Das arithmetische Mittel als Grundlage der Ausgleichungsrechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate

Joseph J. Adamczik [1]

[1] *deutsche techn. Hochschule in Prag*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **7** (2), S. 33–44

1909

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Obergeometer Max Reinisch.

Nr. 2. **Wien, am 1. Februar 1909.** **VII. Jahrgang.**

Das arithmetische Mittel als Grundlage der Ausgleichungsrechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Von J **Adamczik**, Prof. der deutschen techn. Hochschule in Prag.

Mag man das arithmetische Mittel als ein Axiom hinstellen (Gauß), oder aber dasselbe auf Grundlage wissenschaftlicher Untersuchungen als den wahrscheinlichsten Wert darstellen (Lagrange), jedenfalls steht für das arithmetische Mittel folgendes fest:

1. Bei direkten Beobachtungen gleicher Genauigkeit galt seit jeher, also schon lange vor der Anwendung der Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungs-Rechnung, bei allen Beobachtern die Regel, daß der «zweckmäßigste Wert», welchen man hiebei wählen kann, das arithmetische Mittel aller Messungsergebnisse sei. Dies muß also unzweifelhaft die Erfahrung gelehrt haben. Es hat also sicherlich das arithmetische Mittel «die langjährige Erfahrung», diesen besten Prüfstein für die Güte aller theoretischen Erwägungen, entschieden für sich.

2. Es existiert überhaupt kein stichhältiges Argument, welches für eine Verwerfung der allgemein giltigen Regel des arithmetischen Mittels angeführt werden könnte.

Alle Ausgleichungsvorschriften der Methode der kleinsten Quadrate lassen sich aber auf das Prinzip des arithmetischen Mittels zurückführen, von welchem sie ja hergeleitet sind.

Der Grundsatz der Methode der kleinsten Quadrat-Summe, $[pvv] =$ Min. ist aber für den unbefangenen Anfänger gewiß nicht von vornherein so einleuchtend, wie jener des arithmetischen Mittels. Es ist jedoch nach obigem ganz gut möglich, bei Aufstellung des arithmetischen Mittels als eines «Axiomes» die sämtlichen Aufgaben der Ausgleichungsrechnung ganz allein auf das arithmetische Mittel selbst zu stützen, so daß für die Begründung der Ausgleichungsrechnungen von jeder Wahrscheinlichkeitsrechnung und auch von der Anwendung der höheren Mathematik ganz abgesehen werden kann. Dies bietet in pädagogischer Hinsicht zweierlei Vorteile: 1. Kann der Unterricht in der Ausgleichungsrechnung von jedem Lehrplane vollständig unabhängig gemacht werden, und 2. dürfte bei zweifelsüchtig Veranlagten eine stärkere Hervorhebung des Grundsatzes der Mittelbildung nur von Vorteil sein und das Vertrauen in die Zweckmäßigkeit der Ausgleichungsrechnungen erheblich vermehren.

Dabei wird sich aber auch ganz von selbst bald die Erkenntnis ergeben, welche Erleichterungen die Methode der kleinsten Quadrate bei der Durchführung der Rechnungen gewährt und welchen Wert auch jener Vorzug derselben besitzt, daß sie auf alle Formen der Ausgleichungsaufgaben in bequemer Weise direkt anwendbar ist. Man wird die Methode der kleinsten Quadrate als eine sehr wertvolle «Rechnungs-Erleichterung» begrüßen müssen und wird auch die ganz besondere Eleganz ihrer Ausführungen bewundern müssen.

Auf die verschiedenen, vorkommenden Fälle übergehend, betrachten wir zunächst:

I. Vermittelnde Beobachtungen im Zusammenhange mit direkten Beobachtungen.

Als Beispiel diene die Winkelmessung in allen Kombinationen, zunächst zwischen 3 Strahlen.

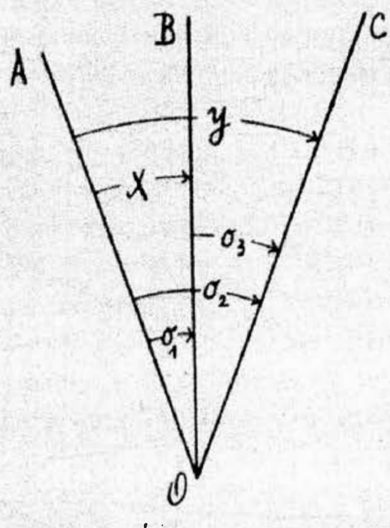

Fig. 1.

