Zur Abbildung der Flächen

Johannes Frischauf [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **7** (5), S. 129–140

1909


```
@ARTICLE{Frischauf_VGI_190920,
Title = {Zur Abbildung der Fl{\"a}chen},
Author = {Frischauf, Johannes},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {129--140},
Number = {5},
Year = {1909},
Volume = {7}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Obergeometer Max Reinisch.

Nr. 5. **Wien, am 1. Mai 1909.** **VII. Jahrgang.**

Zur Abbildung der Flächen.

Von Universitätsprofessor **Dr. Johannes Frischauf.**

1. Um den Punkt $M = (x, y, z)$ einer Fläche auf einer zweiten Fläche durch den Punkt $\mathrm{M} = (X, Y, Z)$ abzubilden, setze man

$$x = f(t, u), \quad y = f'(t, u), \quad z = f''(t, u),$$

wo t, u unabhängige Variable bedeuten und die Funktionen f, f', f'' durch die Natur der ersten Fläche bestimmt sind. In gleicher Weise können X, Y, Z durch zwei unabhängige Variable T, U ausgedrückt werden. Die Abbildung wird dadurch bewirkt, daß man gemäß den Abbildungsbedingungen T und U als Funktionen von u und t darstellt, so daß dann

$$X = F(t, u), \quad Y = F'(t, u), \quad Z = F''(t, u)$$

wird, wo die Funktionen F, F', F'' von der Natur der zweiten (Bild-)Fläche und von den Abbildungsbedingungen abhängen.

Macht man für t, u eine bestimmte Annahme, so erhält man einen bestimmten Punkt M der ersten Fläche. Ein unendlich naher Punkt $M' = (x', y', z)$ ist durch $t + h$, $u + k$ bestimmt, wo h, k unendlich kleine Größen bedeuten. $\xi = x' - x$, $\eta = y' - y$, $\zeta = z' - z$ erscheinen in der Form

$$\xi = ah + bk, \quad \eta = a'h + b'k, \quad \zeta = a''h + b''k$$

mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von h und k. ξ, η, ζ sind die Koordinaten des Punktes M' auf M als Anfang bezogen. Eliminiert man h, k, so erhält man eine Gleichung ersten Grades zwischen ξ, η, ζ, d. h. die Gleichung einer Ebene, welche mit der Berührungsebene im Punkte M zusammenfällt. Gleiches gilt von der zugehörigen Berührungsebene im Punkte M der zweiten (Bild-)Fläche.

Ein zweiter dem Punkte M unendlich naher Punkt $M'' = (x'', y'', z'')$ kann durch

$$x'' - x = \xi' = ah' + bk', \quad y'' - y = \eta' = a'h' + b'k', \quad z'' - z = \zeta' = a''h' + b''k'$$

ausgedrückt werden. Dabei ist

$$\xi\eta' - \xi'\eta = (a'b - ab)(h'k - hk') \text{ u. s. w.}$$

Bestimmt man die zugehörigen Ausdrücke der zweiten (Bild-)Fläche, so erhält man den Satz: Das Verhältnis der Projektionen der Dreiecke M M' M'' und $M M' M''$ auf die Koordinaten-Ebenen — also auch dieser Dreiecke selbst — ist konstant, daher unabhängig von den Größen h, k, h', k' und nur eine Funktion von t und u. Da jeder Flächenteil im Bereiche von M*) und der zugehörige im Bereiche von M durch die Summe oder Differenz solcher Dreiecke dargestellt werden kann, so folgt der Satz: Bei der Abbildung einer Fläche auf einer anderen sind unendlich kleine einander entsprechende Figuren affin — allgemeines Abbildungsgesetz. Die Giltigkeit dieses Gesetzes beruht auf der Existenz der Differentialquotienten der Funktionen f, f', f'' und F, F', F'' nach t und u. An allen Stellen, wo ein oder sogar mehrere dieser Differentialquotienten nicht existieren, gilt das Gesetz nicht.

2. Die Affinität ebener Figuren findet ihren Ausdruck in der Konstanz des Verhältnisses zweier entsprechender Flächen. Von den Haupteigenschaften mögen nur erwähnt werden: Geraden entsprechen Gerade, Parallelen entsprechen Parallele. Bei zwei entsprechenden Geraden haben entsprechende Strecken ein konstantes Verhältnis, das für parallele Gerade denselben Wert behält. Ist O ein Punkt der einen Ebene, O' der entsprechende der zweiten, so lassen sich durch O zwei Gerade a und b derart ziehen, daß $a \perp b$ ist, für die entsprechenden Geraden a' und b' ebenfalls $a' \perp b'$ ist. Diese Geraden heißen Hauptrichtungen. Bezieht man die Koordinaten x, y eines Punktes M auf Hauptrichtungen, sind x', y' die Koordinaten des zugehörigen Punktes M' der affinen Figur, so ist

$$x' = m_1 x, \quad y' = m_2 y,$$

wo m_1 und m_2 zwei konstante Zahlen bedeuten.

