Paper-ID: VGI_190836

Über die Lösung der Gleichungen im Problem der 8 Punkte

Norbert Herz [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **6** (11), S. 329–331

1908

BibTeX:

```
@ARTICLE{Herz_VGI_190836,
Title =  {{\"U}ber die L{\"o}sung der Gleichungen im Problem der 8 Punkte},
Author =  {Herz, Norbert},
Journal =  {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages =  {329--331},
Number =  {11},
Year =  {1908},
Volume =  {6}
}
```

Über die Lösung der Gleichungen im Problem der 8 Punkte.

Von Universitäts-Dozent Prof. Dr. **Norbert Herz** in Wien.

Die Lage von 8 Punkten gegeneinander ist (bis auf den Maßstab, der erst bekannt wird, wenn irgend eine Längendimension gemessen wurde) völlig bestimmt, wenn von jedem von drei Standpunkten aus die sämtlichen fünf übrigen anvisiert und damit die Zwischenwinkel bestimmt wurden. Es seien in dieser Weise von dem Standpunkte P_1 aus die vier Zwischenwinkel zwischen den anvisierten Punkten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 gemessen, gleich α_1, α_2, α_3, α_4; ebenso von dem Standpunkte P_2 aus die vier Winkel zwischen den fünf anvisierten Punkten (in derselben Reihenfolge angenommen) β_1, β_2, β_3, β_4; und endlich vom Standpunkte P_3 aus die vier Winkel γ_1, γ_2, γ_3, γ_4. Die Aufgabe läßt sich auf die Bestimmung von 4 Unbekannten aus 4 Gleichungen reduzieren; als Unbekannte treten dabei die 4 Winkel μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 auf, welche die Verbindungslinien des Punktes Q_3 mit den Punkten Q_2, P_1, P_2, P_3, Q_4 einschließen. Man erhält die folgende Lösung.*) Setzt man

$$
\begin{array}{ll}
m_1 = + \sin\gamma_1 \sin\alpha_2 \sin\beta_3 & n_1 = + \sin\alpha_4 \sin\gamma_3 \sin\beta_3 \\
m_2 = - \sin\gamma_3 \sin\alpha_2 \sin\beta_1 & n_2 = - \sin\alpha_3 \sin\gamma_3 \sin\beta_4 \\
m_3 = + \sin\gamma_3 \sin\alpha_1 \sin\beta_2 & n_3 = + \sin\alpha_3 \sin\gamma_4 \sin\beta_3 \\
p_1 = + \sin\alpha_3 \sin\beta_3 & q_1 = + \sin\beta_4 \sin\gamma_2 \\
p_2 = - \sin\beta_3 \sin\alpha_2 & q_2 = - \sin\beta_3 \sin\gamma_3 \\
\varkappa_1 = \beta_2 + \beta_1 - \alpha_2 - \alpha_1 & \vartheta_1 = \beta_3 + \beta_4 - \gamma_3 - \gamma_4 \\
\varkappa_2 = \gamma_2 + \gamma_1 - \alpha_2 - \alpha_1 & \vartheta_2 = \alpha_3 + \alpha_4 - \gamma_3 - \gamma_4 \\
\varkappa_3 = \gamma_2 + \gamma_1 - \beta_2 - \beta_1 & \vartheta_3 = \alpha_3 + \alpha_4 - \beta_3 - \beta_4
\end{array}
$$

so werden die vier zu lösenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
m_1 \sin(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \sin(\mu_3 + \varkappa_1) + m_2 \sin(\mu_1 + \mu_2) \sin(\mu_2 + \mu_3 + \varkappa_2) + \\
+ m_3 \sin\mu_1 \sin(\mu_3 + \varkappa_3) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \; 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n_1 \sin(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) \sin(\mu_2 + \vartheta_1) + n_2 \sin(\mu_3 + \mu_4) \sin(\mu_2 + \mu_3 + \vartheta_2) + \\
+ n_3 \sin\mu_4 \sin(\mu_2 + \vartheta_3) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \; 2)
\end{aligned}
$$

