Paper-ID: VGI_190918

Der Ausgleich beim Rückwärtsabschneiden

Jaroslav Pantoflicek [1]

[1] *k. k. Ingenieur in Prag*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **7** (4), S. 111–115

1909

BibTeX:


```
@ARTICLE{Pantoflicek_VGI_190918,
Title = {Der Ausgleich beim R{\"u}ckw{\"a}rtsabschneiden},
Author = {Pantoflicek, Jaroslav},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {111--115},
Number = {4},
Year = {1909},
Volume = {7}
}
```

versehen. Auf den Ausschnitten des Rahmens sind die Maßstäbe 1 : 1000, 1 : 500, 1 : 800, 1 : 400 angebracht. Der Gradbogen enthält die Bezifferung der vier Quadranten von Grad zu Grad.

Es sei nun auf dem Zeichenblatte die *NS*-Richtung gegeben, und es soll ein Punkt Q gesucht werden, der von einem gegebenen Punkte P 52 *m* entfernt liegt, und zwar auf einer Linie, die mit der *NS*-Richtung einen Winkel von 290° bildet. Der Maßstab sei 1 : 1000.

Man sucht mit der Alhidade den Winkel 290° auf und fixiert ihn durch Anziehen der Klemmschraube. Darauf legt man den Transporteur so auf die Zeichenebene, daß die Alhidadenkante an die *NS*-Linie zu liegen kommt. Durch doppelte Parallelverschiebung längs eines Lineals bringt man sodann den Nullpunkt des Maßstabes 1 : 1000 an den Punkt P und der Punkt Q kann nun mit Hilfe einer Kopiernadel abgestochen oder sofort abgenullt werden.

Dies ermöglicht ein ungemein rasches Arbeiten und hält die Zeichnung frei von überflüssigen Bleistiftlinien. Ein spitzwinkliger Schnitt kann auch nie in Frage kommen. Außerdem läßt sich der Zulegequadrant auch vorteilhaft als Koordinatenschieber benützen.

Die Firma A. Blankenburg, Berlin, SO. 26, stellt den Transporteur zum Preise von 45 Mark her.

Der Ausgleich beim Rückwärtsabschneiden.

Von Dr. Jaroslav Pantoflíček, k. k. Ingenieur in Prag.

Beim Rückwärtsabschneiden wird die Lage des Punktes P durch Messung der Winkel $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ aus dem Punkte P zur bekannten Lage der Punkte P_1, $P_2 \ldots P_n$ bestimmt. Die gemessenen Winkel β kann man durch die Richtungswinkel α der Seiten s, bezogen auf die willkürlich gewählte, unveränderliche Achse X ausdrücken. Der von der Seite $\overline{PP_1}$ und der Achsenrichtung $+X$ eingeschlossene Richtungswinkel α wird auch von der Seite $\overline{P_1P}$ und der Achsenrichtung $-X$, die durch den Punkt P_1 gezogen ist, gebildet, und es entstehen durch die Verschiebung des Scheitels P gleiche Änderungen sowohl im Richtungswinkel beim Punkte P als auch im Richtungswinkel beim Punkte P_1.

Es genügt, wenn der Richtungswinkel der Seite $\overline{P_1P}$ (Fig. 1*a*) anstatt des gemessenen Richtungswinkels der Seite $\overline{PP_1}$ durch Ersatzstäbe*) ersetzt wird, und zwar durch einen elastischen Winkelstab von der beliebigen Länge l_1 und durch eine beliebige Anzahl unelastischer Stäbe, die mit der festen Richtung der X-Achse verbunden sind. Betrachtet man die Scheitel $P_1, P_2 \ldots P_n$ als fest, so kann man sich, weil Deformationen der unelastischen Stäbe nicht entstehen, den Stab l_1 in dem beliebigen Punkte T_1 als fest gelagert denken. Ähnlich werden auch die übrigen Richtungswinkel ausgedrückt, woraus sich n Stäbe l ergeben, die in dem Scheitel P verbunden sind und nach vollendeter Deformation die berichtigte Lage des Scheitels P liefern.

