Paper-ID: VGI_190821

Zum Rückwärtseinschneiden

Adolf Klingatsch [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **6** (6), S. 167–174

1908

BibTeX:

```
@ARTICLE{Klingatsch_VGI_190821,
Title = {Zum R{\"u}ckw{\"a}rtseinschneiden},
Author = {Klingatsch, Adolf},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {167--174},
Number = {6},
Year = {1908},
Volume = {6}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Obergeometer Max Reinisch.

Nr. 6. Wien, am 1. Juni 1908. VI. Jahrgang.

Zum Rückwärtseinschneiden.

Von Prof. A. Klingatsch in Graz.

Sind für die Punktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden nur drei Punkte verfügbar, so daß eine Ausgleichung nicht möglich ist, so ist es für die Genauigkeit des zu bestimmenden Punktes P im allgemeinen günstig, wenn P im Dreiecke der drei gegebenen Punkte A, B, C, (Fig. 1), oder außerhalb desselben, einer ausspringenden Ecke gegenüberliegt.

Da nun die örtliche Lage von P häufig bereits durch andere Verhältnisse gegeben ist, so muß man, wenn der Voraussetzung gemäß nur drei Punkte zu benützen sind, in welchen eben keine Aufstellungen erfolgen können oder sollen, auch mit ungünstigeren Lagen von P zum gegebenen Dreieck rechnen, insbesondere, wenn es sich nicht um sonderlich genaue Punktbestimmungen handelt. Hieher gehören beispielsweise Einschaltungen in das Netz IV. Ordnung zur Gewinnung von Abschlußpunkten für minder wichtige Polygonzüge, um eben letztere nicht bis zu den Netzpunkten führen zu müssen, sondern bereits dort abbrechen zu können, wo diese Züge für die Aufnahme nicht mehr gebraucht werden. Auch für die Gewinnung neuer Meßtischstandpunkte können im Sinne der neuen Instruktion für Meßtischaufnahmen derartige Punkteinschaltungen mit dem Theodolit Anwendung finden, ferner für den Abschluß von Tachymeter- und Bussolenzügen u. dgl.

Wir wollen hier den mitunter vorkommenden Fall behandeln, wo der zu bestimmende Punkt Q die in der Figur ersichtliche Lage zum Dreieck ABC hat, also nahezu in die Verlängerung einer Dreieckseite AB fällt.

Würde man für die Berechnung nach der Burkhart'schen Formel den Winkel $AQB = \alpha$ und $\sphericalangle BQC = \beta$ setzen, so hätte dies, da α sehr klein ist, Unbequemlichkeiten in der Rechnung zur Folge.

Es ist in diesem Falle zweckmäßiger, wenn man den Winkel $BQC = \alpha$ und $\sphericalangle CQA = \beta$ setzt, doch ist dann eine Überlegung bezüglich der Quadranten der Winkel φ und ψ nötig. Jordan[1]) hat in diesem Falle empfohlen, mit der Zweideutigkeit der beiden Winkel φ und ψ so lange fortzurechnen, bis man zur Berechnung der Entfernungen kommt und sodann jenes Paar der Winkel φ und ψ zu verwenden, welches auf positive Entfernungen führt.

Man kann nun die Berechnung in dem Falle wesentlich vereinfachen, wenn sich der zu bestimmende Punkt überhaupt in die gerade Linie AB einschalten läßt, ohne daß daraus ein Nachteil bezüglich der Benützung dieses Punktes erwächst. Für die Lösung der Aufgabe ist eine im allgemeinen jedoch nur geringe Bewegungsfreiheit in der zu AB senkrechten Richtung vorausgesetzt.

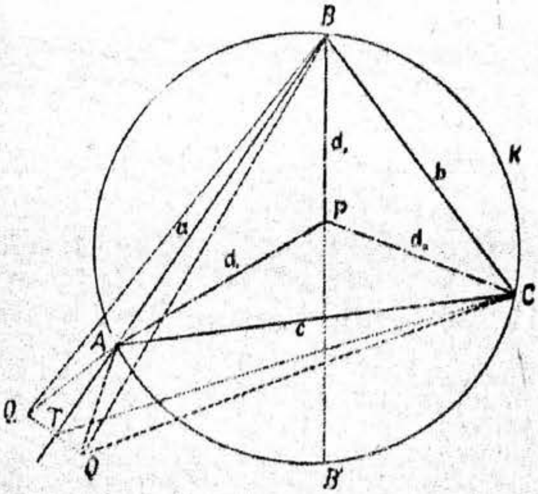

Fig. 1.

