha_1 u] (1 + u^2)}{(u - u_2) \cotg \alpha_2 + u (1 + u_2 u) \cotg \alpha_1} \dots \dots \dots 25)$$

Die Punktkoordinaten selbst werden dann wegen 10) aus

$$x = \pm \frac{r}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}, y = \pm \frac{ru}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}, z = \pm \frac{rv}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} \dots 26)$$

erhalten.

Mit den vier Werten von  $u$  aus 24) folgen ebensoviele  $v$  aus 25). Da ferner, wie leicht einzusehen, in 26) entweder die oberen oder die unteren Zeichen gelten, so enthält 26) die acht Lösungen. Von diesen haben nur vier Bedeutung, da die unteren Zeichen von  $x, y, z$  sich auf einen Punkt  $P$ , resp. ein Dreieck  $P_1 P_2 P_3$  beziehen, welches dem gegebenen, bzw. dem aus diesem zu findenden Punkt diametral gegenüberliegt. Damit wäre die analytische Lösung gegeben.

Nun handelt es sich aber nicht um die Punktkoordinaten, sondern um die Zenitdistanzen  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ .

Wegen  $\gamma_1 = 0$ , wird aus 2)

$$\gamma = -\psi, \quad \gamma_2 = -\omega \dots \dots \dots 27)$$

Die Verbindung von 11) und 14) liefert daher

$$v_1 = \frac{z_1}{x_1} = \cotg \sigma_1, \quad u_2 = \frac{y_2}{x_2} = -\tg \omega, \quad v_2 = \frac{z_2}{x_2} = \frac{\cotg \sigma_2}{\cos \omega}, \dots \dots 28)$$

während sich aus Fig. 1) unmittelbar

$$\tg \delta_3 = \frac{\sqrt{1+u^2}}{v} \dots \dots \dots 29)$$

ergibt.

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} m &= -u_2 \cotg \alpha_2, & n &= \cotg \alpha_1 + \cotg \alpha_2, & p &= u_2 \cotg \alpha_1 \\ m' &= -v_1 u_2 \cotg \alpha_2, & n' &= v_1 \cotg \alpha_2 + v_1 \cotg \alpha_1 \\ m'' &= v_2 - v_1, & n'' &= -v_1 u_2, \end{aligned} \right\} \dots 30)$$

so nimmt 24) die Form an

$$(1+u^2) [(m'' + n'' u)^2 - (m' + n' u)^2] - [m + n u + p u^2]^2 = 0 \dots 31)$$

Der Gang der Auflösung ist nun folgender:

Mit den gegebenen Werten  $\sigma_1, \sigma_2, \omega, \alpha_1, \alpha_2$  rechnet man aus 28) die Größen  $v_1, u_2, v_2$ , sodann aus 30) die Hilfsgrößen  $m, n, p, m', n', m'', n''$ . Die Auflösung von 31) gibt  $u$  und damit wegen 8) und 27) auch

$$\tg \psi = -u \dots \dots \dots 32)$$

In der Regel wird schon aus den der Aufgabe zugrunde liegenden örtlichen Verhältnissen ein Näherungswert von  $\psi$  und damit ein solcher von  $u$  folgen, so daß die in Betracht kommende Wurzel von 31) durch näherungsweise Auflösung dieser Gleichung erhalten werden kann.

Mit  $\psi$  und  $\omega - \psi$  findet man nach dem Sinussatze aus den Dreiecken  $P_1 P P_2$  und  $P_2 P P_3$  zunächst  $\delta_1$  und  $\delta_2$  und daraus  $\delta_3$ .

Die unmittelbare Berechnung von  $\delta_3$  — und dieser Weg ist der bessere — geschieht so, daß mit dem aus 31) folgenden Werte  $u$  aus 25)  $v$  bestimmt und dadurch aus 29)  $\delta_3$  erhalten wird. Damit ergeben sich auch  $\delta_1$  und  $\delta_2$ .

Finsterwalder<sup>1)</sup> hat durch kinematische Betrachtungen den sogenannten gefährlichen Ort beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel untersucht. Er fand hietür eine durch die Ecken des sphärischen Dreieckes und seines Polardreieckes gehende Kurve, die von einem Kegel dritter Ordnung mit der Spitze im Kugelmittelpunkt ausgeschnitten wird.

<sup>1)</sup> Finsterwalder: Der gefährliche Ort beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel. Sitzungsberichte der k. bayer. Akad. d. Wiss. 35. Band. 1905.

