Beitrag zur graphischen Konstruktion des arithmetischen Mittels und der mittleren Fehler.

Alois Tichy [1]

[1] *Professor an der landwirtschaftlichen Landesmittelschule in Prerau*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **8** (6), S. 191–197

1910

BibTEX:

```
@ARTICLE{Tichy_VGI_191023,
Title = {Beitrag zur graphischen Konstruktion des arithmetischen Mittels und
   der mittleren Fehler.},
Author = {Tichy, Alois},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {191--197},
Number = {6},
Year = {1910},
Volume = {8}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 6. **Wien, am 1. Juni 1910.** **VIII. Jahrgang.**

Beitrag zur graphischen Konstruktion des arithmetischen Mittels und der mittleren Fehler.

Von **Dr. techn Al. Tichý**, Professor an der landwirtschaftlichen Landesmittelschule in Prerau.

Die bekannte Formel $M = \frac{[o]}{n}$ läßt sich auch schreiben

$$n \cdot M = 1 \cdot o_1 + 1 \cdot o_2 + \ldots + 1 \cdot o_n.$$

Denken wir uns n Parallelkräfte von der Größe Eins, welche in Entfernungen $o_1, o_2, \ldots o_n$ von einem Punkte eines horizontalen Stabes wirken, so bedeutet die rechte Seite der Gleichung die Summe der statischen Momente jener Kräfte in Beziehung auf den genannten Punkt, die linke Seite das statische Moment der Resultante $n = [1]$, welche in der Entfernung M von demselben Punkt wirkt.

Im allgemeinen arithmetischen Mittel $M = \frac{[po]}{[p]}$ werden die Gewichte p_1, $p_2 \ldots p_n$ als einzelne Kräfte, $[p]$ als ihre Resultante angenommen.

Damit ist die bekannte Konstruktion des arithmetischen Mittels gegeben.

2. Den mittleren Fehler $m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$ kann man in folgender Form ausdrücken:

$$m = \frac{\sqrt{1 \cdot v_1^2 + 1 \cdot v_2^2 + \ldots + 1 \cdot v_n^2}}{\sqrt{n-1}}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen im Zähler stellt die Summe der Trägheitsmomente der Flächen von der Größe Eins in Beziehung auf eine Achse dar, welche im Schwerpunkte jener als ein Ganzes aufgefaßten Flächen gedacht wird.

Bei ungleicher Genauigkeit denken wir uns die Gewichte als Flächenelemente.

Wird die graphische Konstruktion des arithmetischen Mittels unter den erwähnten Verhältnissen durchgeführt, so ist in derselben Figur teilweise auch das Quadrat des Zählers, nähmlich $[vv]$, bezw. $[pvv]$ enthalten.

3. Bevor wir zur direkten Benützung der angedeuteten Analogien kommen, wollen wir das Wesentlichste über das Trägheitsmoment und dessen graphische Bestimmung für beliebig umgrenzte Figuren kurz erwähnen.

Das Trägheitsmoment des Flächenelementes dF (Fig. 1) in Beziehung auf die Achse X ist das Produkt der Größe des Flächenelementes dF und des Quadrates seiner Entfernung z von der genannten Achse; also $dF . z^2$. Das Trägheitsmoment der ganzen Fläche F in Beziehung auf dieselbe Achse X ist daher:

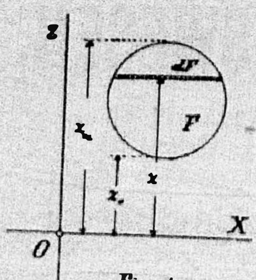


Fig. 1

$$I_x = \int_{z_0}^{z_n} z^2 . dF.$$

Die graphische Bestimmung des Trägheitsmomentes für beliebig umgrenzte Figuren in Beziehung auf eine Schwerpunktsachse wollen wir nach Mohr erklären.

Die in der Fig. 2 aufgezeichnete Fläche F wird in schmale Streifen geteilt. Die Fläche jedes Streifens wird als eine in seinem Schwerpunkt wirkende Kraft P betrachtet.

Also statt der Fläche F haben wir ein System von Parallelkräften vorhanden. Ihre Resultante wird in folgender Weise einfach aufgesucht.

