Ausgleichung von Triangulierungen nach der Methode der kleinsten Produkte

Theodor Dokulil [1]

[1] *Adjunkt an der k. k. Techn. Hochschule in Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **6** (11), S. 331–340

1908

Die Gleichungen 7) und 8) können nun allerdings ebenfalls noch von Nennern befreit werden. Führt man dieses aus, so erhält man noch Ausdrücke von der Form $A\,(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi)$, welche sich zusammenfassen lassen; allein die resultierenden Gleichungen sind derart, daß es doch besser scheint, die beiden Gleichungen in der vorliegenden Form zu verwenden. In allen Fällen hat man ja die Gleichungen durch Versuche (aufeinanderfolgende Näherungen) zu lösen, und infolge der Form, in welcher hier die Ausdrücke im Zähler und Nenner auftreten, wird die Berechnung relativ einfach. Jeder dieser vier Brüche hat nämlich die Form

$$\frac{p_1 \sin P_1 + p_2 \sin P_2 + p_3 \sin P_3}{p_1 \cos P_1 + p_2 \cos P_2 + p_3 \cos P_3}$$

und die Berechnung dieser Ausdrücke ist viel weniger umständlich, als es auf den ersten Blick erscheint. Sodann ist diese Form auch der entwickelten Form vorzuziehen, weil diese Brüche bereits die Werte von μ_3, bezw. μ_4 geben. Hat man also ein Wertsystem μ_3, μ_4 erhalten, welches die Gleichungen 7) und 8) befriedigt, d. h. welches die linken Seiten der Gleichungen gleich den rechten macht, so ist damit auch sofort μ_1 und μ_4 gefunden. Allerdings sind die hier gefundenen beiden Gleichungen etwas komplizierter als die Gleichungen 1), 2), 3), 4). Dennoch werden sie in der Praxis bequemer, weil die numerische Auswertung von zwei Unbekannten durch Variation ihrer Werte (empirische Bestimmung der Differentialquotienten) sich wesentlich einfacher gestaltet, als die in derselben Art vorzunehmende Bestimmung von vier Unbekannten.

Ausgleichung von Triangulierungen nach der Methode der kleinsten Produkte.

Nach einem von Herrn Oberingenieur Sigmund Wellisch am 20. Dezember 1907 in der Fachgruppe der Bau- und Eisenbahn-Ingenieure des österr. Ingenieur- und Architektenvereines gehaltenen Vortrage,

bearbeitet von **Dr. Th. Dokulil**, Adjunkt an der k. k. Techn. Hochschule in Wien.

Wenn man Beobachtungsdaten, welche einer oder mehreren Bedingungen Genüge leisten sollen, nach der Methode der kleinsten Quadrate einer Ausgleichung unterzieht, so kann es theoretisch vorkommen, daß man auf Grund dieser Ausgleichung für die Beobachtungsgrößen Werte erhält, welche mit der Wirklichkeit in offenbarem Widerspruche stehen und daher für eventuelle weitere Lagebestimmungen nicht verwendet werden können. Denkt man sich zum Beispiele in dem Dreiecke ABC (Fig. 1), in welchem die Richtungen CA und CB sehr wenig von einander verschieden sein sollen, der Punkt B von C aus gesehen jedoch effektiv auf der rechten Seite des Punktes A erscheint, die drei Winkel α, β und γ gemessen und nimmt man an, daß für dieselben die Beobachtungsresultate:

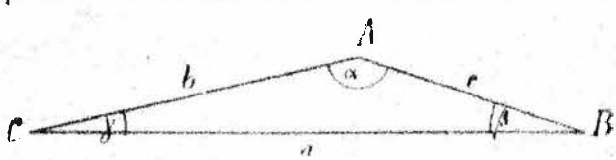

Fig. 1.