Nach der allgemeinen Gleichung:

$u = ax + by$ hat man:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= a_1 x & \ldots\ldots\ldots 1)\\ u_2 &= \quad\;\; b_2 y & \ldots\ldots\ldots 2)\\ u_3 &= a_3 x + b_3 y & \ldots\ldots\ldots 3)\end{aligned}\right\}$$

Den Beobachtungen o komme der mittlere Fehler $\pm m$ zu.

Die Einsetzung der beobachteten Werte liefert für x zwei Näherungswerte, und zwar:

$$\left.\begin{array}{l} \text{aus Gleichung 1) den Wert } x' = \dfrac{o_1}{a_1} \\ \text{»} \qquad \text{»} \qquad 3) \text{ »} \quad \text{»} \quad x'' = \dfrac{o_3 - b_3 \dfrac{o_2}{b_2}}{a_3} \end{array}\right|$$

x' hat den mittleren Fehler $m_{x'} = \dfrac{\pm m}{a_1}$ und das Gewicht $p_{x'} = a_1^2$

x'' hat den mittleren Fehler:

$$m_{x''} = \frac{\pm m}{a_3}\sqrt{1 + \left(\frac{b_3}{b_2}\right)^2} = \frac{\pm m\sqrt{b_2^2 + b_3^2}}{a_3 b_2}, \text{ Gewicht } p_{x''} = \frac{a_3^2 b_2^2}{b_2^2 + b_3^2}$$

Aus diesen zwei Werten haben wir nun unter Berücksichtigung der zugehörigen Gewichte das Mittel zu bilden.

$$x = \frac{a_1^2 \dfrac{o_1}{a_1} + \dfrac{o_3 - b_3 \dfrac{o_2}{b_2}}{a_3} \cdot \dfrac{a_3^2 \cdot b_2^2}{b_2^2 + b_3^2}}{a_1^2 + \dfrac{a_3^2 b_2^2}{b_2^2 + b_3^2}}$$

$$x = \frac{a_1 o_1 (b_2^2 + b_3^2) + a_3 b_2 (b_2 o_3 - b_3 o_2)}{a_1^2 (b_2^2 + b_3^2) + a_3^2 b_2^2} = \frac{Z}{N}$$

Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate gibt:

$$x = \frac{[bb][ao] - [ab][bo]}{[aa][bb] - [ab][ab]} = \frac{Z'}{N'}$$

Da hier $a_2 = 0$ und ebenso $b_1 = 0$ ist, so ergibt sich $Z = Z'$ und $N = N'$, wodurch die völlige Übereinstimmung erwiesen ist.

Bedenkt man ferner, daß $a_1 = 1$, $a_3 = -1$ und ferner $b_2 = 1$ und $b_3 = 1$ sind, so stellt sich die Rechnung eigentlich viel einfacher dar:

$$\left.\begin{array}{l} x' = o_1; \quad p' = 1 \\ x'' = o_2 - o_3; \quad \dfrac{1}{p''} = 1 + 1 = 2, \; p'' = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \; \frac{p'}{p''} = \frac{2}{1}$$

$$x = \frac{2 o_1 + (o_2 - o_3) \cdot 1}{2 + 1} = \tfrac{1}{3}(2 o_1 + o_2 - o_3)$$

Ebenso erhält man für y:

$$\left.\begin{array}{l} y' = o_2; \quad p' = 2 \\ y'' = o_1 + o_3; \; p'' = 1 \end{array}\right\} \; y = \frac{2 o_2 + (o_1 + o_3) \cdot 1}{2 + 1} = \tfrac{1}{3}(o_1 + 2 o_2 + o_3)$$

Liegen 4 Strahlen vor (Fig. 2), so ist die Anzahl der gemessenen Winkel $\binom{4}{2} = 6$, die Anzahl der zu suchenden, ausgeglichenen Winkel $= 3$.

$u_1 = x$ . . . . 1)

$u_2 = \;.\; y$ . . . . 2)

$u_3 = \;.\;.\; z$ . . . . 3)

$u_4 = -x + y$ . . . . 4)

$u_5 = -x + \;.\; + z$ . . . . 5)

$u_6 = \;.\; - y + z$ . . . . 6)

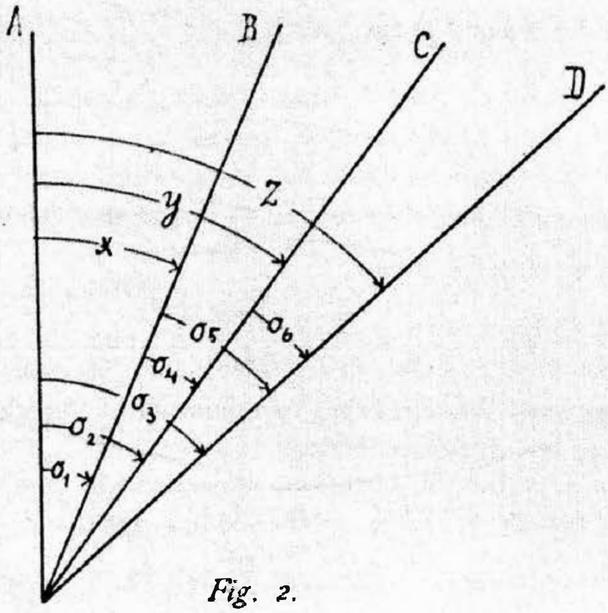

Fig. 2.