Wäre etwa T der eingeschaltete Punkt und $\sphericalangle BTC = \sphericalangle ATC$ der in T gemessene Winkel, so können, wenn von dem Fehler der Einschaltung in die gerade Linie vorläufig abgesehen wird, die Koordinaten von T auf zwei Wegen nach den für das Seitwärtsabschneiden von C geltenden Formeln gerechnet werden; zunächst mit Benützung von b und dem Winkel $CBA = CBT$ und sodann mit Verwendung von c und dem Winkel $CAT = 180 - BAC$, wobei die Entfernungen und Winkel aus den Koordinaten der drei gegebenen Punkte A, B, C folgen.

Ehe wir diesen Sonderfall weiter ausführen, sollen einige das Rückwärtseinschneiden betreffende Genauigkeitsbetrachtungen vorausgeschickt werden, wobei wir uns der nachstehenden von Jordan[2]) gegebenen Ausdrücke für den mittleren Punktfehler bedienen.

Werden in dem zu bestimmenden Punkte P (Fig. 1) die drei Winkel $APB = \alpha$, $BPC = \beta$ und $CPA = \gamma$ gleich genau mit dem mittleren Fehler δ gemessen und die Gewichte der Einheit gleich gesetzt, so ist der mittlere Punktfehler $M_{\alpha\beta\gamma}$ von P mit den in der Figur ersichtlichen Bezeichnungen gegeben durch

$$M_{\alpha\beta\gamma}^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{D^2}{P^4} \cdot d_1^2 d_2^2 d_3^2 \left(\frac{d_1^2}{a^2 c^2} + \frac{d_2^2}{a^2 b^2} + \frac{d_3^2}{b^2 c^2} \right) \delta^2 \quad . \; . \; . \; . \; 1)$$

Hierin bedeutet D den Durchmesser des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises K und

$$P^2 = \overline{PB} . \overline{PB'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

die Potenz des Punktes P in Bezug auf K.

---

[1]) Handbuch der Vermessungskunde, II. Band, 3. Auflage 1888.

[2]) Handbuch der Vermessungskunde, I. Band, 1877 und 1888.

Sind nur die beiden Winkel $\alpha\beta$ gleich genau mit dem mittleren Fehler δ gemessen und werden deren Gewichte so wie früher angenommen, so folgt der Punktfehler $M_{\alpha,\beta}$ aus

$$M_{\alpha,\beta}^2 = \frac{D^2}{P^4} d_1^2 d_2^2 d_3^2 \left(\frac{d_1^2}{a^2 c^2} + \frac{d_3^2}{b^2 c^2} \right) \delta^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Die Gleichungen 1) und 3) geben auch den mittleren Punktfehler in dem Falle, wo der zu bestimmende Punkt in einer Dreiecksseite liegt, wobei für uns nur die Verlängerung dieser Seite bezüglich der Punktlage in Frage kommt, da sonst das Einschalten umständlicher wird und übrigens dann auch kein Bedürfnis für diese Modifikation des Rückwärtseinschneidens vorliegt.

Wäre also T in der Verlängerung von AB gelegen, so ist in 1) oder 3)

$$d_1 = d_2 - a,\ P^2 = d_1 d_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

zu setzen.

Tatsächlich handelt es sich auch in diesem Falle um einen Rückwärtseinschnitt, derart, daß bei Anwendung von 1) die beiden Winkel ATC und CTA, hingegen bei Anwendung von 3) lediglich der Winkel ATC gemessen wird, während in beiden Fällen der Winkel $ATB = o$ sein soll. In der Regel wird bei der Aufstellung des Instrumentes in T nur der näher gelegene Punkt A eingestellt werden können, so daß die Kontrolle der Einschaltung in die gerade Linie durch Einstellen auf A und B nur dann möglich sein wird, wenn die Visur von T nach B über A geht.

Der Punkt ist demnach so genau in die Gerade AB einzuschalten, daß der Winkel ATB, welcher sich durch die mittlere Abweichung des Punktes T senkrecht zu AB ergibt, gleich oder besser kleiner ist, als der Fehler δ einer direkten Winkelmessung.

An die erste Voraussetzung ist strenge genommen die Anwendung von 1) resp. 3) in diesem speziellen Falle gebunden.