$$\alpha = 167^0\ 08'\ 50''$$
$$\beta = \ \ 12^0\ 51'\ 30''$$
$$\gamma = \ \ \ 0^0\ 00'\ 10''$$

erhalten wurden, so erhält man für die Summe der gemessenen Dreieckswinkel den Wert $180^0\ 00'\ 30''$, und es müßte daher, falls man die bekannten Grundsätze der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung dieser Beobachtungsresultate verwendet, jeder Winkel um den dritten Teil des Widerspruches, d. i. um $10''$ verkleinert werden, wodurch man für den Winkel γ den Wert $0^0\,00'\,00''$ erhalten würde. Sollte sich der Widerspruch größer als $30''$ ergeben, so ergäbe sich für diesen Winkel γ sogar ein negativer Wert, d. h. die Reihenfolge der Richtungen CA und CB würde durch die Ausgleichung der Beobachtungsresultate miteinander vertauscht werden. Während man also in dem astronomischen Fernrohre eines in dem Punkte C aufgestellten Instrumentes den Punkt B links von dem Punkte A erblickt, der Punkt B daher in Wirklichkeit ganz bestimmt rechts von A liegt, würde die Ausgleichung die relative Lage der Punkte A und B in einer der Wirklichkeit total widersprechenden Weise verändern, so daß man sagen kann, daß die Methode der kleinsten Quadrate in diesem Falle vollkommen versagt.

Diese, die richtige Lagebestimmung einzelner Punkte nachteilig beeinflussende Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate tritt jedoch nicht nur in dem vorstehend angeführten speziellen Falle auf, sondern sie wird stets, allerdings meistens in weniger auffallender Weise, das Resultat der Ausgleichung dann sein, wenn bei der Ausgleichung der Beobachtungsresultate auch bei Ausführung der Beobachtungen durch denselben Beobachter mit demselben Instrumente und unter demselben äußeren Verhältnissen nicht auf bestimmte, durch die Wirklichkeit als feststehend normierte Verhältnisse Rücksicht genommen wird.

Um nun diese ungerechtfertigte und die Wirklichkeit widersprechende Verbesserung einzelner Beobachtungsgrößen zu vermeiden, hat Oberingenieur Wellisch ein neues, in seiner Wirksamkeit als äußerst günstig zu bezeichnendes Verfahren angegeben, welches er die «Methode der kleinsten Produkte» nennt und welches in innigem Zusammenhange mit den Lehren der Elastizität steht.

Das Grundprinzip dieser Methode der kleinsten Produkte, welche man insbesondere mit großem Vorteile für die Ausgleichung von Dreiecksnetzen in Anwendung bringen kann, besteht darin, daß man das geodätische Dreiecksnetz in ähnlicher Weise wie ein elastisches System behandelt und demzufolge bei der Berechnung der zu bestimmenden Größen auch auf die Längen der einzelnen Seiten Rücksicht nimmt. Bei der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes, beziehungsweise der mehrfachen Bestimmung eines Punktes durch Einschneiden hat man meistens die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen auszuführen, deren Fehlergleichungen bekanntlich die allgemeine Form

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y - l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y - l_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= a_n x + b_n y - l_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

haben, wenn x und y die zu bestimmenden Koordinaten, beziehungsweise die an vorher bestimmte Näherungswerte derselben anzubringenden Korrektionen sind. Durch entsprechende Wahl der Koeffizienten a und b der Unbekannten, bezw. durch Transformation der zur Ermittlung der Unbekannten dienenden Bestimmungsgleichungen kann man es in den meisten Fällen dahin bringen, daß die Absolutglieder l der obigen Fehlergleichungen entweder direkte, in dem auszugleichenden Netze erscheinende Längen, oder aber Proportionalfunktionen s solcher Längen sind. Während nun durch die Methode der kleinsten Quadrate diejenigen Werte bestimmt werden, welche die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler v zu einem Minimum machen, geht Wellisch darauf aus, jene Werte der Unbekannten x und y zu ermitteln, durch welche die Summe der auf die Längeneinheit von l oder s bezogenen Fehlerquadrate den kleinsten Wert erhält. An Stelle der der Methode der kleinsten Quadrate zu Grunde liegenden Gleichung

$$[v\,.\,v] = \text{Min.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

tritt daher für die Methode der kleinsten Produkte die Bedingung

$$\left[\frac{vv}{s}\right] = \text{Min.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

