Zur Theorie der anallatischen Distanzmesser

Norbert Herz [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **7** (5), S. 141–145

1909


```
@ARTICLE{Herz_VGI_190921,
Title = {Zur Theorie der anallatischen Distanzmesser},
Author = {Herz, Norbert},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {141--145},
Number = {5},
Year = {1909},
Volume = {7}
}
```

Zur Theorie der anallatischen Distanzmesser.

Von Universitäts-Dozent Prof. Dr. **Norbert Herz** in Wien.

Bei den Distanzmessern mit Latte ergibt sich bekanntlich die Distanz E, vom Objektive aus gemessen aus dem Lattenabschnitte l, dessen Bildgröße b und der Brennweite f des Fernrohres aus der Gleichung

$$E = \frac{l}{b} f + f$$

oder die Distanz E' von der Mitte des Instrumentes, wenn h die Entfernung des Objektives von der Instrumentenmitte ist

$$E' = \frac{l}{b} f + (f + h)$$

wobei h in der Regel sehr nahe $\frac{1}{2} f$ ist, daher allgemein in der Form

1. $$E = \frac{K_1}{b} + k$$

für konstante Lattenlängen, so daß $K_1 = lf$ ist und b das mittels des Schraubenmikrometers gemessene Bild der Latte ist; oder

2. $$E = K_2 l + k$$

für fixe Lattenlänge, so daß $K_2 = \frac{f}{b}$ ist und l der zwischen den beiden festen Fäden der Fadenplatte erscheinende Abschnitt der Latte ist.

Obzwar die Berücksichtigung der Konstanten k auf keinerlei Schwierigkeiten stößt, kann dieselbe doch auf einfache Weise, nämlich durch Einschaltung einer Kollektivlinse, weggeschafft werden, wie dieses zuerst Porro für seinen anallatischen Distanzmesser tat.

Es gibt dann einen Punkt P zwischen den beiden Linsen L_1 (Objektiv) und L_2 (Kollektivlinse), von welchem aus gezählt, die Entfernungen E_0 einfach proportional den Lattenabschnitten l, bezw. verkehrt proportional den Bildgrößen b sind, so daß k verschwindet, also

$$E_0 = \frac{K_1}{b}, \text{ bezw. } E_0 = K_2 l$$

und die Lage dieses anallatischen Punktes P ist bestimmt durch seine Distanz $d_1 = L_1 P$ vom Objektiv und es wird

$$K_1 = Fl, \quad K_2 = \frac{F}{b}$$

wenn F die Äquivalentbrennweite der Linsenkombination $L_1 L_2$ ist, welche sich aus den Brennweiten f_1 des Objektives, f_2 der Kollimationslinse und deren Entfernung d nach

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

berechnen läßt. Man hat dann*)

$$d = f_2 + \frac{d_1 f_1}{d_1 + f_1}$$

*) Vergl. z. B. des Verfassers «Geodäsie», pag. 91.

$$d_1 = \frac{f_1(d-f_2)}{f_1+f_2-d} = F\left(\frac{d}{f_2}-1\right)$$

Selbstverständlich sind diese Formeln ganz allgemein giltig und es ist ganz gleichgiltig, ob d klein oder groß ist und sollen nunmehr einige allgemeine Fälle untersucht werden.

1. Wählt man $d = f_2$, d. h. wird die Kollektivlinse so angebracht, daß ihr Brennpunkt mit dem zweiten Knotenpunkt der Objektivlinse zusammenfällt, so wird $d_1 = 0$, d. h. der anallatische Punkt fällt in den ersten Knotenpunkt des Objektives; einen besonderen Vorteil bietet daher diese Anordnung nicht.