Bisher war lediglich von Winkelmessungen die Rede. Die Gleichung 1) gilt auch für Richtungsmessungen, indem die drei gemessenen und auf den Horizont ausgeglichenen Winkel α, β, γ hinsichtlich der Genauigkeit äquivalent sind einem Satze direkt gemessener Richtungen nach A, B, C, deren Gewichte $= 3$ zu setzen sind, wenn man wie früher das Gewicht eines gemessenen Winkels $= 1$ angenommen hat. Mit anderen Worten: Die Gleichung 1) gibt auch den Punktfehler für drei Sätze über ABC, wenn jeder in beiden Fernrohrlagen gemessenen Richtung das Gewicht $= 1$ und somit jeder ausgeglichenen Richtung das Gewicht $= 3$ erteilt wird; δ ist dann der mittlere Fehler einer in beiden Fernrohrlagen gemessenen Richtung.

Wir wollen nun die Gleichungen 1) und 3) für den Fall eines gleichschenkeligen Dreieckes ABC (Fig. 2) und einige Punktlagen zu diesem Dreiecke auswerten.

Zunächst wird mit $\overline{AB} = \overline{BC} = a$, $\overline{AC} = c$, $\sphericalangle\, CBA = 75^0$, der Durchmesser des umschriebenen Kreises $D = 1{\cdot}2605\,.\,a$.

1. Der zu bestimmende Punkt liege auf einem Kreise K_1 mit B als Mittelpunkt und dem Halbmesser $d_2 = 1{\cdot}7\,a$.

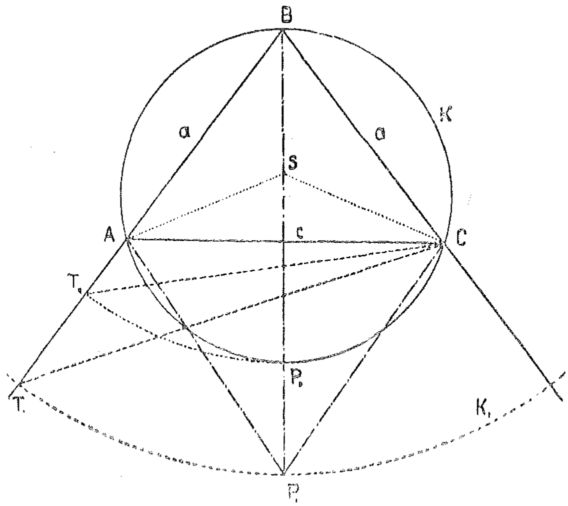

Fig. 2.

Für die Annahme desselben in P_1 wird aus 1)

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = 4{\cdot}188 \,.\, a \,.\, \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1')$$

und aus 3)

$$M_{\alpha,\beta} = 4{\cdot}338 \,.\, a \,.\, \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3')$$

Würde der Punkt auf demselben Kreise K_1 in der Verlängerung von BA bei T_1 liegen, so gibt 3) wegen 4)

$$M'_{\alpha,\beta} = 3{\cdot}360 \,.\, a \,.\, \delta.$$

Es ist also in diesem Falle die Lage T_1 noch günstiger als jene P_1, selbst wenn in dem letzteren Falle alle drei Winkel gemessen werden.

Für analoge Annahmen und unter Voraussetzung von zwei gleich genau gemessenen Winkeln liegen, wie sich mit Benützung von Genauigkeitskurven zeigen läßt,[1]) überhaupt die günstigsten Punktlagen auf diesem Kreise in unmittelbarer Nähe der beiden Seiten BA und BC.

Dessenungeachtet sind sämtliche Punktlagen auf K_1 ungenau. So wird mit

$$a = 1000\,m, \quad \delta = \frac{10''}{\varrho}, \text{ wo } \varrho = 206265 \text{ ist,}$$

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = 0{\cdot}203\,m, \quad M_{\alpha\beta} = 0{\cdot}210\,m, \quad M'_{\alpha\beta} = 0{\cdot}163\,m,$$

also Fehler, welche etwa dann noch hingenommen werden könnten, wenn die Punktbestimmung lediglich den Zweck hätte, den gerechneten Punkt in 1 : 2500 aufzutragen.

2. Der zu bestimmende Punkt liege im Schwerpunkt S des Dreieckes ABC. Wegen $d_3 = 0{\cdot}5289\,a$ und $P^2 = (D - d_2)\, d_3$, erhält man aus 1)

$$M_{\alpha,\beta,\gamma} = 0{\cdot}410\, a \,.\, \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1'')$$

[1]) Klingatsch, Die Bestimmung des günstigsten Punktes durch Rückwärtseinschneiden. Zeitschrift f. Math. u. Physik. 1902, Seite 480.