*) Siehe: Fehlerausgleichung nach dem Prinzipe der kleinsten Deformationsarbeit. «Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst». Jahrg. 1908, Heft 24, 25.

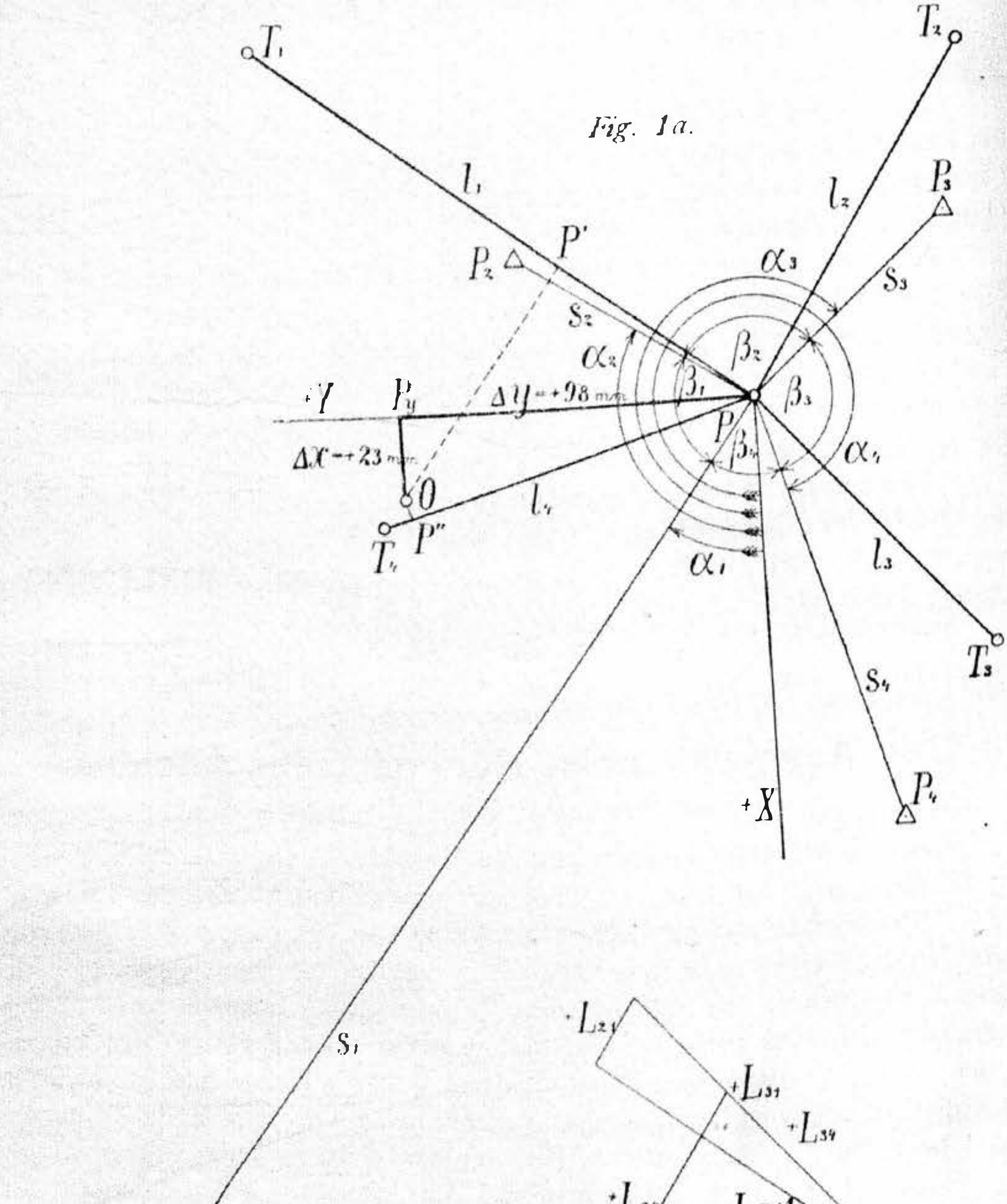
T1
T2
l1
l2
P'
P2
P3
s2
s3
α2
α3
β1
β2
β3
β4
+Y
Py
Δy = +98 mm
Δx = +23 mm
O
P
P''
T4
l4
α4
α1
l3
T3
s4
P4
+X
s1
-X
α1
P1
+L21
+L31
+L34
+L24
L1 = +1
L4 = +1
01 00 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10
100 0 05 1 2 3km

Fig. 1a.