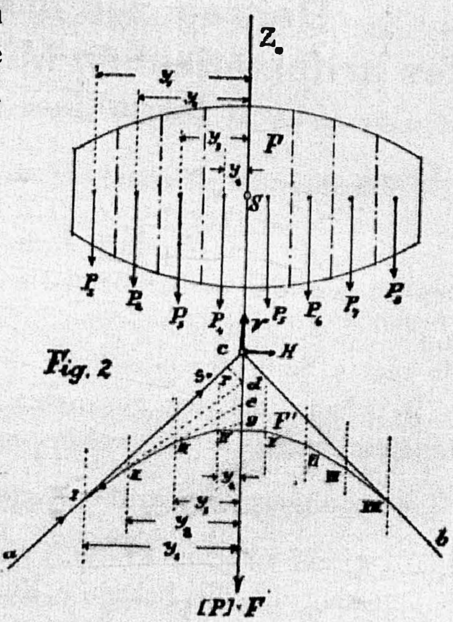
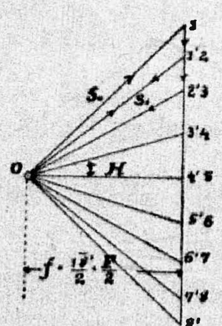


Fig. 2

Man zeichnet zuerst ein Kräftepolygon (Fig. 3), welches in diesem Falle als eine zu den Wirkungslinien der Kräfte parallele Strecke ausfällt. Ihre Länge ist gleich der Summe der einzelnen Kräfte, welche in einem zweckmäßigen Maßstabe aufgetragen werden. Es ist also: $\overline{11'} = P_1$, $\overline{22'} = P_2 \ldots$ $\overline{88'} = P_8$ und daher $\overline{18'} = [P]$ oder auch $\overline{18'} = F$.

Fig. 3


Darauf wählt man einen sonst ganz beliebigen Pol o, jedoch in diesem erwägten Falle zweckmäßig symmetrisch zur Strecke $\overline{18'}$ und in der Entfernung $f = \frac{\overline{18'}}{2} = \frac{F}{2}$, zeichnet das Seilpolygon (Fig. 2) a I II ... VIII b, indem man den Pol mit den Teilpunkten des Kräftepolygons verbindet und entsprechende Parallelen zieht, wie folgt: 01 // $\overline{a\text{I}}$, 02 // I II ... usw. Nach Verlängerung der äußersten Seiten $\overline{a\text{I}}$, bVIII des Seilpolygons, bekommt man in ihrem Schnittpunkte c den Angriffspunkt der Resultante $[P] = F$. Ihre Richtung läuft parallel zu den Wirkungslinien der Komponenten. Die Wirkungslinie der Resultante vertritt zugleich eine Schwerpunktsachse, die wir mit Z_0 bezeichnen.

Jede zwei Nachbarseiten des Seilpolygones, welche sich auf einer und derselben Wirkungslinie der Kraft schneiden, kann man als Seilspannungen auffassen, so

z. B. $\overline{a\mathrm{I}}$, $\overline{\mathrm{I\,II}}$ als Seilspannungen s_0, s_1. Ihre Größe geben die Strecken $\overline{01}$ und $\overline{02}$ (Fig. 3) an. Diese Seilspannungen sind mit der Kraft $P_1 = \overline{11'}$ im Gleichgewicht.

Man verschiebt weiter die Seilspannung s_0 in ihrer Wirkungslinie nach c, zerlegt sie dort in zwei Komponenten H, V, für welche die Größe aus der Fig. 3 ermittelt werden kann, und zwar in der einfachen Weise, daß man $s_0 = \overline{01}$ in die Horizontale und Vertikale projiziert. Ohneweiters sieht man, daß

$$H = f = \frac{F}{2} \text{ sein muß.}$$

Gerade so kann man auch mit den anderen Seilspannungen verfahren.