Für x erhält man jetzt 3 Näherungswerte, und zwar aus:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Gleichung } 1) & x' = o_1\,; & p' = 1 \\ \quad\text{»}\quad 4) & x'' = o_3 - o_4\,; & p'' = \tfrac{1}{2} \\ \quad\text{»}\quad 5) & x''' = o_2 - o_5\,; & p''' = \tfrac{1}{2} \end{array}\right\} p' : p'' : p''' = 2 : 1 : 1$$

$$x = \frac{2o_1 + (o_3 - o_4) \,.\, 1 + (o_2 - o_5) \,.\, 1}{2 + 1 + 1} = \tfrac{1}{4}\,(2o_1 + o_3 - o_4 + o_2 - o_5)$$

Ebenso ergeben sich die Werte für y und z ohne jede Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate durch einfache Mittelbildung.

Von Wichtigkeit ist es, hier nur zu konstatieren, daß die Ausgleichungsvorschriften für vermittelnde Beobachtungen das ganz gleiche Resultat ergeben. (S. Jordan, «Handbuch der Vermesssungskunde», Bd. I. 5. Auflage, S. 281.)

II. Vermittelnde Beobachtungen.

1. Gleiche Genauigkeit der Beobachtungen.

Wir nehmen der Einfachheit nur 2 Unbekannte und 3 Beobachtungen an.

$$\left.\begin{array}{l|l} u_1 = a_1 x + b_1 y & \text{Beobachtung } o_1 \text{ mit dem mittleren Fehler } \pm m \\ u_2 = a_2 x + b_2 y & \quad\text{»}\quad o_2 \quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\quad \pm m \\ u_3 = a_3 x + b_3 y & \quad\text{»}\quad o_3 \quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\quad \pm m \end{array}\right\}$$

Wir setzen einstweilen y als bekannt voraus, also als fehlerfreien, konstanten Wert und bilden durch Einsetzung der Werte für die Beobachtungen folgende drei Näherungswerte für x:

$$\left.\begin{array}{ll} x' = \dfrac{1}{a_1}\,(o_1 - b_1 y) \text{ mit dem mittleren Fehler } & m' = \pm \dfrac{m}{a_1} \\ x'' = \dfrac{1}{a_2}\,(o_2 - b_2 y) \quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»} & m'' = \pm \dfrac{m}{a_2} \\ x''' = \dfrac{1}{a_3}\,(o_3 - b_3 y) \quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»} & m''' = \pm \dfrac{m}{a_3} \end{array}\right\}$$

$$p' : p'' : p''' = a_1^2 : a_2^2 : a_3^2$$

$$x = \frac{a_1^2 \frac{o_1 - b_1 y}{a_1} + a_2^2 \frac{o_2 - b_2 y}{a_2} + a_3^2 \frac{o_3 - b_3 y}{a_3}}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \frac{[ao] - [ab]y}{[aa]}$$

Ebenso erhält man für y bei der Annahme, daß einstweilen x bekannt sei.

$$y = \frac{b_1^2 \frac{o_1 - a_1 x}{b_1} + b_2^2 \frac{o_2 - a_2 x}{b_2} + b_3^2 \frac{o_3 - a_3 x}{b_3}}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \frac{[bo] - [ab]x}{[bb]}$$

Dies sind aber die durch reine Mittelbildung entwickelten Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]x + [ab]y = [ao] \\ [ab]x + [bb]y = [bo]\end{array}\right\}$$

Eleganter wäre allerdings folgender Rechnungsgang:

Für das allgemeine arithmetische Mittel $M = \frac{[po]}{[p]}$ besteht die Kontrollgleichung $[pv] = 0$. Diese Kontrollgleichung erhalten wir ohne Bezugnahme auf die kleinste Quadratsumme, wenn wir die Verbesserungsgleichungen $v = M - o$ mit den zugehörigen Gewichten multiplizieren.

$$[pv] = [p] \,.\, M - [po] = 0$$

Wenden wir dies auf vorstehende Rechnung an, so müssen wir erst die Verbesserungen für die Näherungswerte suchen.

$$x' + v' = x'' + v'' = x''' + v''' = x$$

und damit haben wir:

$$p'v' + p''v'' + p'''v''' = 0$$

zu setzen.