$$p_1 \sin(\mu_1 + \alpha_2) \sin(\mu_3 + \mu_4 + \beta_3) + p_2 \sin(\mu_1 + \mu_2 + \beta_3) \sin(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \alpha_3) = 0 \; . \; 3)$$

$$q_1 \sin(\mu_4 + \gamma_3) \sin(\mu_1 + \mu_2 + \beta_2) + q_2 \sin(\mu_3 + \mu_4 + \beta_3) \sin(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \gamma_3) = 0 \; . \; 4)$$

Durch eine einfache Umformung gelingt es jedoch, noch zwei Unbekannte aus diesen Gleichungen zu eliminieren.

Zu diesem Zwecke können die Gleichungen 3) und 4) so geschrieben werden, daß dieselben eine Unbekannte weniger enthalten. Löst man dieselben zum Beispiel zunächst nach μ_1 auf, um μ_1 zu eliminieren, so erhält man:

Aus der Gleichung 3):

$$
\begin{aligned}
\sin\mu_1 [p_1 \sin(\mu_3 + \mu_4 + \beta_3) \cos\alpha_2 + p_2 \sin(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \alpha_3) \cos(\mu_2 + \beta_3)] = \\
= - \cos\mu_1 [p_1 \sin(\mu_3 + \mu_4 + \beta_3) \sin\alpha_2 + p_2 \sin(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \alpha_3) \sin(\mu_2 + \beta_3)];
\end{aligned}
$$

*) Siehe des Verfassers Abhandlung: «Eine Verallgemeinerung des Problems des Rückwärtseinschneidens; das Problem der acht Punkte» in ‚Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften' in Wien, math.-naturwissenschaftl. Klasse, Bd. CXIII, Abt. IIa, S. 355 und des Verfassers «Geodäsie», S. 276.

Aus der Gleichung 4):

$$\sin\mu_1\,[q_1 \sin(\mu_4 + \gamma_3)\cos(\mu_2 + \beta_3) + q_2 \sin(\mu_2 + \mu_4 + \beta_3)\cos(\mu_2 + \mu_3 + \gamma_3)] =$$
$$= -\cos\mu_1\,[q_1 \sin(\mu_4 + \gamma_3)\sin(\mu_2 + \beta_3) + q_2 \sin(\mu_3 + \mu_4 + \beta_3)\sin(\mu_2 + \mu_3 + \gamma_3)].$$

Setzt man die hieraus folgenden Werte von tang μ_1 einander gleich und befreit von Nennern, so folgt nach einigen leichten Reduktionen:

$$p_1 q_1 \sin(\mu_4 + \gamma_3)\sin(\mu_3 + \beta_2 - \alpha_2) + p_1 q_2 \sin(\mu_3 + \mu_4 + \beta_3)\sin(\mu_2 + \mu_3 + \gamma_2 - \alpha_2) +$$
$$+ p_2 q_2 \sin(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \alpha_3)\sin(\mu_3 + \gamma_3 - \beta_2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

Diese Gleichung, zusammengestellt mit Gleichung 2), enthält nur mehr die Unbekannten μ_2, μ_3, μ_4.

Genau in derselben Weise erhält man durch Elimination von μ_4 aus den Gleichungen 3) und 4) die Gleichung

$$p_1 q_1 \sin(\mu_1 + \alpha_2)\sin(\mu_3 + \beta_3 - \gamma_3) + p_2 q_1 \sin(\mu_1 + \mu_2 + \beta_3)\sin(\mu_2 + \mu_3 + \alpha_2 - \gamma_2) +$$
$$+ p_2 q_2 \sin(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \gamma_3)\sin(\mu_3 + \alpha_3 - \beta_3) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6)$$

welche Gleichung ebenfalls mit 1) zusammengestellt werden kann, indem beide nur mehr die Unbekannten μ_1 μ_2 und μ_3 enthalten.