Weil die drei Kräfte P_1, s_0, s_1 im Gleichgewicht sind, kann man folgende Momentengleichung um den Schnittpunkt d aufschreiben. (Die Richtung der Drehung wird im Sinne der Uhrzeigerbewegung als $+$ angenommen):

$$s_0 \,.\, r - P_1 \,.\, y_1 + s_1\, 0 = 0$$
$$s_0\, r = H \,.\, \overline{cd} + V \,.\, 0$$
$$- P_1 y_1 + H \,.\, \overline{cd} = 0.$$

Nach Multiplikation mit y_1:

$$- P_1 y_1^2 + H \,.\, y_1\, cd = 0$$
$$- P_1 y_1^2 + \frac{F}{2} \,.\, y_1\, cd = 0.$$

Da $\frac{y_1 \,.\, cd}{2}$ die Fläche des Dreieckes I cd ist, so hat man

$$P_1 y_1^2 = F \,.\, \triangle \mathrm{I}\, cd.$$

In der Wirklichkeit bedeutet aber P_1 die Fläche des ersten Streifens, so daß $P_1 y_1^2$ das Trägheitsmoment dieses Streifens in Beziehung auf die Achse Z_0 ist. In analoger Weise kann man so weiter vorgehen. Schließlich bekommt man:

$$P_2 y_2^2 = F \,.\, \triangle \mathrm{II}\, de$$
$$P_3 y_3^2 = F \,.\, \triangle \mathrm{III}\, eg$$

u. s. w.,

und durch Addition dieser Gleichungen:

$$[P_i y_i^2] = F\,(\triangle \mathrm{I}\, cd + \triangle \mathrm{II}\, de + \triangle \mathrm{III}\, eg + \ldots),$$

oder das Trägheitsmoment der ganzen Fläche F:

$$I_z = F \,.\, F', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

wenn man die vom Seilpolygon und dessen äußersten Seiten umgrenzte Fläche ($\triangle \mathrm{I}\, cd + \triangle \mathrm{II}\, de + \ldots$) mit F' bezeichnet.

4. Jetzt können wir zur Konstruktion des arithmetischen Mittels und der mittleren Fehler übergehen.

Beispiel 1: Eine Länge wurde mit Stahlmeßband viermal gemessen. Die Ergebnisse und teilweise auch die rechnerische Ausgleichung sind in folgender Tabelle enthalten:

Nr.	o m	v m	vv cm^2	$\nu = o - N$ cm	Anmerkung
1	2	3	4	5	6
1	125·43	—0·01	1	4	$N = 125·39\,m$
2	·46	— 4	16	7	
3	·40	+ 2	4	1	
4	·39	+ 3	9	0	
		+0·05	30	12	
		—0·05	$[vv]$	$[\nu]$	
		$[v] = 0$			

$$M = N + \frac{[\nu]}{n} = 125·39 + \tfrac{12}{4}\, 10^{-2} = 125·42\,m$$

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{30}{4-1}} = \pm\, 3·16 \doteq \pm\, 3·2\,cm$$

$$\mu = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \doteq \pm \frac{3·2}{\sqrt{4}} \doteq \pm\, 1·6\,cm.$$

Auch auf graphischen Wege benützt man statt o nur v und betrachtet diese ν als Hebelarme der Kräfte von der Größe Eins in Beziehung auf den Anfangs-

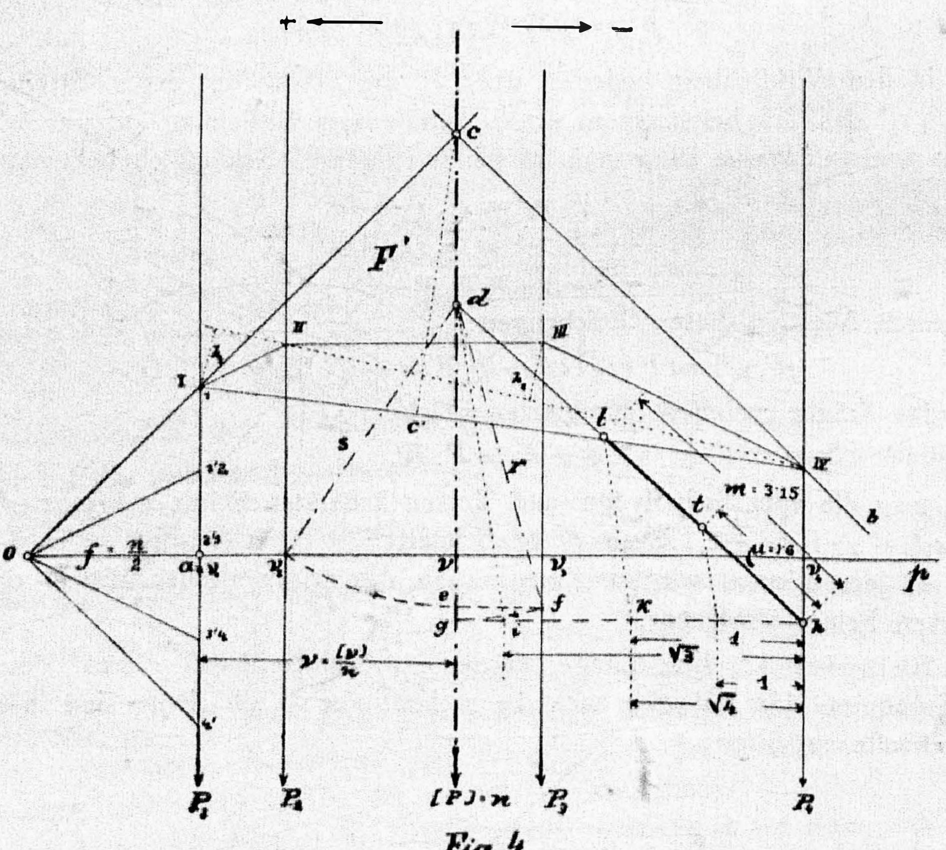


Fig. 4