2. Es soll $d_1 = \frac{1}{2}f_1 + \delta$ angenommen werden, wobei δ nur einen mäßigen Betrag erreicht. Der anallatische Punkt fällt dann nahe in die Mitte zwischen Objektiv und Okular und δ kann so bestimmt werden, daß er in die Mitte des Instrumentes fällt. Dann wird

$$d = f_2 + \frac{\frac{1}{2}f_1^2 + f_1\delta}{\frac{3}{2}f_1 + \delta}$$

oder genähert

$$d = f_2 + (\tfrac{1}{2}f_1^2 + f_1\delta)\frac{2}{3}\frac{1}{f_1}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\delta}{f_1}\right)$$

$$d = f_2 + \tfrac{1}{3}f_1 + \tfrac{4}{9}\delta.$$

Sei z. B. $f_1 = 30\,cm$, $f_2 = 5\,cm$, so wird $d = 15\,cm + \frac{4}{9}\delta$. Ist das Objektiv etwa $12\,cm$ von der Instrumentenmitte entfernt, so wird $\delta = -3\,cm$ und $d = 13{\cdot}67\ cm$.

3. Man ersieht hieraus, daß, wenn $\delta = 0$ ist, $d_1 = \frac{1}{2}f_1$ und $d = f_2 + \frac{1}{3}f_1$ wird, also für den besonderen Fall $f_1 = 6f_2$: $d = \frac{1}{2}f_1$, also $d = d_1$. Kollektivlinse und anallatischer Punkt fallen dann zusammen und liegen in der Entfernung $\frac{1}{2}f_1$ vom Objektiv.

Soll allgemein $d = d_1$ werden, so erhält man die Bedingung

$$d = f_2 + \frac{df_1}{d+f_1}$$

folglich

$$d^2 - df_2 = f_1 f_2$$

und daraus

$$d = \tfrac{1}{2}f_2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4f_1}{f_2}}\right)$$

da das negative Zeichen vor der Quadratwurzel bedeutungslos ist. Für $f_1 = 6f_2$ folgt hieraus wieder $d = 3f_2 = \frac{1}{2}f_1$ und allgemein für $f_1 = n(n-1)f_2$: $d = nf_2 = \frac{1}{n-1}f_1$.

4. Da d jedenfalls kleiner als f_1 sein muß und stets in der Nähe von $\frac{1}{2}f_1$ erhalten werden kann, so sei

$$d = \tfrac{1}{2}f_1(1-\varepsilon);$$

dann muß

$$\tfrac{1}{2}f_1(1-\varepsilon) = \tfrac{1}{2}f_2\left(1 + \sqrt{1 + 4\frac{f_1}{f_2}}\right)$$

sein; dann wird, wenn

$$\frac{f_1}{f_2} = \psi$$

gesetzt wird

$$\psi(1-\varepsilon) = 1 + \sqrt{1+4\psi}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man zur Bestimmung von ψ:

$$\psi^2(1-\varepsilon)^2 - 2\psi(3-\varepsilon) = 0$$

und da die Lösung $\psi = 0$ auszuschließen ist, die Beziehung

$$\psi = 2\frac{3-\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} = 2(3+5\varepsilon+7\varepsilon^2+9\varepsilon^3+\ldots)$$

Ist daher die Entfernung des Instrumentenmittelpunktes vom Objektive $d = \frac{1}{2}f_1(1-\varepsilon)$, so kann der anallatische Punkt in diesen Punkt fallen, wenn die Kollektivlinse ebenfalls in diesem Punkte angebracht ist und zwischen den Brennweiten von Objektiv- und Kollektivlinse die Beziehung besteht

$$f_1 = 2f_2(3+5\varepsilon+7\varepsilon^2+\ldots)$$

Ist wieder wie früher: $f_1 = 30\,cm$, aber das Objektiv in der Entfernung $d = 10\,cm$ vom Instrumentenmittelpunkte, so kann der anallatische Punkt eben dahin fallen und die Kollektivlinse daselbst angebracht werden, wenn

$$f_2 = 15\,.\,\frac{(1-\varepsilon)^2}{3-\varepsilon}$$

angenommen wird, und da

$$\varepsilon = 1 - \frac{2d}{f_1} = \tfrac{1}{3}$$

ist, so wird $f_2 = 2{\cdot}5\,cm$.