III.

Wir geben in diesem Abschnitte ein Beispiel, welches sich auf eine durchgeführte Aufnahme bezieht. Von einem Punkte der Plattform des Observatoriums der technischen Hochschule wurde mit unserem Phototheodolit, welcher nur für Aufnahmen bei vertikaler Bildebene eingerichtet ist (ältere Konstruktion von Pollack), bei geneigter Lage des Instrumentes eine Aufnahme gemacht. Später wurden mit einem Mikroskoptheodolit von demselben Standpunkte unter Einhaltung derselben Instrumentenhöhe die Richtungen nach drei abgebildeten Punkten bestimmt, wodurch sich  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ergaben.

Die Bildweite  $f$ , sowie die Lage des Hauptpunktes  $A$  der Platte waren aus früheren Bestimmungen bekannt. Die Ausmessungen auf dem Glasnegativ erfolgten mit Benützung eines Retouchierapparates mit einem Noniusmaßstabe von 0.02 mm Angabe, wobei zur Verschärfung der Messungen wiederholte Einstellungen gemacht wurden.

Nennt man  $p_1 p_2 p_3$  die Abbildungen von  $P_1 P_2 P_3$ , so waren sowohl die Abstände der ersteren von dem Hauptpunkt  $A$ , als auch die gegenseitigen Abstände dieser drei benützten Abbildungen zu messen, um die fraglichen Winkel  $\sigma$ , also die Seiten des sphärischen Dreieckes  $P_1 P_2 P_3$  herzuleiten.

Bezeichnet man beispielsweise für die Punkte  $p_1$  und  $p_3$ :

$$\overline{Ap_1} = r_1, \overline{Ap_3} = r_3, \overline{p_1 p_3} = s_1,$$

endlich, wenn  $O$  das Objektiv bedeutet,

$$\overline{Op_1} = \varrho_1, \overline{Op_3} = \varrho_3,$$

so ist

$$\varrho_1 = \sqrt{r_1^2 + f^2}, \varrho_3 = \sqrt{r_3^2 + f^2}.$$

In dem Dreiecke  $p_1 O p_3$  sind daher die drei Seiten  $\varrho_1 s_1 \varrho_3$  bekannt, der fragliche der Seite  $s_1$  gegenüberliegende Winkel  $\sigma_1$  folgt demnach aus

$$\left. \begin{aligned} \text{tang } \frac{\sigma_1}{2} &= \sqrt{\frac{(s - \varrho_1)(s - \varrho_3)}{s(s - s_1)}} \\ s &= \frac{s_1 + \varrho_1 + \varrho_3}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 33)$$

wo

ist.

Sind nun ebenso  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  mit Benützung von  $r_2 r_3 s_2$ , resp.  $r_1 r_2 s_3$  gefunden, so erhält man in dem sphärischen Dreieck  $P_1 P_2 P_3$ , in welchem die drei Seiten  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  bekannt sind, den der Seite  $\sigma_3$  gegenüberliegenden Winkel  $\omega$  aus

$$\left. \begin{aligned} \text{cotg } \frac{\omega}{2} &= \frac{\sin(s - \sigma_3)}{k}, \\ k &= \sqrt{\frac{\sin(s - \sigma_1) \sin(s - \sigma_2) \sin(s - \sigma_3)}{\sin s}} \\ s &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 34)$$

wo

und

ist.

Damit sind die Grundlagen für die weitere Rechnung gegeben.

Die in Millimetern gegebenen Ausmessungsdaten waren:

$$r_1 = 42.97, r_2 = 66.62, r_3 = 22.90$$

$$s_1 = 42.94, s_2 = 53.38, s_3 = 95.94.$$

Mit  $f = 184.1 \text{ mm}$  folgt aus der für alle drei Punkte entsprechend angewendeten Gleichung 33), wenn ganze Sekunden lediglich die Bedeutung von Rechnungsgrößen besitzen,

$$\sigma_1 = 13^\circ 7' 17'', \sigma_2 = 15^\circ 47' 54'', \sigma_3 = 28^\circ 48' 15''.$$

Die unmittelbare Anwendung von 34) gilt für den Winkel bei  $P_3$ :  $169^\circ 48' 56''$ . Da bei dieser Aufnahme der Punkt  $P_3$  und der zu bestimmende Zenitpunkt  $P$  auf derselben Seite von  $P_1 P_2$  liegen und zwar so, daß der ausspringende Winkel  $P$  zugekehrt ist, so wird

$$\sphericalangle P_1 P_3 P_2 = \omega = 360 - 169^\circ 48' 56'' = 190^\circ 11' 4''.$$