punkt a der Geraden p (Fig. 4). Wir wollen die v ihrer Größe nach folgendermaßen bezeichnen: $v_1 = 0$, $v_2 = 1$, $v_3 = 4$, $v_4 = 7\,cm$. Weil $v_1 = 0$ ist, muß zugleich $v_1 = a$ sein. Weiter tragen wir $av_2 = v_2 = 1\,cm$, $av_3 = v_3 = 4\,cm$ und $av_4 = v_4 = 7\,cm$ auf, zeichnen die Wirkungslinien der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 senkrecht zu p und suchen die Resultante auf.

Das Kräftepolygon, in welchem jede Kraft P mit $1\,cm$ dargestellt wurde, wählen wir in der ersten Wirkungslinie P_1 und symmetrisch zu p, so daß die Poldistanz $oa = f = \frac{n}{2}$ mit p zusammenfällt und der erste Polstrahl $\overline{01}$ zugleich die erste äußere Seite des Seilpolygons bildet. Dann konstruiert man das Seilpolygon I, II, III, IV, verlängert seine erste und letzte Seite zum Schnittpunkt c und zieht $cv \perp p$. Somit ist die Resultante $[P] = n$ und ihr Arm $av = \frac{[v]}{n}$ konstruiert. Aus der Figur folgt $av = 3\,cm$. Daher $M = N + \frac{[v]}{n} = 125{\cdot}39 + 0{\cdot}03 = 125{\cdot}42\,m$, was auch mit der Rechnung übereinstimmt. Zugleich ist: $\overline{vv_1} = v_1$, $\overline{vv_2} = v_2$, $\overline{vv_3} = -v_3$, $\overline{vv_4} = -v_4$. Für das Folgende brauchen wir die Größe der Verbesserungen v numerisch nicht zu kennen.

Um $[vv]$ zu bestimmen, benützen wir die Gleichung 1 aus dem Grunde, den wir schon am Anfang sub 2) erklärt haben. Bezeichnen wir die Fläche I II III IV c mit F', so muß

$$[vv] = F\,.\,F' = n\,.\,F'$$

sein. Weil die v in cm aufgetragen worden sind, haben wir die Fläche F' in cm^2 zu ermitteln. Der Maßstab der Kräfte hat gar keinen Einfluß, worauf wir im 2. Beispiel noch zurück kommen.

$$F' = \triangle \text{ I IV } c - \text{I II III IV} = \frac{\text{IV}\,cc'}{2} - \text{II IV}\,\frac{h_1 + h_2}{2} =$$

$$= \frac{7{\cdot}08\,.\,3{\cdot}42}{2} - 6{\cdot}18\,\frac{0{\cdot}75 + 0{\cdot}74}{2} = 12{\cdot}1068 - 4{\cdot}6041 =$$

$$= 7{\cdot}5027\,cm^2.$$

$$[vv] = l = F\,.\,F' = n\,.\,F' = 4 \times 7{\cdot}5027 = 30{\cdot}0108\,cm^2.$$

Obwohl die Konstruktion nur mit ganz gewöhnlichen Hilfsmitteln durchgeführt wurde, ist gegen die Rechnung fast gar kein Unterschied.

Anmerkung. Im Falle gleicher Genauigkeit können wir aber den mittleren Fehler ohne jede Rechnung auch anders bestimmen, wenn wir den Ausdruck $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}$ ganz einfach nach dem pythagoräischen Lehrsatze konstruieren (Fig. 4). Zu dem Zwecke substituieren wir $s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ und $r = \sqrt{s^2 + v_3^2}$, so daß wir endlich $\mu = \sqrt{r^2 + v_4^2}$ erhalten.