Ist u der Winkel der Strecke $OM = r$ mit der x-Achse, u' der zugehörige Winkel der Strecke $O'M' = r'$ mit der x'-Achse, so ist

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u, \quad x' = r' \cos u', \quad y' = r' \sin u'$$

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^2 = m_1^2 \cos u^2 + m_2^2 \sin u^2, \quad \tan u' = \frac{m_2}{m_1} \tan u,$$

$$\sin (u' - u) = \frac{m_2 - m_1}{m_2 - m_1} \sin (u' + u);$$

also $u' - u$ ein Maximum $= \omega$, wenn $u' + u = 90^0$ oder 270^0. Ist ein Winkel durch den Unterschied zweier Richtungen u und v gegeben, so erhält man als größte (absolute) Verzerrung $= 2\,\omega$, wenn $u' + u = 90^0$ oder 270^0 und zugleich $v' + v = 270^0$ oder 90^0 ist.

Das Verhältnis $r' : r$ heißt «Vergrößerungszahl» im Punkte M in der Richtung u.

Von besonderer Wichtigkeit sind die beiden Fälle

$$\text{I.} \quad m_1 = m_2 = m, \text{ dann ist } r' : r = m, \; u' = u,$$

d. h. die einander entsprechenden Figuren sind ähnlich.

$$\text{II.} \quad m_1 m_2 = 1, \text{ d. h. } \frac{x'y'}{xy} = 1,$$

*) D. i. ein um M herum abgegrenztes unendlich kleines Flächenstück.

d. h. die einander entsprechenden Figuren haben gleiche Flächen, d. h. sind flächentreu.

Alle diese Sätze gelten bei der Abbildung einer Fläche auf einer anderen, nur müssen sie auf die kleinsten Teile beschränkt werden. Bei Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen wird die Abbildung (nach Gauß) konform genannt, bei Flächengleichheit äquivalent. Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen bedingt nur ausnahmsweise Ähnlichkeit in den endlichen Teilen, während Flächengleichheit in den kleinsten Teilen auch Flächengleichheit in den endlichen Teilen bedingt.

3. Anwendung. Ein Sphäroid soll auf einer Kugel vom Halbmesser A abgebildet werden. Auf dem Sphäroid wird ein Meridian als Haupt-(Null-)Meridian angenommen; jeder Punkt des Sphäroides ist durch seine Länge t und Poldistanz u bestimmt.

Analog werde auf der Kugel ein größter Kreis als Bild des Haupt-Meridians vorausgesetzt; jeder Punkt der Kugel ist durch die sphärische Länge T und Poldistanz U bestimmt.

Für die Abbildung werde vorausgesetzt: Meridiane und Parallelkreise auf dem Sphäroid sollen durch Meridiane und Parallelkreise auf der Kugel abgebildet werden.

Bedeutet in der Meridian-Ellipse R den Krümmungs-Halbmesser, N die Länge der Normale eines Punktes, so ist

$$R = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\cos u^2)^{3/2}}, \quad N = \frac{a}{(1-e^2\cos u^2)^{1/2}}.$$

Die zugehörigen Linienelemente sind:

im Meridian: $R\,du$, $A\,dU$;

im Parallel: $N\sin u\,dt$, $A\sin U\,dT$,

also die Vergrößerungszahl:

im Meridian: $\dfrac{A\,dU}{R\,du}$,

im Parallel: $\dfrac{A\sin U\,dT}{N\sin u\,dt}$.

Es werde überdies vorausgesetzt:

$$T = \alpha t,$$

wie α eine konstante Zahl bedeutet;*) dann ist die Vergrößerungszahl im Parallel

$$\frac{\alpha A\sin U}{N\sin u}.$$

Es werde noch vorausgesetzt:

I. Die Abbildung ist konform. Dann ist

$$\frac{A\,dU}{R\,du} = \frac{\alpha A\sin U}{N\sin u},$$

*) D. h. T eine beliebige lineare Funktion von t, da die Hinzufügung einer Konstanten nur die (willkürliche) Wahl des Null-Meridians auf der Kugel ändert.

also
$$\frac{dU}{\sin U}=\alpha\frac{R}{N}\frac{du}{\sin u}=\frac{\alpha(1-e^2)\,du}{(1-e^2\cos u^2)\sin u}$$
$$=\frac{\alpha\,du}{\sin u}-\frac{\alpha e^2\sin u\,du}{1-e^2\cos u^2};$$
$$\tan\tfrac{1}{2}U=k(\tan\tfrac{1}{2}u)^\alpha\left(\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\right)^{1/2\alpha e},$$
wo k die Integrationskonstante bedeutet.