beziehungsweise

$$\left[\frac{pvv}{s}\right] = \text{Min.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

sobald die Werte l mit verschiedenen Genauigkeiten beobachtet, also auch mit verschiedenen Gewichten p behaftet sind. Wellisch nennt nun die auf Grund dieser Minimumsbedingungen erhaltenen Werte der Unbekannten x und y die «natürlichsten Werte» derselben und bezeichnet infolgedessen die in diesen Gleichungen erscheinenden Koeffizienten $\frac{1}{s}$ beziehungsweise $\frac{p}{s}$ als die «natürlichen Gewichte» der Beobachtungen. Führt man für diese letzteren das Symbol π ein, so nehmen die Gleichungen 3) und 4) die Form

$$[\pi vv] = \text{Min.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

an und es deckt sich die weitere Behandlung der Ausgleichung vollkommen mit derjenigen der Methode der kleinsten Quadrate. Die Hauptaufgabe der Methode der kleinsten Produkte besteht daher in der Bestimmung der natürlichen Gewichte π und es soll nun im folgenden gezeigt werden, daß diese bei der Ausgleichung von Triangulierungen durch die Längen der Dreieckseiten gegeben sind und daß die Methode selbst mit den Grundsätzen der Elastizitätslehre in innigem Zusammenhange steht.

Denkt man sich ein vorliegendes auszugleichendes Dreiecksnetz als System von elastischen Stäben, welche in ihren Knotenpunkten gelenkartig mit einander verbunden sind, so kann jeder dieser Stäbe bei einer Einwirkung von äußeren Kräften auf die Knotenpunkte des Systemes nur in seiner Länge geändert, oder um einen seiner Endpunkten gedreht, auf keinen Fall aber auf Biegung beansprucht werden. Die in den Stäben auftretenden Spannungen können also nur Zug- oder Druckspannungen sein, und die Stäbe müssen stets ihre geradlinige Form beibehalten, d. h. der Lageveränderung jedes einzelnen Punktes eines

Stabes entspricht der gleiche Verdrehungswinkel, dessen Scheitel in einem Endpunkte des Stabes liegt. Ein solches System ist völlig analog mit einem geodätischen Triangulierungsnetze, denn auch in diesem können durch Beobachtungsfehler, welche in den Dreieckspunkten unvermeidlich auftreten und welche identisch sind mit den äußeren Kräften eines elastischen Systems, entweder Verlängerungen oder Verkürzungen der Dreiecksseiten oder Verschwenkungen derselben bewirkt werden, während die geradlinige Form der Dreiecksseiten stets erhalten bleibt. Ein nach der obigen Definition gebildetes Stabsystem nennt man «statisch bestimmt», sobald die Anzahl seiner Stäbe so groß ist, daß sie gerade hinreicht, um die geometrische Figur des Systemes eindeutig zu bestimmen, in welchem Falle die nur bei Einwirkung äußerer Kräfte in den Stäben auftretenden Spannungen, beziehungsweise die durch diese Kräfte bewirkten Lageveränderungen der Stäbe auch auf elementarem Wege nach den Regeln der Statik starrer Systeme berechenbar sind. Treten dagegen zu einem Systeme noch sogenannte «überzählige» Stäbe hinzu, welche für die Bestimmung der geometrischen Figur des Systemes nicht unbedingt erforderlich sind, und durch deren Einschaltung ohne Einwirkung äußerer Kräfte dann Spannungen in die übrigen Stäbe gebracht werden können, wenn sie nicht genau die durch die Entfernung der Knotenpunkte bedingten Längen haben, so heißt das System «statisch unbestimmt», und es muß die Berechnung der Stabspannungen sowohl bei der Einwirkung äußerer Kräfte als auch bei nicht genau passender Länge der Stäbe auf Grund der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme mit Rücksicht auf die Elastizitätsverhältnisse des Materiales vorgenommen werden. Auch hier zeigt sich wieder die Analogie mit einem geodätischen Dreiecksnetze. Werden in einem solchen nämlich nur die für die Auflösung desselben notwendigen Stücke gemessen, so kann seine Auflösung und Berechnung auf elementarem, trigonometrischen Wege erfolgen und es können Fehler in den Dreiecksseiten oder Verschwenkungen derselben nur bei angenommenen oder nach irgend einer Voraussetzung berechneten Fehlern der für die Bestimmung des Dreiecksnetzes ausgeführten Messungen oder Beobachtungen festgestellt werden. Führt man jedoch neben den für die Festlegung der Form des Dreiecksnetzes notwendigen Messungen auch noch sogenannte «überschüssige Beobachtungen» aus, so müssen sämtliche beobachteten Werte vor ihrer Verwertung zur Auflösung des Dreiecksnetzes in Bezug auf gewisse durch die Form des Netzes bestimmte Bedingungen ausgeglichen werden. Infolge dieser Ausgleichung werden sich für die Richtungen und Längen der Dreiecksseiten Verbesserungen ergeben, und zwar ist es für die Berechnung dieser Verbesserungen nicht notwendig, die unmittelbar beobachteten Stücke des Dreiecksnetzes von vorneherein mit bestimmten numerischen Fehlern behaftet anzusehen.