Die Messung der beiden Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ergab

$$\alpha_1 = 12^\circ 56' 38'', \alpha_2 = 15^\circ 48' 12''.$$

Damit sind die Größen in 28) und 30) bestimmt. Die Auflösung von 31) gibt wegen 32)

$$u = \tan \gamma = 6.066004 = -\tan \psi.$$

Es entsprechen dieser Gleichung demnach die beiden Winkel

$$\gamma = 80^\circ 38' 20'' \text{ und } \gamma = 260^\circ 38' 20''.$$

Es ist daher entweder

$$\psi = 360 - \gamma = 279^\circ 21' 40'' \text{ oder } \psi = 360 - \gamma = 99^\circ 21' 40''.$$

Hier kommt nur der letzte Wert in Betracht. Die Auswertung von 25) gibt mit dem obigen Werte von  $u$

$$v = -0.20502.$$

Da  $P$  wegen des beizubehaltenden Wertes von  $\psi$  eine negative Abszisse  $x$  und wegen des negativen Vorzeichens von  $v$  demgemäß ein positives  $z$  besitzt, so folgt aus 29)  $\delta_3 = 88^\circ 5' 24''$ .

Mit  $\sigma_1, \delta_3, \psi$  erhält man dann  $\delta_1$ ; mit  $\sigma_2, \delta_3, (\omega - \psi)$  folgt  $\delta_2$  nach dem Cosinussatze. Es wird

$$\delta_1 = 90^\circ 15' 17'', \delta_2 = 88^\circ 23' 20''.$$

Die drei berechneten Zenitdistanzen  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  stimmen hier mit den Ergebnissen der direkten Messung innerhalb einer Minute überein.

#### IV.

Wir haben in II den geometrischen Ort aller Punkte  $P$ , von welchem aus  $\sigma_1$  unter dem vorgegebenen Winkel  $\alpha_1$  erscheint, als eine durch  $P_1 P_2$  gehende sphärische Kurve vierter Ordnung gefunden. Es soll nun noch eine Erzeugungsart dieser Kurve gegeben werden. Zu diesem Zwecke wird deren Gleichung bezüglich eines Koordinatensystems aufgestellt, dessen  $XZ$  durch die Ebene  $OP_1 P_2$  (Fig. 2) bestimmt ist, wobei die  $Z$  durch den Halbierungspunkt des sphärischen Bogens  $P_1 P_2$  hindurchgehen soll.



Die durch 37) und 38) gegebene ebene Kurve, wobei  $\lambda$  einen Parameter bedeutet, entsteht daher im Schnitt zweier Scharen von Kegelschnitten, wobei die eine Schar aus Ellipsen, die andere aus Hyperbeln besteht. Die Ellipsen und die Hyperbeln sind konzentrisch und homothetisch. Jedem Werte  $\lambda$  entspricht nach 37) eine Hyperbel und nach 38) eine Ellipse. Die Schnitte dieser beiden demselben Werte von  $\lambda$  entsprechenden Kegelschnitte bestimmen vier Punkte der Projektion unserer sphärischen Kurve auf die  $YZ$ .

Wir nehmen nunmehr im Sinne der neueren Flächentheorie 37) und 38) als Parameterlinien  $u, v$ ; setzen also

$$\cos^2 \frac{\sigma_1}{2} z^2 + \sin^2 \frac{\sigma_1}{2} x^2 = u \dots\dots\dots 39)$$

$$\cos^2 \frac{\sigma_1}{2} z^2 - \sin^2 \frac{\sigma_1}{2} x^2 = v, \dots\dots\dots 40)$$

wobei die Größen  $u$  und  $v$  mit den in II und III ebenso bezeichneten Koordinatenverhältnissen natürlich nichts zu tun haben.

Die Kurven  $V(u = \text{konstant})$  sind daher die Schnitte einer Schar elliptischer Zylinder mit der Kugel. Die Leitlinien dieser Zylinder sind die in  $XZ$  konzentrischen ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen.

Die Kurven  $U(v = \text{konstant})$  sind die Schnitte einer Schar hyperbolischer Zylinder mit der Kugel. Die Leitlinien sind die in  $\lambda Z$  konzentrischen ähnlichen und ähnlich gelegenen Hyperbeln.