II. Die Abbildung ist äquivalent. Dann ist
$$\frac{A\,dU}{R\,du}=\frac{N\sin u}{\alpha A\sin U},\ \text{also}\ \alpha A^2\sin U\,dU=NR\sin u\,du,$$
oder wenn
$$\frac{\alpha A^2}{a^2(1-e^2)}=C,\ e\cos u=x\ \text{gesetzt wird},$$
$$eC\,d\cos U=\frac{dx}{(1-x^2)^2}.$$
Nun ist $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-x^2)^2}=\frac{x}{2(1-x^2)}+\tfrac{1}{4}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, also
$$eC\cos U=\frac{e\cos u}{2(1-e^2\cos u^2)}+\tfrac{1}{4}\log\left(\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\right)+\text{Konst.}$$
In den beiden Fällen (I und II) hängt U nur von u und nicht auch von t ab, die Abbildungsbedingungen sind daher widerspruchsfrei.

4. Die Abbildung I hat Gauß seinen «Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie» zu Grunde gelegt und in der «Ersten Abhandlung» die zur Berechnung nötigen Formeln in den Art. 3—9 vollständig gegeben, so daß kaum etwas hinzugefügt werden kann. Die Abbildung II hat zwar keine praktische Verwendung gefunden, dennoch möge es gestattet sein, die wichtigsten Formeln und ihre Beziehung zur Abbildung I mitzuteilen.

Zur Bestimmung der drei Konstanten der Abbildung I macht Gauß die Voraussetzung, daß für einen bestimmten Parallelkreis gegeben durch $u=u_0=90-P$ die Vergrößerungszahl m ausgedrückt durch
$$m=\frac{\alpha A\sin U}{N\sin u}$$
gleich 1 werde und überdies
$$\frac{dm}{du}=0,\quad\frac{d^2m}{du^2}=0$$
ist. Es ist nun für jeden Wert von u
$$\frac{dm}{du}=\frac{m\,d\log m}{du}=m\left(\cot U\frac{dU}{du}-\cot u+\frac{e^2\cos u\sin u}{1-e^2\cos u^2}\right)$$
$$\cot U\frac{dU}{du}=\frac{\alpha R\cos U}{N\sin u},\quad\cot u-\frac{e^2\cos u\sin u}{1-e^2\cos u^2}=\frac{R}{N}\frac{\cos u}{\sin u}$$
$$\frac{dm}{du}=\frac{mR}{N\sin u}(\alpha\cos U-\cos u).$$

Für das Nullwerden des zweiten Differentialquotientens für $u=u_0$ genügt es, daß

$$\frac{d}{du}(\alpha \cos U - \cos u) = -\alpha \sin U \frac{dU}{du} + \sin u = 0$$

wird. Dies gibt folgende Gleichungen

$$\alpha A \sin U_0 = N_0 \sin u_0, \quad \alpha \cos U_0 = \cos u_0, \quad \alpha \sin U_0 = \frac{A}{R_0} \sin u_0;$$

aus der ersten und dritten folgt

$$A^2 = N_0 R_0$$

aus der zweiten und dritten mit Zuziehung dieser

$$\alpha^2 = 1 + \frac{e^2}{1-e^2} \sin u_0{}^1.$$

Wird für die Vergrößerungszahl statt des obigen m eine andere Funktion von u gewählt, aber mit den Gauß'schen Bedingungen an die Vergrößerungszahl im Meridian, so folgt aus

$$\frac{A\,dU}{R\,du} = m \text{ oder } \frac{A\,dU}{du} = Rm$$

und dem ersten und zweiten Differentialquotienten für $u = u_0$

$$\frac{A\,dU}{du} = R, \quad \frac{A\,d^2 U}{du^2} = \frac{dR}{du}, \quad \frac{A\,d^3 U}{du^3} = \frac{d^2 R}{du^2},$$

also unabhängig von der Form der Funktion m, wenn nur die drei Bedingungen

$$m = 1, \quad \frac{dm}{du} = 0, \quad \frac{d^2 m}{du^2} = 0$$

für $u = u_0$ erfüllt sind.

Für die äquivalente Abbildung II möge zur Unterscheidung von der konformen Abbildung I die Bezeichnung U durch V ersetzt werden, die Differentialgleichung zur Bestimmung von V durch u lautet

$$\frac{A\,dV}{R\,du} = \frac{N \sin u}{\alpha A \sin V}.$$

Setzt man

$$m_1 = \frac{N \sin u}{\alpha A \sin V}, \quad m_2 = \frac{\alpha A \sin V}{N \sin u},$$

so sind m_1 und m_2 Funktionen von u, dabei ist

$$m_1 m_2 = 1.$$

Aus dieser Gleichung und deren Differentialquotienten folgt:

Ist für $u = u_0$

$$m_1 = 1, \quad \frac{dm_1}{du} = 0, \quad \frac{d^2 m_1}{du^2} = 0,$$

so ist für $u = u_0$ auch

$$m_2 = 1, \quad \frac{dm_2}{du} = 0, \quad \frac{d^2 m_2}{du_2} = 0.$$

Werden in die letzteren Gleichungen die Werte

$$\frac{dU}{du} = \frac{dV}{du}, \quad \frac{d^2 U}{du^2} = \frac{d^2 V}{du^2} \quad \text{für } u = u_0$$

eingesetzt, so erhält man zur Bestimmung der Größen A, V_0, α der Abbildung II dieselben Gleichungen, also auch dieselben Werte (nämlich A, U_0, α) wie bei der Abbildung I.