Fig. 1b.

Es sind die Koordinaten des Scheitels P auszugleichen, der durch Rückwärtsabschneiden von den Punkten $P_1 \ldots P_4$ bei der Messung des geodätischen Ortsnetzes der Stadt Písek in Böhmen bestimmt wurde.*)

Die trigonometrischen Koordinaten der Punkte $P_1 \ldots P_4$, bezogen auf Gusterberg, sind:

$$P_1 \begin{cases} y_1 = + \quad 1.436{\cdot}68\ m, \\ x_1 = - 136.506{\cdot}66\ m, \end{cases} \qquad P_3 \begin{cases} y_3 = - \quad 2.305{\cdot}46\ m, \\ x_3 = - 141.112{\cdot}31\ m, \end{cases}$$

$$P_2 \begin{cases} y_2 = - \quad 713{\cdot}12\ m, \\ x_2 = - 141.028{\cdot}77\ m, \end{cases} \qquad P_4 \begin{cases} y_4 = - \quad 2.031{\cdot}23\ m, \\ x_4 = - 138.890{\cdot}51\ m. \end{cases}$$

Bei der Triangulierung wurden gemessen die Winkel:

$$\beta_1 = 85^0\, 48'\, 40'', \qquad \beta_3 = 114^0\, 12'\, 4'',$$
$$\beta_2 = 106^0\, 31'\, 50'', \qquad \beta_4 = 53^0\, 27'\, 6''.$$

Die genäherten Koordinaten des Punktes P, gerechnet aus den Punkten P_1, P_2, P_3, sind:

$$P \begin{cases} y' = - \quad 1.564{\cdot}765\ m, \\ x' = - 140.477{\cdot}975\ m, \end{cases}$$

und die Entfernungen dieses Punktes von den Punkten $P_1 \ldots P_4$ sind:

$$s_1 = PP_1 = 4.977{\cdot}95\ m, \quad s_3 = PP_3 = 975{\cdot}20\ m,$$
$$s_2 = PP_2 = 1.014{\cdot}24\ m, \quad s_4 = PP_4 = 1.654{\cdot}59\ m.$$

Die gerechneten Richtungswinkel dieser Seiten sind:

$$\alpha'_1 = 37^0\ \ 4'\ 52''7, \qquad \alpha'_3 = 229^0\ 25'\ 22''7,$$
$$\alpha'_2 = 122^0\ 53'\ 32''7, \qquad \alpha'_4 = 343^0\ 37'\ 30''5,$$

und die gemessenen Richtungswinkel im Hinblick auf den gewählten Richtungswinkel α'_1 sind:

$$\alpha_1 = \quad \alpha'_1 \quad = 37^0\ \ 4'\ 52''7, \qquad \alpha_3 = \alpha_2 + \beta_2 = 229^0\ 25'\ 22''7,$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_1 = 122^0\ 53'\ 32''7, \qquad \alpha_4 = \alpha_3 + \beta_3 = 343^0\ 37'\ 26''7,$$
$$\alpha''_1 = \alpha_4 + \beta_4 = 37^0\ 4'\ 52''7.$$

Weil die gemessenen Richtungswinkel α_1, α_2, α_2 den gerechneten gleich sind, liegt in den Längen l_1, l_2 l_3 kein Widerspruch vor. Der Richtungswinkel α_4 enthält den Widerspruch

$$\delta_\alpha = \alpha_4 - \alpha'_4 = -\ 3''8\ ;$$

daher ist der Widerspruch in der Länge l_4

$$\delta_4 = \frac{1}{206.265}\, \delta_\alpha \,.\, s_\alpha = -\ 30{\cdot}4\ mm.$$

Zur Berechnung der berichtigenden Deformationen betrachten wir die Stäbe l_2 und l_3 als notwendig und die Stäbe l_1 und l_4 als überzählig.