$$u_1 = a_1 x + b_1 y = o_1 + v_1 ; \quad v_1 = u_1 - o_1$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{a_1}(u_1 - b_1 y) \\ x' = \frac{1}{a_1}(o_1 - b_1 y) \end{array}\right| \; x - x' = \frac{1}{a_1}(u_1 - o_1) = \frac{v_1}{a_1} = v'$$

Ebenso erhält man: $v'' = \frac{v_2}{a_2}$ und $v''' = \frac{v_3}{a_3}$ und somit:

$$\frac{v_1}{a_1} \,.\, a_1^2 + \frac{v_2}{a_2} \,.\, a_2^2 + \frac{v_3}{a_3} \,.\, a_3^2 = [av] = 0.$$

Multiplizieren wir also jede der Verbesserungsgleichungen mit dem zugehörigen Werte von a:

$$v = ax + by - o; \quad av = a^2 x + ab y - ao$$

und bilden die Summe, so ergibt sich die erste Normalgleichung auch nur durch Anwendung der Regeln für die Mittelbildung.

$$\left.\begin{array}{l}[av] = [aa]x + [ab]y - [ao] = 0 \\ [bv] = [ab]x + [bb]y - [bo] = 0\end{array}\right\}$$

Ebenso:

2. Beobachtungen verschiedener Genauigkeit.

	Beobachtung	Mittl. Fehler	Gewicht
$u_1 = a_1 x + b_1 y$	o_1	m_1	p_1
$u_2 = a_2 x + b_2 y$	o_2	m_2	p_2
$u_3 = a_3 x + b_3 y$	o_3	m_3	p_3

Der mittlere Fehler einer Beobachtung von der Gewichtseinheit sei m_0.

$$m_0 m_0 = p_1 m_1 m_1 = p_2 m_2 m_2 = p_3 m_3 m_3$$

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{p_1}}, \quad m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{p_2}}, \quad m_3 = \frac{m_0}{\sqrt{p_3}}$$

y einstweilen als bekannt vorausgesetzt, kann man für x folgende drei Näherungswerte bei Einsetzung der beobachteten Werte o erhalten.

$$x' = \frac{1}{a_1}(o_1 - b_1 y), \quad m' = \pm\frac{m_1}{a_1} = \pm\frac{m_0}{a_1\sqrt{p_1}}; \quad p' = p_1 a_1 a_1$$

$$x'' = \frac{1}{a_2}(o_2 - b_2 y), \quad m'' = \pm\frac{m_2}{a_2} = \pm\frac{m_0}{a_2\sqrt{p_2}}; \quad p'' = p_2 a_2 a_2$$

$$x''' = \frac{1}{a_3}(o_3 - b_3 y), \quad m''' = \pm\frac{m_3}{a_3} = \pm\frac{m_0}{a_3\sqrt{p_3}}; \quad p''' = p_3 a_3 a_3$$

$$x = \frac{p_1 a_1 a_1 \frac{o_1 - b_1 y}{a_1} + p_2 a_2 a_2 \frac{o_2 - b_2 y}{a_2} + p_3 a_3 a_3 \frac{o_3 - b_3 y}{a_3}}{p_1 a_1 a_1 + p_2 a_2 a_2 + p_3 a_3 a_3} = \frac{[pao] - [pab]y}{[paa]}$$

Ebenso würde man durch reine Mittelbildung für y erhalten:

$$y = \frac{[pbo] - [pab]x}{[pbb]}$$

Dies sind aber wieder die zwei Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [paa]x + [pab]y &= [pao] \\ [pab]x + [pbb]y &= [pbo] \end{aligned}\right\}$$

Führt man wieder die Verbesserungen für die Näherungswerte ein:

$$x' + v' = x'' + v'' = x''' + v''' = x$$

$$v' = x - x' = \frac{1}{a_1}(u_1 - o_1) = \frac{v_1}{a_1}, \quad p' = p_1 a_1 a_1 \; \ldots\ldots$$

$$p'v' + p''v'' + p'''v''' = p_1 a_1 v_1 + p_2 a_2 v_2 + p_3 a_3 v_3 = [pav] = 0$$

Multiplizieren wir also die Verbesserungsgleichungen mit den zugehörigen $(p\,.\,a)$, so erhalten wir durch Addition wieder die 1. Normalgleichung, wobei ausschließlich nur die Regeln der Mittelbildung herangezogen erscheinen. Die Mittelbildung für y schreibt vor: $[pbv] = 0$, wodurch sich die 2. Normalgleichung ergibt.