Ferner folgt für den Wert $u = u_0$:

1. $\frac{d^3 m_1}{du^3} + \frac{d^3 m_2}{du^3} = 0, \quad \frac{d^4 m_1}{du^4} + \frac{d^4 m_2}{du^4} = 0, \quad \frac{d^5 m_1}{du^5} + \frac{d^5 m_2}{du^5} = 0.$

Aus der Gleichheit der Differentialquotienten von U und V bis einschließlich der dritten folgt:

2. $\frac{d^3 m_2}{du^3} = \frac{d^3 m}{du^3}.$

3. Auch die Ausdrücke $\frac{d^4 V}{du^4}, \frac{d^5 V}{du^5}$ sowie $\frac{d^4 m_2}{du^4}, \frac{d^5 m_2}{du^5}$ lassen sich leicht durch die bereits von Gauß für die konformen gegebenen ermitteln.

Aus

$$\frac{A\,dU}{du} = Rm, \quad \frac{A\,dV}{du} = Rm_1$$

folgt durch dreimalige Differentiation

$$\frac{A\,d^4U}{du^4} = \frac{d^3R}{du^3} + \frac{R\,d^3m}{du^3}, \quad \frac{A\,d^4V}{du^4} = \frac{d^3R}{du^3} - \frac{R\,d^3m}{du^3}$$

$$\frac{d^4V}{du^4} = \frac{d^4U}{du^4} - \frac{2R}{A}\frac{d^3m}{du^3}.$$

Differenziert man

$$m_2 = \frac{\alpha A \sin V}{N \sin u}$$

viermal, so stimmen alle Teile, ausgenommen $\frac{\alpha A}{N \sin u} \cos V \frac{d^4 V}{du^4}$ mit den bezüglichen $\frac{d^4 m}{du^4}$ überein, es ist daher

$$\frac{d^4 m_2}{du^4} - \frac{d^4 m}{du^4} = \frac{\alpha A}{N \sin u} \cos V \left(\frac{d^4 V}{du^4} - \frac{d^4 U}{du^4} \right)$$

$$\frac{d^4 m_2}{du^4} = \frac{d^4 m}{du^4} - \frac{2R}{N} \cot u \frac{d^3 m}{du^3}$$

$$\frac{d^4 m_1}{du^4} = -\frac{d^4 m}{du^4} + \frac{2R}{N} \cot u \frac{d^3 m}{du^3}.$$

Damit kann wieder

$$A\frac{d^5V}{du^5} = \frac{d^4R}{du^4} + 4\frac{d^3m_1}{du^3}\frac{dR}{du} + R\frac{d^4m_1}{du^4}$$

bestimmt werden. Es ist

$$A\frac{d^5U}{du^5} = \frac{d^4R}{du^4} + 4\frac{d^3m}{du^3}\frac{dR}{du} + R\frac{d^4m}{du^4}$$

$$A\frac{d^5V}{du^5} = \frac{d^4R}{du^4} - 4\frac{d^3m}{du^3}\frac{dR}{du} - R\frac{d^4m}{du^4} + 2\frac{R^2}{N}\cot u\frac{d^3m}{du^3}.$$

Damit erhält man

$$\frac{d^5 m_2}{du^5} - \frac{d^5 m}{du^5} = 4\left(3\left(\frac{R}{N}\cot u\right)^2 + \frac{2R}{N} - \frac{2}{N}\frac{dR}{du}\cot u\right)\frac{d^3m}{du^3} - 2\frac{R}{N}\cot u\frac{d^4m}{du^4}.$$

Bezeichnet man mit S den Meridianbogen zwischen den Poldistanzen u_0 und u, $u - u_0 = d$, so ist

$$S = Rd + \frac{dR}{du}\frac{d^2}{2!} + \frac{d^2R}{du^2}\frac{d^3}{3!} + \ldots,$$

wo S mit d gleichbezeichnet ist und in den Koeffizienten $u = u_0$ zu setzen ist. Damit wird

$$A(U - U_0) = S + R\frac{d^3m}{du^3}\frac{d^4}{4!} + \left(R\frac{d^4m}{du^4} + 4\frac{dR}{du}\frac{d^3m}{du^3}\right)\frac{d^5}{5!} + \ldots$$

$$A(V - V_0) = S - R\frac{d^3m}{du^3}\frac{d^4}{4!} - \left(R\frac{d^4m}{du^4} + 4\frac{dR}{du}\frac{d^3m}{du^3} - 2\frac{R^2}{N}\cot u\frac{d^3m}{du^3}\right)\frac{d^5}{5} + \ldots,$$

wo in den Koeffizienten von d^4, d^5, .. $u = u_0$ zu setzen ist.

$U - V$ ist der sphärische Breitenunterschied von äquivalenter — konformer Abbildung.