Wird das Stabsystem l_2, l_3 durch die Kraft $L_{11} = +1$ belastet, so sind die Achsialkräfte (Fig. 1b)

$$L_{21} = +\ 0{\cdot}215, \quad L_{31} = +\ 1{\cdot}038,$$
$$L_{11} = +\ 1{\cdot}000, \quad L_{41} = 0$$

*) Gemessen von Prof. Nowotný.

und bei Belastung durch die Kraft $L_{44} = +1$ sind die Axialkräfte:

$$L_{34} = +0{\cdot}947, \quad L_{24} = +0{\cdot}673,$$
$$L_{44} = +1{\cdot}000, \quad L_{14} = 0.$$

Sind die Gewichte aller Winkelbeobachtungen gleich, und zwar 10^{12}, so sind die Querschnitte der Stäbe:

$$\pi_1'' = \frac{10^{12}}{s_1^2} = \frac{1}{4{\cdot}978^2}, \quad \pi_3'' = \frac{10^{12}}{s_3^2} = \frac{1}{0{\cdot}975^2},$$
$$\pi_2'' = \frac{10^{12}}{s_2^2} = \frac{1}{1{\cdot}014^2}, \quad \pi_4'' = \frac{10^{12}}{s_4^2} = \frac{1}{1{\cdot}655^2}.$$

Es entstehen daher bei Belastung des Systems durch die Kraft $L_{11} = 1$ die Deformationen:

$$\triangle l_{11} = +24{\cdot}8\,mm, \quad \triangle l_{21} = +0{\cdot}98\,mm$$
$$\triangle l_{31} = +0{\cdot}22\,mm, \quad \triangle l_{41} = \pm 0{\cdot}00\,mm$$

und bei Einwirkung der Kraft $L_{44} = +1$ die Deformationen:

$$\triangle l_{14} = \pm 0{\cdot}00\,mm, \quad \triangle l_{24} = +0{\cdot}64\,mm,$$
$$\triangle l_{34} = +0{\cdot}97\,mm, \quad \triangle l_{44} = +2{\cdot}73\,mm.$$

Die Verschiebungen der Scheitel in der Richtung der Kräfte L_{11} und L_{44} werden entweder graphisch oder rechnerisch ermittelt.

Die in der Richtung der Kraft L_{11} durch die Kraft $L_{11} = 1$ verursachte Verschiebung ist:

$$\delta_{11} = \triangle l_{21}\, L_{21} + \triangle l_{31}\, L_{31} = +1{\cdot}064\,mm;$$

die Verschiebung in der Richtung der Kraft L_{44}, verursacht durch die Kraft $L_{44} = 1$, ist:

$$\delta_{44} = \triangle l_{34}\, L_{34} + \triangle l_{24}\, L_{24} = +1{\cdot}350\,mm;$$

die Verschiebung in der Richtung der Kraft L_{11}, verursacht durch die Kraft $L_{44} = 1$, ist:

$$\delta_{14} = \triangle l_{24}\, L_{21} + \triangle l_{34}\, L_{31} = +0{\cdot}869\,mm;$$

und die Verschiebung in der Richtung der Kraft L_{44}, verursacht durch die Kraft $L_{11} = 1$, ist:

$$\delta_{41} = \triangle l_{21}\, L_{24} + \triangle l_{31}\, L_{34} = +0{\cdot}869\,mm.$$

Zur Kontrolle dient $\delta_{41} = \delta_{14}$.

Die Achsialkräfte L_1, L_4 in den Stäben l_1, l_4 ergeben sich nach Verbindung aller Stäbe aus den Gleichungen:

$$L_1 (\triangle l_{11} + \delta_{11}) + L_4\, \delta_{14} = 0,$$
$$L_4 (\triangle l_{44} + \delta_{44}) + L_1\, \delta_{41} = -\delta_4,$$

sodaß $L_4 = +7{\cdot}51$ und $L_1 = -0{\cdot}025$ ist.