Da man auch die Ausgleichungsaufgaben für bedingte Beobachtungen in solche nach vermittelnden Beobachtungen umwandeln kann, so erscheint es bereits erwiesen, daß sich sämtliche Ausgleichungsrechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate auf das Prinzip des arithmetischen Mittels zurückführen lassen. Wir wollen aber dennoch auch auf die Ausgleichung bedingter Beobachtungen näher eingehen.

III. Bedingte Beobachtungen.

1. Beobachtungen gleicher Genauigkeit.

Die beobachteten Werte hätten die Bedingungsgleichung zu erfüllen:

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Die Einsetzung der beobachteten Werte o ergäbe den Widerspruch w.

$$a_0 + a_1 o_1 + a_2 o_2 + a_3 o_3 = w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Zur Bestimmung von x_1 haben wir zwei Näherungswerte zur Berechnung heranzuziehen, und zwar die direkte Beobachtung o_1 und den aus der Bedingungsgleichung hervorgehenden Wert, welcher bei Einsetzung aller übrigen Beobachtungen (ausgenommen o_1) resultiert.

$x_1' = o_1$ mit dem mittleren Fehler m und dem Gewichte $p_1' = 1$

$$x_1'' = -\frac{1}{a_1}(a_0 + a_2 o_2 + a_3 o_3) = -\frac{1}{a_1}(w - a_1 o_1)$$

mit dem mittleren Fehler:

$$m_1'' = \pm \frac{1}{a_1}\sqrt{m^2 (a_2^2 + a_3^2)} = \pm \frac{m}{a_1}\sqrt{a_2^2 + a_3^2},$$

daher mit dem Gewichte:

$$p_1'' = \frac{a_1^2}{a_2^2 + a_3^2}$$

Die Mittelbildung ergibt sonach:

$$x_1 = \frac{o_1 - \dfrac{a_1^2}{a_2^2 + a_3^2} \cdot \dfrac{1}{a_1}(w - a_1 o_1)}{1 + \dfrac{a_1^2}{a_2^2 + a_3^2}} = \frac{(a_2^2 + a_3^2)\, o_1 - a_1 (w - a_1 o_1)}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$x_1 = o_1 - \frac{a_1 \cdot w}{[aa]} = o_1 + v_1; \quad v_1 = -\frac{a_1 w}{[aa]}$$

Die Ausgleichung mit Korrelaten gibt die Normalgleichung:

$$[aa]\,K + w = 0, \quad K = -\frac{w}{[aa]}; \quad v_1 = a_1 K = -\frac{a_1 w}{[aa]}$$

Also in völliger Übereinstimmung mit dem aus der reinen Mittelbildung erhaltenen Wert.

Ebenso lassen sich die Werte für x_2 und x_3 durch reine Mittelbildung bei Verwertung der jeweiligen direkten Beobachtung und der vorliegenden Bedingungsgleichung ableiten.

Die Verbesserungen für die, bei der Mittelbildung benützten Näherungswerte sind:

$v' = x_1 - x_1' = x - o_1 = v_1$, das zugehörige Gewicht $p_1' = 1$

$$v'' = x_1 - x_1''; \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{a_1}(a_0 + a_2 x_2 + a_3 x_3) \\ x_1'' &= -\frac{1}{a_1}(a_0 + a_2 o_2 + a_3 o_3) \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 - x_1'' = -\frac{1}{a_1}[a_2 (x_2 - o_2) + a_3 (x_3 - o_3)]$$

$$v'' = -\frac{1}{a_1}(a_2 v_2 + a_3 v_3) = \frac{1}{a_1}(w + a_1 v_1) = v_1 + \frac{w}{a_1}$$

Das zugehörige Gewicht: $p_1'' = \dfrac{a_1^2}{a_2^2 + a_3^2}$

$$p_1' v' + p_1'' v'' = v_1 + \frac{a_1^2}{a_2^2 + a_3^2} \cdot v_1 + \frac{a_1 w}{a_2^2 + a_3^2} = 0$$

$$[aa]\, v_1 + a_1 w = 0, \quad v_1 = -\frac{a_1 w}{[aa]}$$

Man gelangt also auch auf diesem Wege nur durch die Rechnungsvorschriften für die Mittelbildung zum gleichen Resultate, wie nach der Korrelaten-Methode.