Zur Bestimmung der Koeffizienten ist

$$\frac{dR}{du} = \frac{-3e^2R\sin u\cos u}{1 - e^2\cos u^2};$$

aus den Gauß'schen «Untersuchungen . . .», Art. 7, erhält man $\frac{d^3m}{du^3}$, $\frac{d^4m}{du^4}$ .. für $u = u_0$.

Mit Vernachlässigung von Größen mit e^4 in den Koeffizienten von d^6 an erhalten bei der äquivalenten Abbildung II die Zahlen m_1 und m_2 die Form

$$m_2 = 1 + \alpha, \quad m_1 = 1 - \alpha;$$

damit wird die größte Winkelverzerrung 2ω

$$\sin\omega = \alpha = m_2 - 1.$$

Vernachlässigt man in den Koeffizienten von d^4 und d^5 Glieder mit e^4, so ist

$$m_2 - m = \tfrac{1}{3}e^2s^2d^4 + \frac{e^2}{15}\frac{s}{c}(5 + s^2)d^5,$$

$$s = \sin P, \quad c = \cos P.$$

Für den Gauß'schen Wert P ist für $d = +6^0$ $m_2 - m = 2108$ Einheiten der 10. Stelle, $2\omega = 1''.08$; für $d = -6^0$, $m_2 - m = 1279$, $2\omega = 0''.99$.

5. Spezieller Fall. Wird bereits im vorhinein für den Halbmesser A eine bestimmte Annahme gemacht, dann sind nur mehr zwei Größen willkürlich, die durch zwei Bedingungsgleichungen — die erste und zweite Gauß'sche — bestimmt werden können. Aus

$$\alpha A\sin U_0 = N_0\sin u_0, \quad \alpha\cos U_0 = \cos u_0,$$

folgt

$$\tan U_0 = \frac{N_0}{A}\tan u_0, \quad \alpha = \cos u_0\sqrt{1 + \left(\frac{N_0}{A}\tan u_0\right)^2}.$$

Es soll die Annahme A unendlich groß (d. h. die Kugel als eine Ebene vorausgesetzt) gemacht werden. In diesem Falle ist U unendlich klein und AU endlich, $\alpha = \cos u_0$; wird AU durch U ersetzt, so ist $U_0 = N_0 \tan u_0$.

I. Konforme Abbildung

$$U = k (\tan \tfrac{1}{2} u)^{\alpha} \left(\frac{1 + e \cos u}{1 - e \cos u}\right)^{1/2\,\alpha e},$$

wenn $2A$ in die Konstante k einbezogen wird.

II. Äquivalente Abbildung. Aus der ursprünglichen Gleichung

$$\frac{\alpha e A^2}{a^2(1-e^2)} \cos U = \frac{\alpha e A^2}{a^2(1-e^2)} - \frac{\alpha e}{a^2(1-e^2)} \frac{(AU)^2}{2} + \ldots$$
$$= \frac{e \cos u}{2(1 - e^2 \cos u^2)} + \tfrac{1}{4} \log \left(\frac{1 + e \cos u}{1 - e \cos u}\right) + \text{Konst.}$$

wird bei Einbeziehung des ersten Postens in die Konstante und Ersatz von AU durch U

$$-\frac{\alpha e}{2a^2(1-e^2)} U^2 = \text{Konst.} + \frac{e \cos u}{2(1 - e^2 \cos u^2)} + \tfrac{1}{4} \log \left(\frac{1 + e \cos u}{1 - e \cos u}\right).$$

Die Differential-Gleichungen nehmen die Form an

$$\text{I.} \quad \frac{dU}{R\,du} = \frac{\alpha U}{N \sin u} \quad \text{konform}$$

$$\text{II.} \quad \frac{dU}{R\,du} = \frac{N \sin u}{\alpha U} \quad \text{äquivalent},$$

wo $\alpha = \cos u_0$, $U_0 = N_0 \tan u_0$ ist.

Dieselben Gleichungen erhält man auch, indem man als Bildfläche eine Ebene voraussetzt und das Bild des Punktes (t, u) durch Polarkoordinaten $(T = \alpha t, U)$ bestimmt.

Diese Projektion kann auch als Abwicklung einer Kegelfläche betrachtet werden, welche das Sphäroid im Mittelparallel berührt.

Im folgenden soll (wie im vorigen) für die äquivalente Abbildung V statt U gesetzt werden.

Dann ist

$$m = \frac{\alpha U}{N \sin u}, \quad m_1 = \frac{N \sin u}{\alpha V}, \quad m_2 = \frac{\alpha V}{N \sin u},$$

wo U aus I, V aus II bestimmt ist.