und aus 3)
$$M_{\alpha,\beta} = 0{\cdot}585\, a\,.\,\delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3'')$$

Die Lage ist zwar in diesem Falle nicht die theoretisch günstigste, jedenfalls aber eine der besten. Gegenüber den Werten 1') und 3') ist die Genauigkeit hier etwa zehnmal so groß.

3. Der zu bestimmende Punkt liege bei P_2. Dann ist natürlich $M = \infty$; bei demselben Abstande $d_2 = D = \overline{BP_2} = \overline{BT_2}$ gibt die Lage T_2 auf der Verlängerung von BA eine unter Umständen noch entsprechende Punktbestimmung.

Aus 3) ergibt sich in diesem Falle wegen 4)
$$M'_{\alpha\beta} = 2{\cdot}039\,.\,a\,.\,\delta.$$

Diese Punktlage ist demnach etwa doppelt so genau, wie jene in P_1, oder anderthalbmal so genau als jene in T_1.

Mit $a = 1000\,m$ und demgemäß $d_1 = 260\,m$ ist, wenn wieder $\delta = \dfrac{10''}{\varrho}$ gesetzt wird
$$M'_{\alpha\beta} = 0{\cdot}100\,m.$$

Damit ist zunächst an einem Beispiele gezeigt, daß die Punktlage außerhalb des Dreieckes in unmittelbarer Nähe einer Seite nicht lediglich aus diesem Umstande zu einer schlechten Punktbestimmung führt. Auch ist für die Lagen T_1 und T_2 der Schnittwinkel der den beiden Winkelmessungen entsprechenden Kreise durch den zu bestimmenden Punkt und durch AB einerseits, BC anderseits ein günstiger, wobei in unserem Falle der ersterwähnte Kreis in die gerade Linie AB übergeht.

Für die günstigste Punktlage ist bekanntlich dieser Schnittwinkel als ein rechter dann nicht entscheidend, wenn für diese Lage das Minimum des durch 1) oder 3) gegebenen Punktfehlers als maßgebend angesehen wird. Doch können auch andere Gesichtspunkte für die «günstigste» Bestimmung eines Punktes zur Grundlage dienen.[1])

Derartige Rechnungen geben eben Aufschluß, wie genau bei annähernd gegebener Lage des Punktes zum Dreieck die Winkel oder die Richtungen zu messen wären, damit eine vorgeschriebene Genauigkeit erreicht wird, damit also die Punktbestimmung ihren Zweck erfüllt.

Wir kommen nun wieder auf unsere frühere Aufgabe zurück.

Es handelt sich also von einem in der Nähe der Dreiecksseite zu wählenden Punkt Q (Fig. 1) in der, wie wir annehmen wollen, zu AB senkrechten Richtung den Punkt T einzuschalten.

Mit $\overline{TA} = d_1$, $\overline{AB} = a$, $\measuredangle\, AQB = w$ und $\overline{QT} = e$ folgt
$$\operatorname{tang} w = \frac{a\,e}{e^2 + d_1\,(a + d_1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

In dieser Gleichung ist der Abstand a der beiden Triangulierungspunkte A, B als fehlerfrei gegeben anzusehen; könnte daher d_1 genügend genau geschätzt werden, so ließe sich aus 5) e berechnen und damit T abstecken.

---

[1]) Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2. Auflage. 1907, Seite 550.

Besser jedoch ist der folgende Vorgang, welcher eine genauere Kenntnis von d_1 nicht voraussetzt. Es wird in der Senkrechten QT zu AB auf der anderen Seite der letzteren Geraden ein zweiter Punkt Q_1 gewählt; setzt man $\sphericalangle BQ_1A = w_1$ und $Q_1T = e_1$, so folgt analog 5)

$$\tan w_1 = \frac{a e_1}{e_1^2 + d_1(a + d_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6)$$

Um die Richtung Q_1Q_1 mit völlig ausreichender Genauigkeit abstecken zu können, genügt eine sehr rohe Schätzung der Entfernung $\overline{QA}$.

Aus dem Dreiecke AQB entnimmt man, wenn $\sphericalangle QBA = \varepsilon$ gesetzt wird,

$$\sin \varepsilon \doteq \varepsilon = \frac{\overline{QA}}{a} \cdot \sin w \doteq \frac{\overline{QA}}{a} \cdot w$$

also $\Delta\varepsilon = \frac{w}{a}\,\Delta(\overline{QA})$, wenn $\Delta(\overline{QA})$ der Schätzungsfehler in $\overline{QA}$ ist.