Aus der Fig. 4 ergibt sich $s = dv_2\ (= de)$, $r = df\ (= dg)$, $\mu = dh$.

Der mittler Fehler geht dann aus der Proportion $m : 1 = \mu : \sqrt{3}$ hervor. Die einfache Konstruktion ist aus der Fig. 4 ohneweiters klar.

$$m = th = 3{\cdot}15 \doteq 3{\cdot}2\,cm.$$

Gerade so kann man auch den Fehler des arithmetischen Mittels aus der Proportion $\mu : 1 = m : \sqrt{n}$ bestimmen. In der Fig. 4 ist $\mu = th = 1{\cdot}57 \doteq 1{\cdot}6\,cm$.

Beispiel 2.*) Der Flächeninhalt F einer ebenen Figur wurde auf mechanischem Wege mit verschiedenen Hilfsmitteln dreimal gemessen, wobei verschiedene mittlere Fehler sich ergeben haben. Es ist die Ausgleichung der direkten Beobachtungen graphisch vorzunehmen, wenn die erhaltenen Beobachtungswerte sind:

$$F_1 = 44\cdot9\,cm^2 \qquad m_1 = \pm\,0\cdot18\,cm^2 \qquad p_1 = 3$$
$$F_2 = 45\cdot1\,cm^2 \qquad m_2 = \pm\,0\cdot12\,cm^2 \qquad p_2 = 6$$
$$F_3 = 45\cdot4\,cm^2 \qquad m_3 = \pm\,0\cdot30\,cm^2 \qquad p_3 = 1$$

Wählt man $N = F_1 = 44\cdot9\,cm^2$, so ist $v_1 = 0$, $v_2 = 0\cdot2$ und $v_3 = 0\cdot5\,cm^2$. Man trage die einzelnen v im Maßstabe $0\cdot1\,cm = 1\,cm$ auf die Gerade p (Fig. 5) von a auf und errichte in den Punkten $v_1 = a$, v_2, v_3 die Wirkungslinien der Kräfte $P_1 = 3$, $P_2 = 6$, $P_3 = 1$ senkrecht zu p.

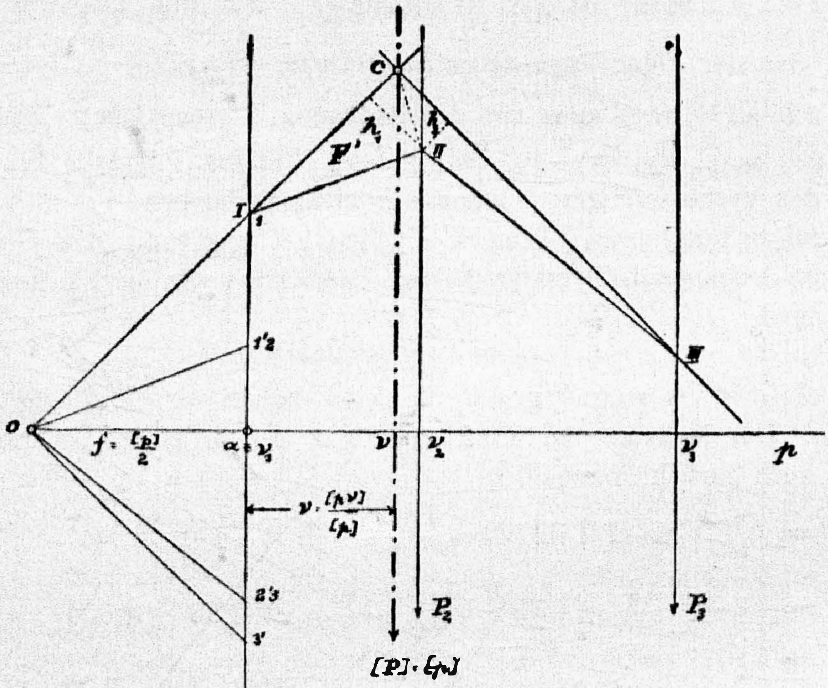


Fig. 5

Darauf zeichne man in ähnlicher Weise wie im Beispiel 1 das Kräftepolygon auf. Als Maßstab für die Kräfte wurde $P_3 = 1 = 0\cdot5\,cm$ angenommen, so daß P_2 als die Strecke $\overline{22'} = 3\,cm$, P_1 als die Strecke $\overline{11'} = 1\cdot5\,cm$ erscheint. Die Poldistanz f wird gleich $\frac{[p]}{2} = \frac{\overline{13'}}{2}$ gewählt.