Hat man nun die in einem elastischen Systeme der angegebenen Art bei der Einwirkung von äußeren Kräften auftretenden Stabdeformationen, beziehungsweise Stabverdrehungen zu bestimmen, so geschieht dies nach dem von Castigliano aufgestellten Prinzipe der kleinsten Deformationsarbeit, zufolge welchem diese Deformationen und Verdrehungen diejenigen sein werden, welche die Arbeit der sie bewirkenden Kräfte zu einem Minimum machen. Denkt man sich einen

Stab des Systemes, welcher die Länge s und den Querschnitt F hat und welcher an einem Ende gelenkartig festgehalten sei, so wird eine auf ihn in der Richtung der Achse wirkende Kraft P (Fig. 2) eine Verlängerung oder eine Verkürzung des Stabes von der Größe v hervorrufen, so daß die von der Kraft P geleistete Arbeit A durch die Gleichung

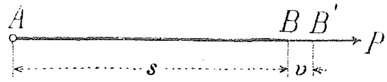

Fig. 2.

$$A = \int_0^v P . dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

gegeben ist. Nach dem Elastizitätsgesetze von H•ok ist nun

$$v = \frac{P . s}{F . E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

wenn E den Elastizitätsmodul des Materiales für Zug oder Druck darstellt. Eliminiert man aus den beiden Gleichungen 6) und 7) die wirksame Kraft P, so erhält man für die Berechnung der Deformationsarbeit die Relation

$$A = \frac{F . E}{s} . \int_0^v v . dv, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

welche durch die Ausführung der Integration in

$$A = \frac{F . E}{2\,s} . v^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

übergeht. Setzt man den für den betrachteten Stab konstanten Faktor $\frac{FE}{s} = \varepsilon$ und bestimmt man die Deformationsarbeit $\mathfrak{A}$ in dem ganzen Systeme, so ergibt sich

$$\mathfrak{A} = \Sigma A = \tfrac{1}{2}\,\Sigma(\varepsilon v^2), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

welche nach dem früher erwähnten Lehrsatze von Castigliano ein Minimum sein muß, so daß man für die Bestimmung der Deformationen v die Bedingung

$$\Sigma(\varepsilon . v^2) = \text{Min.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

erhält, welche auch dann gilt, wenn einzelne oder sämtliche Stäbe des Systemes durch die einwirkenden Kräfte um eines ihrer beiden Enden so gedreht werden, daß das zweite Ende den linearen Weg v beschreibt, wie dies in der Fig. 3 dargestellt ist. In diesem Falle ist es nur notwendig, den in dem Symbole ε vorkommenden Elastizitätsmodul E der Dehnung durch den Elastizitätskoeffizienten G der Gleitung zu ersetzen.

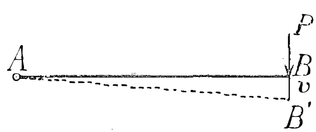

Fig. 3.