Die Gleichungen 5) und 6) sind zwei Gleichungen, die an Stelle von 3) und 4), aus denen sie durch einfache Umformung entstanden sind, verwendet werden können, so daß man jetzt eigentlich die vier Gleichungen 1), 2), 5) und 6) hat, die noch dieselben vier Unbekannten enthalten, jedoch so, daß sich aus 2) und 5) leicht μ_4, hingegen aus 1) und 6) leicht μ_1 eliminieren läßt.

Aus den Gleichungen 5) und 2) lassen sich, wieder in derselben einfachen, oben auseinandergesetzten Weise die Werte von tang μ_4 suchen; setzt man die Werte einander gleich, so erhält man eine Gleichung, in welcher nur die beiden Unbekannten μ_2 und μ_3 vorkommen.

Auf demselben Wege erhält man aus den Gleichungen 6) und 1) durch Gleichstellung der Werte von tang μ_1 eine Gleichung, in der ebenfalls nur dieselben beiden Unbekannten vorkommen, so daß man schlieslich die beiden Gleichungen hat:

$$\frac{\begin{array}{c} p_1 q_1 \sin(\mu_3 + \beta_2 - \alpha_2)\sin\gamma_3 + p_1 q_2 \sin(\mu_2 + \mu_3 + \gamma_2 - \alpha_2)\sin(\mu_3 + \beta_3) + \\ + p_2 q_2 \sin(\mu_3 + \gamma_3 - \beta_2)\sin(\mu_2 + \mu_3 + \alpha_3) \end{array}}{\begin{array}{c} p_1 q_1 \sin(\mu_3 + \beta_2 - \alpha_2)\cos\gamma_3 + p_1 q_2 \sin(\mu_2 + \mu_3 + \gamma_2 - \alpha_2)\cos(\mu_3 + \beta_3) + \\ + p_2 q_2 \sin(\mu_3 + \gamma_3 - \beta_2)\cos(\mu_2 + \mu_3 + \alpha_3) \end{array}} =$$
$$= \frac{n_1 \sin(\mu_3 + \vartheta_1)\sin(\mu_2 + \mu_3) + n_2 \sin(\mu_2 + \mu_3 + \vartheta_2)\sin\mu_3}{n_1 \sin(\mu_3 + \vartheta_1)\cos(\mu_2 + \mu_3) + n_2 \sin(\mu_2 + \mu_3 + \vartheta_2)\cos\mu_3 + n_3 \sin(\mu_3 + \vartheta_3)} \qquad 7)$$

Jeder dieser Brüche ist gleich — tang μ_4.

$$\frac{\begin{array}{c} p_1 q_1 \sin(\mu_2 + \beta_3 - \gamma_3)\sin\alpha_2 + p_2 q_1 \sin(\mu_2 + \mu_3 + \alpha_2 - \gamma_2)\sin(\mu_2 + \beta_3) + \\ + p_2 q_2 \sin(\mu_2 + \alpha_3 - \beta_3)\sin(\mu_2 + \mu_3 + \gamma_3) \end{array}}{\begin{array}{c} p_1 q_1 \sin(\mu_2 + \beta_3 - \gamma_3)\cos\alpha_2 + p_2 q_1 \sin(\mu_2 + \mu_3 + \alpha_2 - \gamma_2)\cos(\mu_2 + \beta_3) + \\ + p_2 q_2 \sin(\mu_2 + \alpha_3 - \beta_3)\cos(\mu_2 + \mu_3 + \gamma_3) \end{array}} =$$
$$= \frac{m_1 \sin(\mu_2 + \varkappa_1)\sin(\mu_2 + \mu_3) + m_2 \sin(\mu_2 + \mu_3 + \varkappa_2)\sin\mu_2}{m_1 \sin(\mu_2 + \varkappa_1)\cos(\mu_2 + \mu_3) + m_2 \sin(\mu_2 + \mu_3 + \varkappa_2)\cos\mu_2 + m_3 \sin(\mu_2 + \varkappa_3)} \qquad 8)$$

Jeder dieser Brüche ist gleich — tang μ_1.