Die Achsen der beiden Zylinderscharen fallen mit  $Y$  zusammen. Die Kurven  $V$  und  $U$  sind sphärische Kegelschnitte, denn dieselben werden mit Beachtung von 19) und 20) von 0 durch die beiden Kegelflächen zweiten Grades

$$\begin{aligned} \left(u - r^2 \sin^2 \frac{\sigma_1}{2}\right) \xi^2 + u \eta^2 + \left(u - r^2 \cos^2 \frac{\sigma_1}{2}\right) \zeta^2 &= 0 \\ \left(v + r^2 \sin^2 \frac{\sigma_1}{2}\right) \xi^2 + v \eta^2 + \left(v - r^2 \cos^2 \frac{\sigma_1}{2}\right) \zeta^2 &= 0 \end{aligned}$$

auf die Kugel projiziert.

Mit den Parametern  $u$  und  $v$  läßt sich 36) in der Form

$$u = \frac{r^2 (\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \sigma_1)}{2 \cos^2 \alpha_1} + \frac{\cos \sigma_1}{\cos^2 \alpha_1} v - \frac{\tan^2 \alpha_1}{2 r^2} v^2 \dots\dots\dots 41)$$

geben. Die sphärischen Kurven vierten Grades als Ort konstanten Winkels  $P_1 P P_2 = \alpha_1$  ergeben sich daher im Schnitt zweier Scharen  $UV$  sphärischer Kegelschnitte, wenn jeder  $U$  die durch 41) bestimmte  $V$  als entsprechende zugewiesen wird.

Mit  $\alpha_1 = 90^\circ$  reduziert sich übereinstimmend mit dem in II erhaltenen Ergebnisse die sphärische  $C_4$  auf zwei zusammenfallende sphärische Kegelschnitte mit der Gleichung

$$v = r^2 \cos^2 \sigma_1.$$

Aus 39) und 40) folgt wegen

$$y^2 = r^2 - x^2 - z^2$$

auch die Darstellung der Koordinaten der Kugelfläche in Parameterform mit

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\sigma_1}{2}} (u - v) \\ y^2 &= r^2 - \frac{2}{\sin^2 \sigma_1} u + \frac{2 \cotg \sigma_1}{\sin \sigma_1} v \\ z^2 &= \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\sigma_1}{2}} (u + v) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 42)$$

Die Quadrate der Punktkoordinaten der sphärischen  $C_1$  sind wegen 41) durch quadratische Formen von  $v$  darstellbar.

Der Schnittwinkel der der Gleichung 41) genügenden Kurven  $U$  und  $V$  ist veränderlich. Man kann nun leicht eine neue sphärische Kurve ableiten, wenn man jeder  $U$  diejenige  $V$  als entsprechende zuweist, welche jene orthogonal schneidet.

Die Bedingung ist dann bekanntlich

$$\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \dots\dots\dots 43)$$

Wegen 42) erhält man als den gesuchten Ort, in welchen sich eine  $U$  und eine  $V$  rechtwinklig schneiden, die sphärische  $C_1$

$$\cos \sigma_1 x^2 z^2 + \cos^4 \frac{\sigma_1}{2} r^2 z^2 - \sin^4 \frac{\sigma_1}{2} x^2 y^2 = 0 \dots\dots\dots 44)$$

Mit  $\sigma_1 = 90^\circ$  werden aus 39) und 40) konzentrische Kreise, bezw. gleichseitige Hyperbeln. Die Gleichung 44) gibt wieder den Ort für den Orthogonalschnitt der entsprechenden sphärischen Kegelschnitte — die einen sind dann ebene Kurven, also Kreise. Der gesuchte Ort besteht dann aus zwei ebenen Schnitten mit der Kugel; die Ebenen gehen durch  $Y$  und schließen mit  $XY$  und  $YZ$  gleiche Winkel ein.

## Neues Planimeter.

System Goethe.

Von **Friedrich Goethe**, k. k. Obergerometer in Melk, N.-Ö.

### I.

#### Das Querprofilplanimeter für geneigtes Terrain.

Nach einem bekannten Lehrsatz findet man den Flächeninhalt eines Dreiecks, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Da nun bei einem bestimmten Böschungsverhältnisse der Winkel  $\gamma$ , den die Böschungslinie mit der vom Rande der Dammkrone (Sohle) gezogenen Loth-