Die obige Gleichung, welche dem natürlichen Zustand des durch irgend welche Kräfte beanspruchten, elastischen Systemes entspricht, ist der äußeren Form nach vollkommen identisch mit jener Grundgleichung, welche der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes zu Grunde gelegt wird. Faßt man daher die Seiten des Dreiecksnetzes als die Stabachsen eines elastischen Systemes auf und nimmt man die Gelenke dieses Systemes als ideal, d. h. als vollkommen reibungslos an, so bestehen zwischen beiden Systemen keine die Deformationsmöglichkeiten beeinflußenden Unterschiede, und es liegt daher der Gedanke nahe, die Ausgleichung des Dreiecksnetzes mit derselben Grundlage der «natürlichsten Formveränderungen» vorzunehmen. Dieser Zweck wird dann erreicht, wenn für die Gewichte π der Gleichung 5) Werte gewählt werden, welche mit den die Form des Systemes bedingenden Elementen in demselben Zusammenhange stehen, wie die in der Gleichung 10) eingeführten Größen ε. Nimmt man daher für den in dem Ausdrucke für ε erscheinenden Elastizitätsmodul E das denselben in einem geodätischen Dreiecksnetze vertretende Gewicht p an und setzt man für den Wert der Querschnittsfläche des Stabes die Einheit, so erhält man die Beziehung

$$\pi = \varepsilon = \frac{p}{s}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 12)$$

durch deren Einführung in die Gleichung 11) bei gleichzeitiger Ersetzung des mechanischen Summenzeichens durch das dafür in der Ausgleichungsrechnung gebräuchliche Symbol man unmittelbar die Gleichung 5) erhält. Dadurch ist aber erwiesen, daß die Methode der kleinsten Produkte von Wellisch tatsächlich auf die natürliche Deformation Rücksicht nimmt, da die Grundbedingung 5) dieser Methode sich mit der Bedingung für die kleinste Deformation eines elastischen Systemes als identisch erweist. Der Name «Methode der kleinsten Produkte» erscheint deshalb gerechtfertigt, da die derselben zugrunde liegende Gleichung 11) der Mechanik, wie sich aus der Relation 6) ergibt, auch in der Form

$$\Sigma (Pv) = \text{Min.} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 13)$$

geschrieben werden kann, in welchem Falle die einzelnen Summanden der Minimumsbedingung als ein Produkt aus Ursache und Wirkung erscheinen. In die Theorie der Ausgleichungsrechnung übersetzt besagt die Gleichung 13), daß diejenigen Verbesserungen v als die zweckmäßigsten und günstigsten zu bezeichnen sind, für welche die Summe ihrer Produkte in die durch dieselben bewirkten Zwangslagen der einzelnen Elemente den kleinsten Wert erreicht.

Bei der Ausgleichung eines Triangulierungsnetzes handelt es sich nun nur um die Bestimmung von Richtungsverbesserungen; bezeichnet man diese mit v_r und die Längen dieser Richtungen wie früher mit s, so besteht zwischen ihnen und den Querverschiebungen v die Beziehung

$$v = \frac{s \,.\, v_r''}{\varrho''} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 14)$$

wenn mit ϱ die Verwandlungszahl vom Bogen in Sekunden bezeichnet wird und es ergibt sich dann nach Einführung der Werte v in die Gleichung 5) die Bedingung

$$[p s v_r v_r] = \text{Min.} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 15)$$

zur Bestimmung der Richtungsverbesserungen v_r nach der Methode der kleinsten Produkte.

Die natürlichen Gewichte π entsprechen nach dem Vorhergehenden für Querverschiebungen dem Quotienten $\frac{p}{s}$, für Richtungsverbesserungen dem Produkte ps. Mit Rücksicht auf die bekannte, zwischen dem Gewichte und dem mittleren Fehler einer Beobachtung bestehende Beziehung, erhält man für die den Gewichten π zugeordneten mittleren Fehler μ, welche sinngemäß als die »natürlichen« mittleren Fehler zu bezeichnen wären, die Gleichungen