Die Äquivalentbrennweite der Linsenkonstruktion folgt aus

$$\begin{aligned}\frac{1}{F} &= \frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1 f_2} = \\ &= \frac{1}{f_1}\left[1+\frac{f_1}{f_2}-\frac{d}{f_1}\cdot\frac{f_1}{f_2}\right] = \\ &= \frac{1}{f_1}\left[1+\frac{\psi}{2}(1+\varepsilon)\right] = \\ &= \frac{1}{f_1}\left[1+\frac{3-\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}(1+\varepsilon)\right] \\ &= \frac{1}{f_1}\cdot\frac{4}{(1-\varepsilon)^2}\end{aligned}$$

somit

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{(1-\varepsilon)^2}{2(3-\varepsilon)}; \quad \frac{d}{f_1} = \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon); \quad \frac{F}{f_1} = \tfrac{1}{4}(1-\varepsilon)^2$$

Ist der Abstand des Okulars von der Instrumentenmitte $d+\chi$, da das Okular wegen der Äquilibrierung weiter von der Instrumentenmitte entfernt sein muß, als das Objektiv, so ist die Länge des Fernrohres $2d+\chi$ und da diese Länge sehr nahe gleich $d+F-\gamma+\varphi$ ist, wenn γ der Abstand des Knotenpunktes der Linsenkombination vom Knotenpunkt der Kollektivlinse und φ die Brennweite des Okulares ist, so muß

$$\varphi - \gamma - \chi = d - F = \tfrac{1}{4}(1-\varepsilon^2)f_1$$

sein. Da diese Bedingung stets erfüllbar ist (es handelt sich ja nur um genäherte Erfüllung dieser Bedingung, da für verschiedene Vergrößerungen der Abstand des Okulars nicht konstant ist), so wird die Anordnung: anallatischer Punkt mit der Kollektivlinse zusammenfallend, u. zw. in der Nähe des Instrumentenmittelpunktes, stets erfüllbar sein.

5. Rückt die Kollektivlinse vom Objektiv weg, bis nahe in die Brennweite desselben, so daß

$$d = f_1 (1 - \varepsilon)$$

würde (ε stets positiv, da $d < f_1$ sein muß) so wird, wenn wieder $\frac{f_1}{f_2} = \psi$ eingeführt wird:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1}\left(1 + \psi - \frac{(1-\varepsilon) f_1}{f_2}\right) = \frac{1}{f_1}(1 + \varepsilon\psi)$$

$$F = \frac{f_1}{1 + \varepsilon\psi}$$

$$d_1 = \frac{f_1}{1 + \varepsilon\psi}\,[(1-\varepsilon)\psi - 1] = f_1\left[\frac{\psi}{1+\varepsilon\psi} - 1\right].$$

In diesem Falle würde $d_1 = 0$, wenn $\psi = 1 + \varepsilon\psi$ oder

$$\psi = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

würde, und da ε nur klein ist, für ψ nahe 1, d. h. wenn die Brennweite der Kollektivlinse nahe gleich derjenigen des Objektives würde.

6. Ist jedoch die Brennweite der Kollektivlinse klein, so wird ψ groß und es wird d_1 einen beträchtlichen Betrag erreichen können. Ist wie früher der Abstand des Objektives vom Instrumentenmittelpunkt h, so ist $d_1 - h$ der Abstand des anallatischen Punktes vom Instrumentenmittelpunkte und die Entfernung des zu bestimmenden Punktes vom Instrumentenmittelpunkte ist

$$E' = E_0 - (d_1 - h).$$

Setzt man daher für die Distanz des anvisierten Punktes vom Instrumentenmittelpunkte E_0, so begeht man einen Fehler $(d_1 - h)$.