Mit $a = 1000\,m$, $w = 30'$ und selbst $\Delta(\overline{QA}) = 50\,m$ wird $\Delta\varepsilon = 1{\cdot}5'$, so daß mit dem in Q an QB anzutragenden Winkel $90 - \varepsilon$ die Richtung QT angegeben werden kann.

Ist $m = e + e_1 = \overline{QQ_1}$ das Messungsergebnis für diese Strecke, so erhält man aus 5) und 6) durch Elimination von d_1 und e,

$$e_1 = \frac{(a - m \cdot \tan w) \cdot m \tan w_1}{a(\tan w + \tan w_1) - 2m \tan w \cdot \tan w_1}, \quad \ldots\ldots 7)$$

wodurch aus der zweiten Aufstellung in Q_1 mit e_1 der einzuschaltende Punkt T gefunden wird.

Da man im allgemeinen die beiden Punkte QQ_1 wird hinreichend nahe an AB wählen können, so daß bei der Aufstellung des Instrumentes in Q oder Q_1 in der Regel die beiden Punkte A, B im Gesichtsfelde des Fernrohres erhalten werden können, so sind w und w_1 und damit auch m kleine Größen.

Setzt man etwa $w \lessgtr 1^0$ und ebenso $w_1 \lessgtr 1^0$ voraus, so kann statt 7)

$$e_1 = \frac{w_1}{w + w_1} \cdot m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8)$$

gesetzt werden, so daß sich die nötigen Berechnungen einschließlich jener der Punktbestimmung leicht vornehmen lassen.

Die Feldarbeit besteht demnach in den Winkelmessungen w, w_1 in Q und Q_1, der Längenmessung $QQ_1 = m$ und in der Messung des Winkels ATC in T.

Zur Untersuchung der erforderlichen Genauigkeit der Einschaltung von T in AB legen wir die Gleichung 8) zugrunde. Hiebei ist wohl anzunehmen, daß die Messungen w und w_1, ebenso wie diejenige des Winkels ATC mit demselben Instrumente erfolgen und wird man erstere eben so genau ausführen, als es das Instrument gestattet. Es soll daher δ auch hier den mittleren Fehler in den Winkelmessungen w und w_1 bezeichnen.

Wird von dem Fehler in der Messung der Strecke m abgesehen, so folgt aus 8) für den mittleren Fehler m_e in e_1, also auch für die mittlere Verschiebung des Punktes T senkrecht zu AB,

$$m_e^2 = \left(\left(\frac{\partial e_1}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial e_1}{\partial w_1}\right)^2\right) \delta^2, \text{ oder wegen 8)}$$

$$m_e = \frac{m \cdot \delta}{(w + w_1)^2} \cdot \sqrt{w^2 + w_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 9)$$

Damit nun die Einschaltung von T in AB ihren Zweck erfüllt, die Berechnung der Koordinaten nach den für das Seitwärtsabschneiden geltenden Formeln durchzuführen, darf, wenn T' den eingeschalteten Punkt, hingegen T die richtige Lage desselben bedeutet, wie schon oben bemerkt wurde, der aus der Unsicherheit m_e von T' folgende Winkel $AT'B$ nicht größer sein als der Winkelmessungsfehler δ, wobei also δ im Sinne des Rückwärtseinschneidens den mittleren Fehler des Winkels ATB bezeichnet, dessen Sollbetrag eben Null ist.

Da nun genügend genau

$$\sphericalangle\, T'AT = \frac{m_e}{d_1}, \quad \sphericalangle\, T'BT = \frac{m_e}{a + d_1}$$

ist, so soll wegen

$$\sphericalangle\, A\,.\,T'B = \sphericalangle\, T'AT - \sphericalangle\, T'BT$$

die Bedingung stattfinden

$$\frac{m_e}{d_1} - \frac{m_e}{a + d_1} \leqq \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 10)$$

Mit Rücksicht auf den aus 9) folgenden Wert von m_e soll daher zwischen $w\ w_1\ m\ a$ und d_1 die Beziehung bestehen

$$m \leqq \frac{d_1\,(a + d_1)\,(w + w_1)^2}{a\,.\,\sqrt{w^2 + w_1^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 11)$$

Diese Bedingung enthält nicht mehr den Winkelmessungsfehler δ; letzterer kommt nur für die tatsächlich zu erreichende Genauigkeit in der Punktbestimmung in Betracht, während 11) die Beziehung zwischen den obigen Größen gibt, damit für die Einschaltung in die gerade Linie AB die nötige Schärfe stattfindet.