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = K . \sqrt{s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 16)$$

für Querverschiebungen, und

$$\mu_r = \frac{1}{\sqrt{\pi_r}} = \frac{K}{\sqrt{s}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 17)$$

für Richtungsverbesserungen, wenn man die Größe $\frac{1}{\sqrt{p}} = K$ setzt. Aus der ersten dieser Gleichungen ergibt sich, daß die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Produkte mit dem Fehlergesetze direkt gemessener Längen im Einklange steht, da diese Gleichung unmittelbar das Quadratwurzelgesetz darstellt. Die zweite Gleichung drückt das ganz natürliche und fast ohne weiteres einleuchtende Gesetz aus, daß der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung von der Länge dieser Richtung abhängig ist und muß insofern mit der Erfahrung als übereinstimmend angesehen werden, als sie einer Richtung von größerer Länge einen kleineren mittleren Fehler zuordnet, u. zw. derart, daß sich die mittleren Fehler verkehrt verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Richtungslängen.

Daß dieses Fehlergesetz der Richtungsbeobachtungen der Wirklichkeit tatsächlich fast genau entspricht, zeigt die Übereinstimmung der mit ihm erhaltenen Werte mit den aus wiederholten Beobachtungen berechneten mittleren Fehlern. So sind z. B. nach der Instruktion für die preußische Katastralvermessung bestimmte von den Strahlenlängen abhängige mittlere Fehler der Richtungen anzunehmen, welche neben den aus der Gleichung 17) berechneten mittleren Fehlern und den aus der eventuell noch in Betracht kommenden Gleichung $m_r = \frac{K}{s}$ in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind. Die Konstante K ist dabei so angenommen, daß der mittlere Fehler, welcher sich für die Strahlenlänge von 2 *km* ergibt, mit dem durch die preußische Instruktion gegebenen Werte identisch ist, so daß die einzelnen Werte in einfacher Weise mit einander verglichen werden können.

Strahlenlänge s in *km*	Mittlerer Richtungsfehler nach der Preußischen Katastralinstr.	Formel $\mu_r = \frac{K}{\sqrt{s}}$	Formel $m_r = \frac{K}{s}$
1·0	11·7″	11·7″	16·6″
2·0	8·3″	8·3″	8·3″
6·5	5·0″	4·6″	2·5″
15·0	2·0″	3·0″	1·1″

Noch deutlicher als aus der vorstehenden Tabelle ist die Übereinstimmung des durch die Gleichung 17) bestimmten Richtungsfehlers mit seinem durch die Praxis gegebenen Werte aus der Fig. 4 zu ersehen. In dieser Figur, in welcher die den einzelnen Strahlenlängen x zugeordneten Richtungsfehler als Ordinaten y

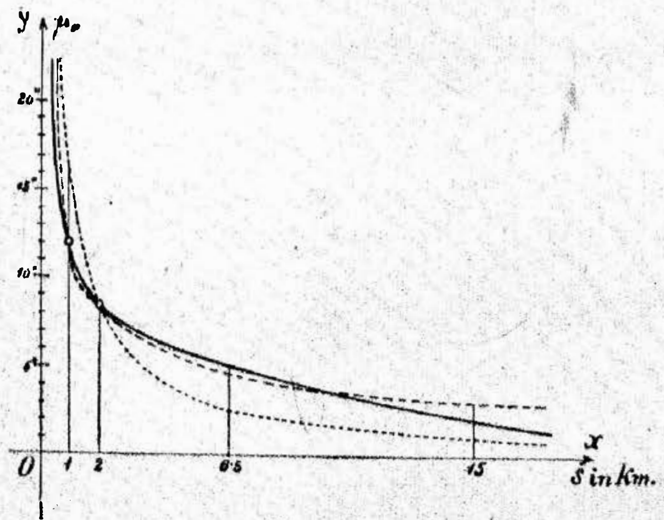

Fig. 4.

eines rechtwinkeligen Achsensystemes aufgetragen sind, ist die der Gleichung 17) entsprechende Kurve strichliert, die Verbindungslinie der für die preußische Katastralvermessung maßgebenden Richtungsfehler voll und die der Gleichung $m = \frac{K}{s}$ zugeordnete Linie punktiert dargestellt. Aus dem bloßen Anblick der Figur ersieht man, daß die beiden ersten Kurven in dem ganzen dargestellten Bereiche so nahe zusammenfallen, daß sie als mit einander identisch angenommen werden können.