Für $u = u_0$ folgt:

$$\frac{d^2 m_1}{du^2} + \frac{d^2 m_2}{du^2} = 0$$

$$\frac{d^3 m_1}{du^3} + \frac{d^3 m_2}{du^3} = 0$$

$$\frac{dU}{du} = R = \frac{dV}{du}, \quad \frac{d^2 U}{du^2} = \frac{dR}{du} = \frac{d^2 V}{du^2}.$$

Damit wird für $u = u_0$

$$\frac{d^2 m_2}{du^2} = \frac{d^2 m}{du^2}.$$

Weiters ist für $u = u_0$

$$\frac{d^3 U}{du^3} = \frac{d^3 R}{du^2} + R\frac{d^2 m}{du^2}$$

$$\frac{d^4 U}{du^4} = \frac{d^3 R}{du^3} + 3\frac{dR}{du}\frac{d^2 m}{du^2} + R\frac{d^3 m}{du^3}$$

$$\frac{d^3 V}{du^3} = \frac{d^2 R}{du^2} + R\frac{d^2 m_1}{du^2} = \frac{d^2 R}{du^2} - R\frac{d^2 m}{du^2}.$$

$$\frac{d^4 V}{du^4} = \frac{d^3 R}{du^3} + 3\frac{dR}{du}\frac{d^2 m_1}{du^2} + R\frac{d^3 m_1}{du^3}$$

$$= \frac{d^3 R}{du^3} - 3\frac{dR}{du}\frac{d^2 m_2}{du^2} - R\frac{d^3 m_2}{du^3}.$$

$$\frac{d^3 m_2}{du^3} = \frac{d^3 m}{du^3} + \frac{\alpha}{N\sin u}\left(\frac{d^3 V}{du^3} - \frac{d^3 U}{du^3}\right)$$

$$= \frac{d^3 m}{du^3} - 2\frac{R}{N}\cot u\frac{d^2 m}{du^2}$$

$$\frac{d^4 V}{du^4} = \frac{d^3 R}{du^3} - 3\frac{dR}{du}\frac{d^2 m}{du^2} - R\frac{d^3 m}{du^3} + 2\frac{R^2}{N}\cot u\frac{d^2 m}{du^2}.$$

Nun ist

$$\frac{d^2 m}{du^2} = \frac{R}{N}$$

$$\frac{d^3 m}{du^3} = -\frac{(1-e^2)\cot u}{(1-e^2\cos u^2)^3}\left(1 + 4e^2 - 6e^2\cos u^2 - 4e^4\cos u^2 + 5e^4\cos u^4\right)$$

$$\frac{3R}{N}\frac{dR}{du} + \frac{R d^3 m}{du^3} = -\frac{R(1-e^2)\cot u}{(1-e^2\cos u^2)^3}\cdot W$$

$$W = 1 + 13e^2 - 15e^2\cos u^2 - 13e^4\cos u^2 + 14e^4\cos u^4.$$

Damit wird beschränkt auf die Glieder mit d^4

$$U = U_0 + S + \frac{R^2}{N}\frac{d^3}{3!} - \frac{R(1-e^2)\cot u}{(1-e^2\cos u^2)^3}W\frac{d^4}{4!},$$

$$V = U_0 + S - \frac{R^2}{N}\frac{d^3}{3!} + \frac{R(1-e^2)\cot u}{(1-e^2\cos u^2)^3}W'\frac{d^4}{4!},$$

$$W' = W + 2(1-e^2)(1-e^2\cos u^2),$$

wo in den Koeffizienten $u = u_0$ zu setzen ist.

Zusatz. Der Ausdruck $U_0 + S$ ist der Wert von U für die einfache Kegelprojektion. Beschränkt man die Ausdrücke U und V der konformen und äquivalenten Kegelprojektion auf die Glieder mit d^3, so ist $U_0 + S$ ein Wert, der von jenen der Konformität und Äquivalenz um die gleiche Größe abweicht. Für Karten großen und mittleren Maßstabes — etwa bis 1 : 1,000.000 herab — ist diese Projektion, die, wenn jedes Kartenblatt ein eigenes Koordinatensystem erhält, eine überaus bequeme Konstruktion des Gradnetzes gestattet,*) jeder anderen vorzuziehen.

---

*) Die betreffenden Formeln sind in Art. 13 meines Aufsatzes «Zur Abbildungslehre und deren Anwendung auf Landes-Aufnahme» in «Zeitschrift für Vermessungswesen», Jahrgang 1908, mitgeteilt. In Art. 14 muß zum zweiten Differentialquotienten von U der flächentreuen Abbildung noch der Faktor cot ζ_0 hinzugefügt werden. Da das betreffende Glied verschwindend ist, so werden dadurch die Resultate dieses Art. nicht beeinflußt.

Anmerkungen.