Um über diesen eine Schätzung zu erhalten, kann h nahe gleich $\frac{1}{2} f_1$ angenommen werden; es sei

$$h = \tfrac{1}{2} f_1 (1 - \eta)$$

wobei η eine kleine Größe ist, so wird der Fehler

$$d_1 - h = f_1\left(\frac{\psi}{1+\varepsilon\psi} - \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\eta\right)$$

und dieser Wert wird nur dann sehr klein, wenn der Klammerausdruck sehr klein würde. Er würde verschwinden, wenn

$$\frac{2\psi}{1+\varepsilon\psi} - 3 + \eta = 0$$

wäre. Genähert ergibt sich hieraus $\psi = \frac{3}{2}$, d. h. es müßte

$$\frac{f_1}{f_2} = \tfrac{3}{2}$$

oder die Brennweiten von Objektiv- und Kollektivlinse müßten sich verhalten wie 3 : 2. Sei diese Bedingung genähert erfüllt, so daß

$$\psi = \tfrac{3}{2} + \chi$$

gesetzt werden kann, so folgt

$$\frac{3 + 2\chi}{1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \varepsilon\chi} - 3 + \eta = 0$$

oder

$$\eta + \frac{2\chi - \frac{9}{2}\varepsilon - 3\varepsilon\chi}{1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \varepsilon\chi} = 0$$

d. h. mit Rücksicht auf die ersten Potenzen der kleinen Größen müßte

$$\eta = -2\chi + \tfrac{9}{2}\varepsilon$$

oder

$$\chi = \tfrac{9}{4}\varepsilon - \tfrac{1}{2}\eta$$

sein. Wäre z. B. $f_1 = 30\,cm$, $d = 27\,cm$, $h = 13\,cm$, so findet sich leicht $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $\eta = \frac{2}{15}$, $\chi = \frac{19}{120}$, $\psi = \frac{199}{120}$; demnach $f_2 = \frac{120}{199} f_1$, also sehr nahe $18\,cm$.

Wäre jedoch f_2 klein, z. B. $5\,cm$, während, wie eben angenommen wurde, $f_1 = 30\,cm$, $d = 27\,cm$ ist, so würde $d_1 = 82{\cdot}5\,cm$, $d_1 - h = 69{\cdot}5\,cm$ sein. Die in diesem Falle nach der Formel $E = \frac{K_1}{b}$ oder $E = K_2 l$ bestimmte Entfernung wäre daher um $69{\cdot}5\,cm$ fehlerhaft, während ohne Anwendung einer derartigen Kollektivlinse der Fehler etwa $\frac{3}{2} f_1$, d. i. ungefähr $45\,cm$ betragen würde. Durch eine derartige fehlerhafte Anordnung einer Kollektivlinse mit kurzer Brennweite würde daher der Fehler nur vergrößert.

Diese Resultate erlangen eine ganz wesentliche Bedeutung bei der Anwendung von Huygens'schen Okularen. Die dem Objektive zugekehrte Linse desselben ist ja nichts anderes, als eine Kollektivlinse mit kurzer Brennweite, und es folgt daraus, daß man Huygens'sche Okulare für Distanzmesser überhaupt nicht verwenden darf und die mitunter vorgeschlagene Art der Berücksichtigung der zwischen Objektiv und Fadennetz befindlichen Linse völlig fehlerhaft ist.

Die wirtschaftlichen Vorteile der Kommassation.

Vortrag des ständigen Boniteurs für agrarische Operationen Paul Hein in der Monatsversammlung am 26. März 1909.

Meine sehr geehrten Herren!

Vor einem Jahre hatte ich die Ehre, an dieser Stelle über die Bonitierung zum Zwecke der Zusammenlegung landwirtschaftlicher Grundstücke sprechen zu dürfen und heute verdanke ich es abermals dem liebenswürdigen Entgegenkommen des hochgeschätzten Präsidiums des Vereines der Oesterreichischen k. k. Vermessungsbeamten, ein Thema behandeln zu können, welches dem sehr geehrten Auditorium über die Zusammenlegung der Grundstücke im allgemeinen Aufschluß geben und gleichzeitig ein Bild meiner amtlichen Tätigkeit entrollen wird.

Im Vereine mit meinem Herrn Kollegen, Obergeometer Kolbe, der die technische Durchführung der Kommassationen zum Gegenstande seines Vortrages gewählt hat, will ich den hochgeehrten Herren bekannt geben, wie eine derartige Operation eingeleitet wird, welche Vorteile dieselbe den Landwirten bietet und welche Maßnahmen getroffen werden, um den etwas schwerfälligen nieder-