Als Beispiel diene die Winkelausgleichung in einem n-Eck.

$$-(n-2) \cdot 180^0 + o_1 + o_2 + \ldots + o_n = w$$

$$x_1' = o_1, \; p_1' = 1$$

$$x_1'' = (n-2)\, 180^0 - o_2 - \ldots - o_n = o_1 - w, \quad \frac{1}{p_1''} = n - 1, \; p_1'' = \frac{1}{n-1}$$

$$p_1' : p_1'' = (n-1) : 1\,; \; x_1 = \frac{(n-1)\, o_1 + o_1 - w}{n - 1 + 1} = o_1 - \frac{w}{n}$$

2. Beobachtungen verschiedener Genauigkeit.

Die Bedingungsgleichung laute wieder:

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

Den Beobachtungen o_1, o_2 und o_3 kommen die mittleren Fehler m_1, m_2 und m_3, beziehungsweise die Gewichte p_1, p_2 und p_3 zu.

$$a_0 + a_1 o_1 + a_2 o_2 + a_3 o_3 = w\,; \; 1 \cdot m_0 m_0 = p_1 m_1 m_1 = p_2 m_2 m_2 \ldots$$

Die zwei Näherungswerte für die Bestimmung von x_1 sind:

$x_1' = o_1$ mit dem Gewichte $p_1' = p_1$

$$x_1'' = -\frac{1}{a_1}(a_0 + a_2 o_2 + a_3 o_3) = -\frac{1}{a_1}(w - a_1 o_1) = \frac{1}{a_1}(a_1 o_1 - w)$$

$$m_1'' = \pm \frac{1}{a_1} \sqrt{a_2^2 m_2^2 + a_3^2 m_3^2} = \pm \frac{m_0}{a_1} \sqrt{\frac{a_2^2}{p_2} + \frac{a_3^2}{p_3}}$$

$p_1'' = \dfrac{a_1^2}{\dfrac{a_2^2}{p_2} + \dfrac{a_3^2}{p_3}}$ als Gewicht von x_1''.

$$x = \frac{p_1 o_1 + \dfrac{a_1^2}{\dfrac{a_2^2}{p_2} + \dfrac{a_3^2}{p_3}} \cdot \dfrac{1}{a_1}(a_1 o_1 - w)}{p_1 + \dfrac{a_1^2}{\dfrac{a_2^2}{p_2} + \dfrac{a_3^2}{p_3}}}$$

$$x = \frac{\left(\dfrac{a_2^2}{p_2} + \dfrac{a_3^2}{p_3}\right) p_1 o_1 + a_1^2 o_1 - a_1 \cdot w}{\left(\dfrac{a_2^2}{p_2} + \dfrac{a_3^2}{p_3}\right) p_1 + a_1^2} = o_1 - \frac{a_1}{p_1} \cdot \frac{w}{\left[\dfrac{aa}{p}\right]}$$

$x = o_1 + v_1$, also ist: $\quad v_1 = -\dfrac{a_1}{p_1} \cdot \dfrac{w}{\left[\dfrac{aa}{p}\right]}$

Die Korrelaten-Methode gibt die Normalgleichung:

$$\left[\frac{aa}{p}\right]K + w = 0;\quad K = -\frac{w}{\left[\frac{aa}{p}\right]};\quad v_1 = \frac{a_1}{p_1}\,.\,K$$

Es besteht also vollste Übereinstimmung zwischen Mittelbildung und der Methode der kleinsten Quadrate.

Die Verbesserungen für die Näherungswerte sind wie vorher:

$v' = x_1 - x_1' = x_1 - o_1 = v_1$ jedoch das Gewicht $p_1' = p_1$

$v'' = x_1 - x_1'' = v_1 + \frac{w}{a_1}$ „ „ „ $p_1'' = \frac{a_1^2}{\frac{a_2^2}{p_2} + \frac{a_3^2}{p_3}}$

$$p_1'v' + p_1''v'' = p_1v_1 + \frac{a_1^2}{\frac{a_2^2}{p_2} + \frac{a_3^2}{p_3}}\,.\,v_1 + \frac{a_1 w}{\frac{a_2^2}{p_2} + \frac{a_3^2}{p_3}} = 0$$

$$\left(\frac{a_2^2}{p_2} + \frac{a_3^2}{p_3}\right)p_1 v_1 + a_1^2 v_1 + a_1 w = 0$$

$$\left[\frac{aa}{p}\right].\,v_1 + \frac{a_1}{p_1}.\,w = 0;\quad v_1 = -\frac{a_1}{p_1}\,.\,\frac{w}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$$

Zum Beispiel:

1. Ausgleichung einer Nivellement-Schleife.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$
$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = w$$
$$x_1' = h_1,\quad p_1' = \frac{1}{s_1}$$
$$x_1'' = -(h_2 + h_3 + \ldots + h_n) = h_1 - w$$
$$\frac{1}{p_1''} = s_2 + s_3 + \ldots + s_n,\quad p_1'' = \frac{1}{s_2 + s_3 + \ldots + s_n}$$
$$x_1 = \frac{\frac{1}{s_1}h_1 + \frac{1}{s_2 + s_3 + \ldots + s_n}(h_1 - w)}{\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2 + s_3 + \ldots + s_n}} = \frac{(s_2 + s_3 + \ldots + s_n)h_1 + s_1 h_1 - s_1 w}{s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n}$$
$$x_1 = h_1 - \frac{w}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}\,.\,s_1 = h_1 - \frac{w}{U}\,.\,s_1$$