Die Gleichungen 7) und 8) können nun allerdings ebenfalls noch von Nennern befreit werden. Führt man dieses aus, so erhält man noch Ausdrücke von der Form $A\,(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi)$, welche sich zusammenfassen lassen; allein die resultierenden Gleichungen sind derart, daß es doch besser scheint, die beiden Gleichungen in der vorliegenden Form zu verwenden. In allen Fällen hat man ja die Gleichungen durch Versuche (aufeinanderfolgende Näherungen) zu lösen, und infolge der Form, in welcher hier die Ausdrücke im Zähler und Nenner auftreten, wird die Berechnung relativ einfach. Jeder dieser vier Brüche hat nämlich die Form

$$\frac{p_1 \sin P_1 + p_2 \sin P_2 + p_3 \sin P_3}{p_1 \cos P_1 + p_2 \cos P_2 + p_3 \cos P_3}$$

und die Berechnung dieser Ausdrücke ist viel weniger umständlich, als es auf den ersten Blick erscheint. Sodann ist diese Form auch der entwickelten Form vorzuziehen, weil diese Brüche bereits die Werte von μ_1, bezw. μ_2 geben. Hat man also ein Wertsystem μ_3, μ_4 erhalten, welches die Gleichungen 7) und 8) befriedigt, d. h. welches die linken Seiten der Gleichungen gleich den rechten macht, so ist damit auch sofort μ_1 und μ_2 gefunden. Allerdings sind die hier gefundenen beiden Gleichungen etwas komplizierter als die Gleichungen 1), 2), 3), 4). Dennoch werden sie in der Praxis bequemer, weil die numerische Auswertung von zwei Unbekannten durch Variation ihrer Werte (empirische Bestimmung der Differentialquotienten) sich wesentlich einfacher gestaltet, als die in derselben Art vorzunehmende Bestimmung von vier Unbekannten.

Ausgleichung von Triangulierungen nach der Methode der kleinsten Produkte.

Nach einem von Herrn Oberingenieur Sigmund Wellisch am 20. Dezember 1907 in der Fachgruppe der Bau- und Eisenbahn-Ingenieure des österr. Ingenieur- und Architektenvereines gehaltenen Vortrage,

bearbeitet von **Dr. Th. Dokulil**, Adjunkt an der k. k. Techn. Hochschule in Wien.

Wenn man Beobachtungsdaten, welche einer oder mehreren Bedingungen Genüge leisten sollen, nach der Methode der kleinsten Quadrate einer Ausgleichung unterzieht, so kann es theoretisch vorkommen, daß man auf Grund dieser Ausgleichung für die Beobachtungsgrößen Werte erhält, welche mit der Wirklichkeit in offenbarem Widerspruche stehen und daher für eventuelle weitere Lagebestimmungen nicht verwendet werden können. Denkt man sich zum Beispiele in dem Dreiecke ABC (Fig. 1), in welchem die Richtungen CA und CB sehr wenig von einander verschieden sein sollen, der Punkt B von C aus gesehen jedoch effektiv auf der rechten Seite des Punktes A erscheint, die drei Winkel α, β und γ gemessen und nimmt man an, daß für dieselben die Beobachtungsresultate:

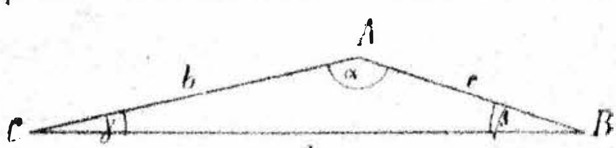

Fig. 1.