Nach der Konstruktion des Seilpolygons und der Resultante $[P] = [p]$ ergibt sich $a\,v = v = \frac{[p\,v]}{[p]} = 0\cdot17$; daher

$$M = N + \frac{[p\,v]}{[p]} = 44\cdot9 + 0\cdot17 = 45\cdot07\,cm^2,$$

was vollständig mit der Rechnung übereinstimmt. (Im zitierten Werke, Seite 38).

*) Hartner-Doležal: Hand- und Lehrbuch der Niederen Geodäsie, Band I, S. 37.

Sodann wird $[pvv] = F \,.\, F' = [p] \,.\, F'$ bestimmt. Zu diesem Zwecke wird $F' = \Delta\,\mathrm{I\,III}\,c$ zuerst in cm^2 ermittelt.

$$F' = \frac{\overline{\mathrm{I}c} \,.\, h_1}{2} + \frac{\overline{\mathrm{III}c} \,.\, h_2}{2} = \frac{2{\cdot}43 \,.\, 0{\cdot}85}{2} + \frac{4{\cdot}65 \,.\, 0{\cdot}42}{2} + 2{\cdot}0093\, cm^2$$

$$[p] \,.\, F' = 10 \,.\, 2{\cdot}0093 = 20{\cdot}093\, cm^2.$$

Wir müssen noch dieses Resultat auf den richtigen Maßstab zurückführen.

Zuerst müssen wir noch vorausschicken, daß der Kräftemaßstab auf das Endresultat gar keinen Einfluß ausübt. Denn stellen wir uns vor, daß z. B. die Kräfte zweimal so groß gezeichnet werden, als geschehen ist, so wird auch das Kräftepolygon 13′ zweimal länger. Es vergrößert sich jedoch in demselben Verhältnis auch die Poldistanz, so daß die Polstrahlen zu ihrer ursprünglichen Richtung parallel laufen werden, folglich muß das Seilpolygon seiner Größe nach unverändert bleiben.

Wird aber der Maßstab für v geändert, ändert sich auch die Größe des Seilpolygons und somit auch die Fläche F'.

Wir haben für Aufzeichnung der v $0{\cdot}1\, cm^2 = 1\, cm$ genommen. Umgekehrt wird $1\, cm^2$ der tatsächlichen Fläche F' $(0{\cdot}1\, cm^2)^2$ darstellen müssen. Es ist also das Endresultat im Maßstabe $1\, cm^2 = 0{\cdot}01\, cm^4$ auszudrücken, um zu erhalten:

$$[pvv] = 0{\cdot}01 \,.\, 20{\cdot}093 = 0{\cdot}20093\, cm^4.$$

(Gegen die Rechnung ein Unterschied von $0{\cdot}00007\, cm^4$).

Die weitere Bestimmung der mittleren Fehler ist in diesem Falle am besten schon rechnerisch durchzuführen.

Ein reduzierendes Doppelbild-Tachymeter.

Von Dr. techn. **Franz Aubell**, Konstrukteur an der k. k. Technischen Hochschule in Graz.

(4. Fortsetzung).

2. Die Verwendung des Doppelbildtachymeters zur unmittelbaren Ablesung von Horizontaldistanz und Höhenunterschied.

Bezieht man die Entfernung und den Höhenunterschied auf den anallaktischen Punkt, so fällt in den Gleichungen 18) die Additionskonstante c hinaus und haben dieselben für $C = 100$ die Form:

$$34)\quad \begin{cases} a) & E = 100\, L \cos^2 \alpha \,(1 - 0{,}01 \ \mathrm{tg}\, \alpha) \\ b) & h = 100\, L \sin \alpha \cos \alpha \,(1 - 0{,}01 \ \mathrm{tg}\, \alpha). \end{cases}$$

An Stelle dieser Gleichungen sollen die folgenden treten:

$$35)\quad \begin{cases} a) & E = 100\, L' \\ b) & h = \dfrac{100}{n} L'', \end{cases}$$

in welchen die Multiplikationskonstante für Berechnung der Höhen auf den $n$ten Teil von 100 verkleinert wurde.

Nimmt man für n den Wert 5, so ergibt die daraus folgende Multiplikationskonstante 20 für $1\, mm$ Lattenabschnitt $2\, cm$ Höhenunterschied, was für die Zwecke der Tachymetrie im allgemeinen ausreichen wird.