2. Beispiel: Gegeben seien die zwei Höhenmarken A und B und es sei $H_A^B = H$. Zur Bestimmung der Höhe eines Punktes P hätte man durch Nivellement von A nach P den Höhenunterschied h_1 und von P nach B den Höhenunterschied h_2 erhalten (Fig. 3). Die Strecken dieser Nivellements seien s_1, s_2 und die Gesamt-Länge:

$$s_1 + s_2 = S$$
$$h_1 + h_2 - H = w$$
$$v_1 + v_2 = -w$$

Auf vermittelnde Beobachtungen zurückgeführt:

$$\left.\begin{array}{l|l} v_1 = v_1 & p_1 = \dfrac{1}{s_1} \\ v_2 = -v_1 - w & p_2 = \dfrac{1}{s_2} \end{array}\right\}$$

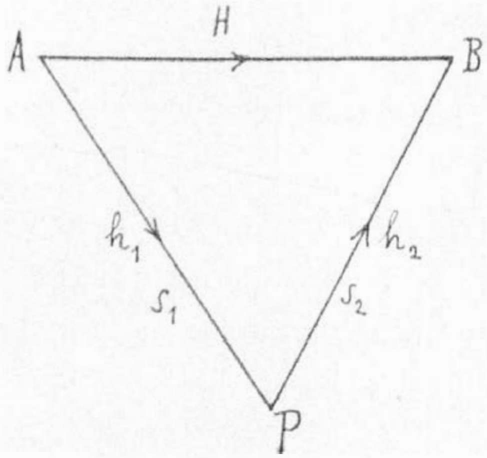

Fig. 3.

Gehen wir auf die Mittelbildung über, so ergeben sich für v_1 die folgenden zwei Näherungswerte:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1' = 0 & \text{mit dem Gewichte } p_1' = \dfrac{1}{s_1} \\ v_1'' = -w & \quad \text{„} \quad \text{„} \quad\quad p_1'' = \dfrac{1}{s_2} \end{array}\right\}$$

$$v_1 = \frac{-\dfrac{w}{s_2}}{\dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{s_2}} = -\frac{s_1 w}{s_1 + s_2} = -\frac{w}{S} \cdot s_1$$

Die Normalgleichung hätte gelautet:

$$[paa]\, v_1 = -[pal] \text{ oder } \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right) v_1 = -\frac{w}{s_2}, \quad v_1 = -\frac{w}{S} \cdot s_1$$

Ebenso:

$$\left.\begin{array}{l|l} v_2 = v_2 & p_2 = \dfrac{1}{s_2} \\ v_1 = -v_2 - w & p_1 = \dfrac{1}{s_1} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l|l} v_2' = 0 & p_2' = \dfrac{1}{s_2} \\ v_2'' = -w & p_2'' = \dfrac{1}{s_1} \end{array}\right\}$$

$$v_2 = \frac{-\dfrac{w}{s_1}}{\dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{s_2}} = -\frac{s_2 w}{s_1 + s_2} = -\frac{w}{S} \cdot s_2$$

Als 3. Beispiel möge ein solches mit zwei Bedingungsgleichungen folgen. Gegeben drei Höhenmarken A, B und C. Die nivellierten Höhenunterschiede zwischen P und A, B, C seien h_1, h_2 und h_3. (Fig. 4).

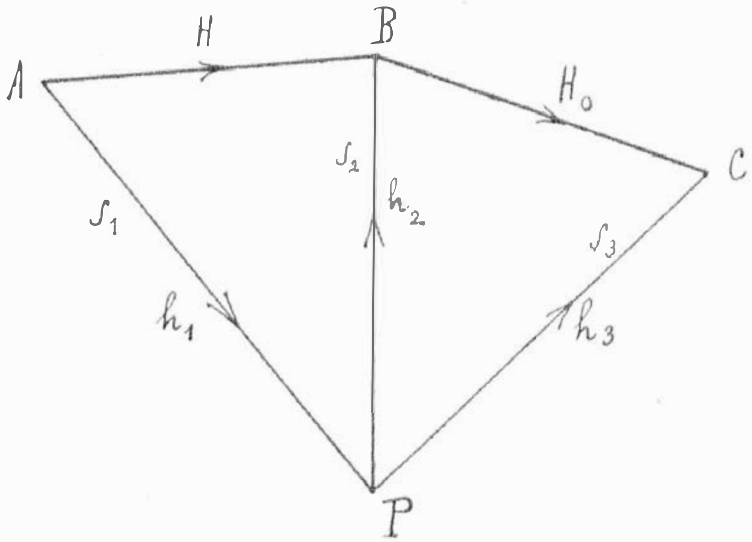

Fig. 4.