Zu Art. 2. Die Existenz der Hauptrichtungen ebener affiner Figuren kann so bewiesen werden: Das Achsensystem der ersten Figur werde rechtwinklig, das zugehörige der zweiten Figur schiefwinklig mit den Koordinatenwinkel u vorausgesetzt. Einem Kreise vom Halbmesser 1 der ersten Figur, also gegeben durch $x^2 + y^2 = 1$, entspricht, $x' = \lambda x$, $y' = \mu y$ gesetzt, in der zweiten Figur eine Ellipse

$$\frac{x'^2}{\lambda^2} + \frac{y'^2}{\mu^2} = 1,$$

auf konjugierte Durchmesser bezogen. Wird durch O der Halbmesser $OM = 1$ unter den Winkel α mit der x-Achse gezogen, also $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, so entspricht diesem in der zweiten Figur $O'M' = r'$, wo

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos u = \lambda^2 \cos\alpha^2 + \mu^2 \sin\alpha^2 + 2\lambda\mu \cos u \sin\alpha \cos\alpha,$$

$$2r'^2 = \lambda^2 + \mu^2 + (\lambda^2 - \mu^2)\cos 2\alpha + 2\lambda\mu \cos u \sin 2\alpha.$$

Wird

$$\lambda^2 - \mu^2 = d\cos\beta,\quad 2\lambda\mu\cos u = d\sin\beta$$

gesetzt, wo d positiv ist, so ist β in den Grenzen 0 und 360° eindeutig bestimmt,

$$2r'^2 = \lambda^2 + \mu^2 + d\cos(2\alpha - \beta),$$

also ein Maximum für $2\alpha - \beta = 0$, ein Minimum für $2\alpha - \beta = 180^0$. Wird letzterer Wert von α mit α_1 bezeichnet, so ist $\alpha_1 - \alpha = 90^0$, d. h. die den größten und kleinsten Werten von r' (d. i. die dem Halbmesser der Ellipse) entsprechenden Halbmesser des Kreises der ersten Figur stehen aufeinander senkrecht.

Zu Art. 3 und 4. Der Wert V läßt sich durch eine stark konvergente Reihe ausdrücken. Es ist

$$\frac{1}{1 - e^2\cos u^2} = 1 + e^2\cos u^2 + e^4\cos u^4 + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1 + e\cos u}{1 - e\cos u}\right) = e\cos u + \tfrac{1}{3}e^3\cos u^3 + \tfrac{1}{5}e^5\cos u^5 + \ldots$$

Setzt man

$$F(u) = 1 + \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{3})e^2\cos u^2 + \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{5})e^4\cos u^4 + \ldots,$$

so ist

$$\frac{\alpha A^2}{a^2(1 - e^2)}(\cos V - \cos V_0) = \cos u\, F(u) - \cos u_0\, F(u_0),$$

oder

$$\cos V_0 - \frac{a^2(1 - e^2)}{\alpha A^2}\cos u_0\, F(u_0) = C' \text{ gesetzt,}$$

$$\cos V = \frac{a^2(1 - e^2)}{\alpha A^2}\cos u\, F(u) + C'.$$

Zu Art. 4 Schluß. Mit Vernachlässigung von Größen mit e^4 in den Koeffizienten von d^6 und d^7 wird

$$A(U - U_0) = S + R\frac{d^3 m}{du^3}\frac{d^4}{4!} + \left(\frac{R\,d^4 m}{du^4} + 4\frac{dR}{du}\frac{d^3 m}{du^3}\right)\frac{d^5}{5!}$$

$$+ R\frac{d^5 m}{du^5}\frac{d^6}{6!} + \frac{R\,d^6 m}{du^6}\frac{d^7}{7!} + \ldots$$

Gauß entwickelt $\log m$ nach Potenzen von $p = -d$ in der Form

$$\log m = A_3 p^3 + A_4 p^4 + A_5 p^5 + A_6 p^6,$$

daher ist für $u = u_0$

$$\frac{d^3 m}{du^3} = -3!\, A_3,\quad \frac{d^4 m}{du^4} = 4!\, A_4,$$

$$\frac{d^5 m}{du^5} = -5!\, A_5,\quad \frac{d^6 m}{du^6} = 6!\,(A_6 + \tfrac{1}{2} A_3^2) = 6!\, A_6,$$

da auch bei Gauß in A_6 ein Glied mit e^4 vernachlässigt wird.

Die Größe S kann mittelst Tafeln berechnet werden. H. Hartl gibt in den «Mitteilungen des k. u. k. militär-geographischen Institutes», XIV. Band, die Größe M des Meridianabschnittes vom Äquator bis zur geographischen Breite $\varphi = 90^0 - u$, berechnet mit den Bessel'schen Konstanten des Erdsphäroides.

Ist M_0 diese Größe für die Breite $P = 90^0 - u_0$, so ist

$$S = M_0 - M,\quad M = M_0 - S.$$

Ist $U - U_0 = D$ gegeben, so kann man die Glieder mit $d^4, d^5, \ldots$ mittelst

$$d = \frac{du}{dU} D + \frac{d^2 u}{dU^2}\frac{D^2}{2!} + \frac{d^3 u}{dU^3}\frac{D^3}{3!} + \ldots$$

rechnen, wo

$$\frac{du}{dU} = \frac{A}{R},\quad \frac{d^2 u}{dU^2} = -\frac{1}{R}\left(\frac{A}{R}\right)^2 \frac{dR}{du}$$

$$\frac{d^3 u}{dU^3} = -\left(\frac{A}{R}\right)^3 \left(\frac{1}{R}\frac{d^2 R}{du^2} - 3\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{du}\right)^2\right)$$

für $U = U_0$ (oder $u = u_0$ ist.