Es entsteht daher eine Verschiebung des Scheitels P in der Richtung des Stabes l_1 um die Länge:

$$\triangle_1 = \delta_{11} L_1 + \delta_{14} L_4 = +6{\cdot}493\,mm$$

und in der Richtung des Stabes l_4 um die Länge:

$$\triangle_4 = \delta_{44} L_4 + \delta_{41} L_1 = +10{\cdot}118\,mm.$$

Trägt man im zugehörigen Maßstab (Fig. 1*a*) die Verschiebung $\triangle_1$ in der Richtung $+L_1$ vom Punkte P zum Punkte P' und die Verschiebung $\triangle_4$ in der Richtung $+L_4$ vom Punkte P'' auf, und werden in diesen Punkten Senkrechte zu den Stäben l_1 und l_4 errichtet, so liegt im Schnitte O beider Senkrechten die berichtigte Lage des Punktes P. Durch Projektion der berichtigenden Verschiebung $\overline{OP}$ auf die Y-Achse erhält man die Berichtigung der Ordinate y':

$$\triangle y = +9{\cdot}8\,mm$$

und durch Projektion auf die X-Achse erhält man die Berichtigung der Abszisse x':

$$\triangle x = +2{\cdot}3\,mm.$$

Es sind daher die ausgeglichenen Koordinaten des Punktes

$$P\begin{cases} y = y' + \triangle y = -1.564{\cdot}755\,m, \\ x = x' + \triangle x = -140.477{\cdot}973\,m. \end{cases}$$

Die mittleren Fehler in den ausgeglichenen Koordinaten werden ermittelt, wenn man das ausgeglichene Stabsystem durch die in der Richtung der X- und Y-Achse wirkenden Kräfte gleich Eins belastet und die Verschiebungen in diesen Richtungen bestimmt.

Zur Erwiderung Prof. Fuchs' in Sachen seines Näherungsverfahrens.

In meinen Bemerkungen über das Fuchs'sche Verfahren sagte ich (S. 66), daß «das Pumpenproblem auf einer nicht bewiesenen und sogar recht bezweifelbaren Behauptung beruht», und 4 Zeilen später beginnt die Untersuchung über die fragliche Behauptung, «daß die Verbesserungen von Natur aus negativ seien». Es ist daher ganz klar, daß ich nicht die Richtigkeit des Prinzipes vom Maximum der geleisteten Arbeit bezweifelte, sondern die Zulässigkeit der Analogie zwischen dem abgebraischen und dem ganz einseitig behandelten dynamischen Problem. Herr Fuchs hat eben nicht nur die Koeffizienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, . . . sondern auch alle anderen Größen als eindeutig bezeichnet eingeführt. Dieser Vorgang wäre nur statthaft, wenn die Schlußformeln dem Prinzipe von der «Erhaltung der formalen Gesetze» gehorchen würden, was aber z. B. bei teilweise negativen Koeffizienten nicht der Fall ist, wie Herr Fuchs selbst angibt. Es wäre eben Sache des Herrn Fuchs gewesen, den Einfluß der Vorzeichenänderungen zu untersuchen, um sein vielversprechendes Verfahren unzweifelhaft zu b e g r ü n d e n und a n w e n d u n g s f ä h i g zu machen. Der wichtigste Punkt, den ich durch meine Bemerkungen zur Sprache bringen wollte, ist aber der, den Herr Fuchs leider ganz nebensächlich behandelt: ob das Näherungsverfahren **in der Methode der kleinsten Quadrate** überhaupt anwendbar ist, wo das Dividieren der ursprünglichen Gleichungen bekanntlich auf falsche Werte führt. Es kommt der Allgemeinheit nicht darauf an, ob i c h von dem, was Herr Fuchs über Gewichte sagt, befriedigt bin, sondern ob es w a h r ist, ob Herr Fuchs die Anwendbarkeit seines Näherungsverfahrens in der Methode der kleinsten Quadrate b e w e i s e n kann, oder ob