$$H_A^B = H,\quad H_B^C = H_0$$

$$\left.\begin{aligned} h_1 + h_2 - H &= w_1 \\ -h_2 + h_3 - H_0 &= w_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 &= -w_1 \\ -v_2 + v_3 &= -w_2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ 2) \end{aligned}$$

$$v_1 + v_3 = -w_1 - w_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3)$$

Die Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen ergibt:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1 \\ v_2 &= -v_1 - w_1 \\ v_3 &= -v_1 - w_1 - w_2 \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{s_1} \\ p_2 &= \frac{1}{s_2} \\ p_3 &= \frac{1}{s_3} \end{aligned} \right\}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= 0, \quad p_1' = \frac{1}{s_1} \\ v_1'' &= -w_1, \quad p_1'' = \frac{1}{s_2} \\ v_1''' &= -w_1 - w_2, \quad p_1''' = \frac{1}{s_3} \end{aligned}\right\}$$

$$v_1 = -\frac{\dfrac{w_1}{s_2} + \dfrac{w_1 + w_2}{s_3}}{\dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{s_2} + \dfrac{1}{s_3}} = -\frac{w_1 s_1 s_3 + (w_1 + w_2) s_1 s_2}{s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3}$$

Die Normalgleichung hätte gelautet:

$$[paa]\, v_1 = -[pal]$$

	a	l	p	paa	pal
1	1	0	$\frac{1}{s_1}$	$\frac{1}{s_1}$	0
2	−1	$-w_1$	$\frac{1}{s_2}$	$\frac{1}{s_2}$	$\frac{w_1}{s_2}$
3	−1	$-(w_1+w_2)$	$\frac{1}{s_3}$	$\frac{1}{s_3}$	$\frac{w_1+w_2}{s_3}$

$$\left(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}\right)v_1=-\left(\frac{w_1}{s_2}+\frac{w_1+w_2}{s_3}\right)$$

Womit also wieder die volle Übereinstimmung erwiesen ist.

Der logarithmische Kreisrechenschieber nach Franz Riebl.

Von Ing. Dr. Theodor Dokulil, Adjunkt an der k. k. Technischen Hochschule in Wien.

In der Koordinatenrechnung, und zwar sowohl in der analytischen Punktebestimmung als auch insbesondere bei der Polygonzugsberechnung bildet die Berechnung der Koordinatendifferenzen zweier Punkte aus der horizontalen Entfernung derselben und dem Richtungswinkel dieser Seite eine sehr häufig auszuführende Operation, welche, wenn sie mit Hilfe von Logarithmentafeln ausgeführt und eventuell noch auf demselben Wege kontrolliert werden muß, nicht nur äußerst zeitraubend und langwierig, sondern auch sehr ermüdend ist, so daß infolgedessen bei diesen Rechnungen sehr häufig Fehler unterlaufen, die sich am Schlusse als grobe Widersprüche herausstellen und dann eine nochmalige Wiederholung des oft sehr umfangreichen Rechnungselaborates erfordern. Diesem Umstande suchte man durch die Berechnung von Tafelwerken, sogenannten Koordinatentafeln, zu begegnen, welche mit zwei Argumenten, der horizontalen Distanz und dem Richtungswinkel, die Koordinatendifferenzen ergeben oder aus denen man für die auf logarithmischem Wege berechneten Koordinatendifferenzen eine einfache und rasche Kontrolle erhält. Da diese Tafeln jedoch dann, wenn man mit ihnen eine größere Genauigkeit zu erzielen beabsichtigt und ihren Gebrauch möglichst vereinfachen will, einen größeren Umfang erhalten müssen, was natürlich wieder ihre Handlichkeit ungünstig beeinflußt, bei Tafeln kleineren Umfanges dagegen zum Behufe der Entnahme der Koordinatendifferenzen zeitraubende und die Möglichkeit eines Irrtums wieder vergrößernde Zwischenrechnungen und Interpolationen notwendig sind, ist trotz dieser Koordinatentafeln das Bedürfnis nach einem mechanischen Hilfsmittel der Koordinatenrechnung, welches mit einer einmaligen Operation beide Koordinatendifferenzen mit entsprechender Sicherheit und Genauigkeit ergibt, vorhanden, und es hat dieses Bedürfnis schon wiederholt Theoretiker und Praktiker veranlaßt, sich mit der Konstruktion eines solchen Hilfsmittels zu befassen.