Damit kann S durch D ausgedrückt werden.

Rechnet man nur die Glieder mit D^4 und D^5 genau und vernachlässigt in den Gliedern mit D^6 und D^7 Größen mit e^4, so wird

$$A\,(U - U_0) = S + R\left(\frac{A}{R}\right)^4 \frac{d^3 m}{du^3}\frac{D^4}{4!}$$

$$+ \left(\frac{A}{R}\right)^5 \left(R\frac{d^4 m}{du^4} - 6\frac{dR}{du}\frac{d^3 m}{du^3}\right)\frac{D^5}{5!}$$

$$+ R\frac{d^5 m}{du^5}\frac{D^6}{6!} + R\frac{d^6 m}{du^6}\frac{D^7}{7!} + \ldots$$

Aus S erhält man den zu U zugehörigen Wert u.

Gauß bezeichnet den Wert $d = u - u_0$ mit $-p$, den Wert $D = U - U_0$ mit $-q$, also mit $P + p$ die Breite auf dem Sphäroid, mit $Q + q$ die zugehörige auf der Kugel.

Für den Wert P der «Untersuchungen . .», Art. 5, erhält man in Einheiten der fünften Dezimale der Sekunde für die Glieder von $U - S : A$ mit d^4 und d^5 für $d = 1^0$ bis 6^0

Gl. $d^4 = +1,\ 16,\ 83,\ 263,\ 642,\ 1331$

Gl. $d^5 = \quad 0,\ 0,\ \mp 1,\ \mp 3,\ \mp 9,\ \mp 23.$

Für $d = 6^0$ beträgt der Wert von $\frac{4\,d\,R}{d\,u}\frac{d^3 m}{d\,u^3}\frac{d^5}{5\,!}$ nur 1.1 Einheiten der fünften Dezimale.

Diese ganze Rechnung kann mit vierstelligen Logarithmen ausgeführt werden.

Vernachlässigt man Größen mit e^4, so beträgt das Glied mit d^5

$$\text{von } U \qquad -e^2 c^2 \frac{d^5}{30}$$

$$\text{von } V \qquad +e^2(c^2+2s^2)\frac{d^5}{30},$$

ihr Unterschied also $e^2\frac{d^5}{15}$.

$$V-U = -\frac{2R}{A}\frac{d^3 m}{d\,u^3}\frac{d^4}{4\,!}+\frac{e^2 d^5}{15}.$$

Vernachlässigt man im ersten Gliede Größen mit e^4, so ist

$$V-U = -\frac{e^2 cs\,d^4}{3}+\frac{e^2 d^5}{15};$$

für Breiten P von 40^0 bis 50^0 kann $2\,cs = 1$ gesetzt werden.

Sind nur wenige Dreiecke zu berechnen, so kann für die Gauß'sche Abbildung der «Untersuchungen . .» die Bestimmung von D oder d mittelst der in Tafeln gebrachten Größe M gerechnet werden.

Für eine Landesaufnahme ist es wohl am bequemsten, nach dem Vorgange von Gauß eine Tafel der zusammengehörigen Werte $P+p$ und $Q+q$ zu rechnen. In diesem Falle empfiehlt es sich, statt q durch p oder p durch q den Unterschied $q-p$ oder $p-q$ zu bestimmen.*) Die Anfangsglieder der Entwicklungen werden dadurch von

$$q-p = \left(\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}-1\right)p = \frac{-e^2 c^2}{\cos\theta\,(\cos\varphi+\cos\theta)}\,p$$

$$p-q = \left(\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}-1\right)q = \frac{e^2 c^2}{\cos\varphi\,(\cos\varphi+\cos\theta)}\,q.$$

Mit Vernachlässigung der Glieder mit e^4 wird

$$\frac{d^6 U}{d\,u^6} = -\frac{d^6 u}{d\,U^6} = -4\,e^2\frac{s}{c}(14\,c^2-3\,s^2)$$

$$\frac{d^7 U}{d\,u^7} = -\frac{d^7 u}{d\,U^7} = -4\,e^2\left(6+4\,c^2+15\,\frac{s^4}{c^2}\right).$$

Für größere Werte von p oder q (etwa von 4^0 an) ist das Glied sechster Ordnung noch zu berücksichtigen. Für die Gauß'sche Tabelle beträgt dasselbe für $q = 6^0$ -4.3 Einheiten der 5. Stelle. Diese bedeutende Größe rührt von

her.
$$\frac{1}{A}\frac{d^5 R}{d\,u^5} = -24\,e^2 \sin 2\,u$$

---

*) Man reicht dann mit höchstens siebenstelligen Logarithmen aus, wenn diese Tafel auf fünf Dezimalen der Sekunden gerechnet werden soll, bei einer Ausdehnung bis $p = \pm 6^0$, wogegen bei der Gauß'schen Form das erste Glied größtenteils neun- bis zehnstellige Rechnung erfordert.