Wendet man dieses von Oberingenieur Wellisch angegebene und schon im Jahre 1904 in der «Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen» unter dem Titel „Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme" eingehend besprochene Ausgleichungsprinzip auf das eingangs angegebene Dreieck ABC an, so hat man zunächst zu beachten, daß sich jeder Dreieckwinkel als die Differenz zweier beobachteter Richtungen darstellt; bezeichnet man die in dem Punkte A gemessenen Richtungen mit $\varrho_{A,B}$ und $\varrho_{A,C}$, die in dem Punkte B beobachteten Richtungen mit $\varrho_{B,A}$ und $\varrho_{B,C}$, sowie die in dem Punkte C erhaltenen Richtungen mit $\varrho_{C,A}$ und $\varrho_{C,B}$, so ist

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \varrho_{A,C} - \varrho_{A,B} \\ \beta &= \varrho_{B,A} - \varrho_{B,C} \\ \gamma &= \varrho_{C,B} - \varrho_{C,A} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18)$$

woraus sich die Verbesserungen v_α, v_β und v_γ dieser Winkel nach den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} v_\alpha &= v_{A,C} - v_{A,B} \\ v_\beta &= v_{B,A} - v_{B,C} \\ v_\gamma &= v_{C,B} - v_{C,A} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

ergeben, wenn für die Verbesserungen der einzelnen Richtung die Symbole $v_{A,B}$, $v_{A,C}$, $v_{B,A}$, $v_{B,C}$, $v_{C,A}$ und $v_{C,B}$ gewählt werden. Da diese Winkelverbesserungen v_α, v_β und v_γ den Winkelwiderspruch ω des Dreieckes zu Null ergänzen müssen, erhält man weiters die Bedingungsgleichung

$$(v_{A,C} + v_{B,A} + v_{C,B}) - (v_{A,B} + v_{B,C} + v_{C,A}) + \omega = 0 \quad . \quad . \quad 20)$$

für die Berechnung der Richtungsverbesserungen, welche in Verbindung mit der Gauß'schen Grundgleichung der Ausgleichsrechnung

$$\pi_{A,C} \,.\, v_{A,C}^2 + \pi_{A,B} \,.\, v_{A,B}^2 + \pi_{C,B} \,.\, v_{C,B}^2 + \pi_{C,A} \,.\, v_{C,A}^2 + \pi_{B,C} \,.\, v_{B,C}^2 + \pi_{B,A} \,.\, v_{B,A}^2 = \text{Min.} \quad \ldots \; 21)$$

nach Einsetzung der nach Wellisch als «natürlich» zu bezeichnenden Gewichte $\pi_{A\,C} = \pi_{C\,A} = b$, $\pi_{B\,C} = \pi_{C\,B} = a$ und $\pi_{A,B} = \pi_{B,A} = c$ die folgenden Resultate ergeben:

$$\left.\begin{aligned} v_{A,C} &= - v_{C,A} = - \frac{ac}{2(ab + bc + ac)} \,.\, \omega \\ v_{B,A} &= - v_{A,B} = - \frac{ab}{2(ab + bc + ac)} \,.\, \omega \\ v_{C,B} &= - v_{B\,C} = - \frac{bc}{2(ab + bc + ac)} \,.\, \omega \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \; 22)$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 19) ergibt sich daher

$$\left.\begin{aligned} v_\alpha &= - \frac{a\,.\,(b + c)}{2(ab + bc + ac)} \,.\, \omega \\ v_\beta &= - \frac{b\,.\,(a + c)}{2(ab + bc + ac)} \,.\, \omega \\ v_\gamma &= - \frac{c\,.\,(a + b)}{2(ab + bc + ac)} \,.\, \omega \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \; 23)$$