Wird der Einfachheit halber in 11) $w = w_1$ vorausgesetzt, eine Annahme, die wohl näherungsweise zutreffen wird, so soll

$$m \leqq \frac{4\,d_1\,(a + d_1)\,w}{a\,.\,\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 12)$$

sein.

Wird w in Minuten ausgedrückt, so ist statt 12) zu setzen

$$m \leqq \frac{d_1\,(a + d_1)\,.\,w}{1215{\cdot}5\,.\,a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 12')$$

Man erhält daraus beispielsweise für $w = 30'$ und

$$a = 2000\,m, \quad d_1 = 500\,m, \quad m \leqq 15{\cdot}4\,m$$
$$a = 1000\,m, \quad d_1 = 300\,m, \quad m \leqq 9{\cdot}6\,m$$

Man kann die Bedingung 12) noch in anderer Form geben.

Wegen $m = e + e_1$, wird für $w = w_1$ auch $e = e_1 = \frac{m}{2}$.

Es soll daher der normale Abstand der Instrumentenstandpunkte Q oder Q_1 von AB, nämlich e oder e_1 wegen 12) an die Bedingung gebunden sein

$$e \leqq \frac{d_1\,(a + d_1)\,.\,w\,.\,\sqrt{2}}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 13)$$

Nun ist schließlich noch zu prüfen, ob die Bedingung 13) nicht im Widerspruch ist mit 5), aus welcher Gleichung bei gemessenem Winkel w und bekannten Abständen a und d_1 sich, wie bereits bemerkt, e berechnen läßt.

Indem wir 5) in der Form

$$f(e) = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

schreiben, ist bei der vorausgesetzten Größe von w der für die Anwendung ausreichende Näherungswert e_0 der in Betracht kommenden Wurzel von 14) durch

$$e_0 = \frac{d_1 (a + d_1) \cdot \operatorname{tang} w}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

gegeben; eine Näherung, welche ebenso auf 6) angewendet, zu der einfachen Gleichung 8) führt.

Der Fehler $\triangle e$ in e_0 ergibt sich leicht aus

$$\triangle e = -\frac{f(e_0)}{f'(e_0)} = \frac{d_1^2 (a + d_1)^2 \cdot \operatorname{tang} w}{a (a^2 \operatorname{cotang}^2 w - 2 d_1 [a + d_1])}, \quad \ldots\ldots \quad 16)$$

welche Verbesserung beispielsweise für die früheren Annahmen von a d_1 und w etwa 0·1 *mm* ausmacht.

Da nun der aus 15) folgende Wert für e kleiner ist als der durch 13) bestimmte Grenzwert, so kann der letzteren Bedingung entsprochen werden.

Graphische Ausgleichung mit zwei Unbekannten.

Von Prof. **Karl Fuchs** in Preßburg.

Das Vorwärtseinschneiden führt zu Bestimmungsgleichungen mit zwei Unbekannten, die wir in folgender Form schreiben wollen:

$$\left.\begin{array}{l} a x_1 + b y_1 = z_1 \\ a x_2 + b y_2 = z_2 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Hier sind a und b die Unbekannten; die z sind mit Fehlern behaftet. Es soll ein einfaches graphisches Verfahren beschrieben werden, mittelst dessen es uns möglich ist, die angenäherten Werte der Unbekannten in zweistelligen, zuweilen auch in dreistelligen Zahlen zu gewinnen.

Wenn die z fehlerfrei wären, dann würden dieselben Werte von a und b sämtlichen Gleichungen 1) genügen. Die Gleichungen 1) wären dann Spezialfälle der allgemeinen Gleichung:

$$a x + b y = z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Wenn wir diese Gleichung als Gleichung einer Ebene E auffassen, die durch den Ursprung O geht, dann bestimmen die Gleichungen 1) Punkte $p_1, p_2 \ldots$ dieser Ebene E, und die Koordinaten der einzelnen Punkte $p_1, p_2 \ldots$ sind:

$$x_1 y_1 z_1 \qquad x_2 y_2 z_2 \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \quad 3)$$

Da aber die z in Wirklichkeit teils zu groß, teils zu klein sind, so liegen die Punkte $p_1, p_2 \ldots$ in Wirklichkeit teils etwas zu hoch, teils etwas zu tief. Es gilt die Konstanten a_0 und b_0 der wahrscheinlichsten Ebene E_0 zu bestimmen.