Um die bei der Ausgleichung noch unbekannten Seiten a, b, c, durch die Funktionen der gemessenen Dreieckswinkel α, β, γ auszudrücken, setze man

$$b = \frac{a\,.\,\sin\beta}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad c = \frac{a\,.\,\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

wodurch man schließlich, wie dies ebenfalls schon von Dr. A. Haerpfer in der «Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen» 1906, Seite 368, gezeigt wurde, für die Berechnung der Winkelverbesserungen die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} v_\alpha &= - \frac{\sin\alpha\,.\,(\sin\beta + \sin\gamma)}{2(\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\,.\,\sin\gamma)} \,.\, \omega \\ v_\beta &= - \frac{\sin\beta\,.\,(\sin\alpha + \sin\gamma)}{2\,.\,(\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\,.\,\sin\gamma)} \,.\, \omega \\ v_\gamma &= - \frac{\sin\gamma\,.\,(\sin\alpha + \sin\beta)}{2\,.\,(\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\,.\,\sin\gamma)} \,.\, \omega \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; 24)$$

erhält. Für das eingangs gewählte Beispiel ist:

$$\sin\alpha = 0{\cdot}2227$$
$$\sin\beta = 0{\cdot}1224$$
$$\sin\gamma = 0{\cdot}0000$$
$$\omega = 30'',$$

so daß sich für die Winkelverbesserungen die Werte

$$v_\alpha = -15''$$
$$v_\beta = -15''$$
$$v_\gamma = -0''$$

ergeben. Die mit diesen Verbesserungen berechneten, ausgeglichenen Werte der Dreieckswinkel entsprechen tatsächlich den durch die Beobachtung erhaltenen Lageverhältnissen der Dreieckspunkte und es werden daher diese Verbesserungen von Wellisch mit Recht als «natürliche Verbesserungen» bezeichnet. Die von Wellisch angegebene Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Produkte wurde von ihm auch schon bei praktischen Arbeiten mit großem Vorteile angewendet.

So führte er z. B. die Ausgleichung der für die Trassierung der zweiten Wiener Hochquellenleitung von ihm durchgeführten Triangulierungen nach diesem Verfahren aus und erreichte durch dasselbe bei der Richtungsangabe für die Stollen eine ganz bedeutende, bei der Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate kaum zu erreichende Genauigkeit.

Als Beispiel für diese Genauigkeit seien die bei der Absteckung des Grubbergstollens erhaltenen Resultate angeführt. Die Länge dieses Stollens beträgt rund 3670 *m*, die auf Grund der Ausgleichung der gemessenen Winkel nach der Methode der kleinsten Produkte berechnete Länge ergab gegen den nach dem Durchschlage direkt bestimmten Wert derselben einen Unterschied von 30 *cm*, die Querabweichung beim Durchschlage des Stollens war 6 *mm* und der Niveauunterschied der Vereinigungsstellen der von den beiden Seiten getriebenen Stollenteile hatte eine Größe von 13 *mm*. Hätte man die Ausgleichung nach der gewöhnlichen Methode der kleinsten Quadrate ausgeführt, so hätte die Querabweichung 33 *mm* betragen, so daß man sagen kann, daß die Methode der kleinsten Produkte sich zirka 5 bis 6mal so genau erwiesen hat, wie diejenige der kleinsten Quadrate.

Die neue Methode der Ausgleichung, welche von Oberingenieur Wellisch angegeben wurde, und deren Anwendung für Triangulierungen in dem eingangs zitierten Vortrage besprochen wurde, ist mithin nicht nur theoretisch einwandfrei, sondern es ist ihr Vorteil gegenüber der bisherigen Methode auch schon durch praktische Arbeiten dargetan, so daß Herr Oberingenieur Wellisch zu diesen Resultaten seiner eingehenden Forschungen auf dem Gebiete der Ausgleichsrechnung bestens beglückwünscht werden kann.

Über die Methode der kleinsten Quadrate.

Von **S. Wellisch**, Oberingenieur des Wiener Stadtbauamtes.

(Nach einem am 29. November 1907 im Verein der k. k. Vermessungsbeamten an der Technischen Hochschule in Wien gehaltenen Vortrage.)

(Schluß.)

III. Über die Berechnung der Fehlerquadratsumme.

Als Zahlenbeispiel benützen wir die in Prof. Eggert's Geodäsie enthaltene Reihe von Längenmessungen: