

Paper-ID: VGI\_190809



## Über einige Planimeter polnischer Erfindung, insbesondere über das Planimeter von Zareba

Lucian Grabowski

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **6** (3, 4), S. 70–74, 108–112

1908

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Grabowski_VGI_190809,  
  Title = {{\U}ber einige Planimeter polnischer Erfindung, insbesondere {\u}  
    ber das Planimeter von Zareba},  
  Author = {Grabowski, Lucian},  
  Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {70--74, 108--112},  
  Number = {3, 4},  
  Year = {1908},  
  Volume = {6}  
}
```



# Über einige Planimeter polnischer Erfindung, insbesondere über das Planimeter von Zaręba.

Von Dr. L. Grabowski.

1. In einer vor einigen Jahren erschienenen Abhandlung, auf die ich durch Herrn Professor Láska aufmerksam gemacht worden bin, gibt Herr Kucharzewski<sup>1)</sup>, neben einer kurzen Darstellung der allgemeinen Entwicklungsgeschichte der Planimeter, eine eingehende Beschreibung derjenigen Planimeter, die von polnischen Erfindern konstruiert worden sind. Da diese Planimeter fast sämtlich im Auslande unbekannt geblieben sind, ferner auch die Abhandlung des Herrn Kucharzewski meines Wissens bisher in keiner der Weltsprachen veröffentlicht wurde, so dürfte es schon aus diesem Grunde vielleicht nicht ohne Wert sein, hier einen kurzen Auszug aus dieser Arbeit zu geben.

Zugleich soll aber der Zweck des folgenden Artikels auch sein, eine spezielle Prioritätsfrage aufzuklären. Im VIII. Bande der Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart, wird von Professor Franz Müller («Die Planimeter von Gangloff und Schlesinger») in Bezug auf den Schlesinger'schen «geodätischen Tachygraph» dargetan, daß dieses Instrument, als Planimeter betrachtet, im Prinzip nicht neu sei, daß vielmehr die Priorität der Erfindung dieses Prinzips dem böhmischen Forstmeister Gangloff gebühre, der sein Planimeter in einer in Brünn 1856 erschienenen Abhandlung beschrieben habe. Wir werden nun im folgenden sehen, daß Johann Zaręba (sprich Saremba), vereid. Geometer der fürstl. Czartoryski'schen Güterverwaltung, bereits in den 20er Jahren des vorigen Jahrhunderts ein Planimeter konstruiert und im Jahre 1829 beschrieben hat, das mit dem Gangloff'schen Planimeter genau identisch ist, bis auf eine nebensächliche Verschiedenheit in der Ausführung der Vorrichtung, welche zur mechanischen Herstellung der gemeinsamen zugrunde liegenden geometrischen Konstruktion dient.

2. Das erste Planimeter polnischer Erfindung war dasjenige von Kolberg (Professor an der Universität Warschau), zuerst im Jahre 1820 polnisch, dann 1825 auch deutsch beschrieben. Es dient zur Flächenbestimmung geradlinig begrenzter Figuren (geschlossener Polygone). Das Prinzip ist folgendes. Nachdem das gegebene  $(n + 2)$ -Eck durch Diagonalen in die  $n$  Dreiecke 1, 2, 3 . . . ,  $n$  zerlegt ist, benutzt man ein besonders festes Diagramm (Fig. 1), bestehend aus

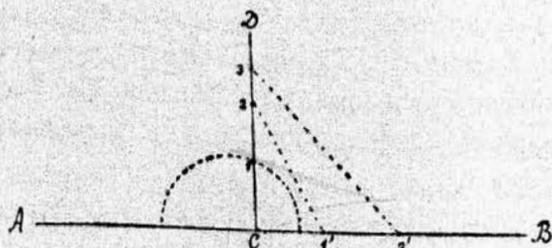


Fig. 1.

<sup>1)</sup> „Planimetry polskie i ich wynalazcy“. (Die polnischen Planimeter und deren Erfinder.) S.-A. aus „Przegląd Techniczny“, Warschau, Wende u. Co., 1902. 46 S.

einer unbegrenzten Geraden  $AB$  und einem in einem Punkte  $C$  dieser Geraden errichteten Lot  $CD$ . Vom Punkte  $C$  aus wird nun auf der Geraden  $AB$  nach der einen Seite die Basis, nach der anderen die Höhe des Dreieckes 1 abgelegt und über der so erhaltenen Strecke als Durchmesser (mit Hilfe des Halbkreiszirkels) ein Halbkreis errichtet. Der Halbkreis schneidet dann das Lot offenbar in einem Punkte 1, dessen Ordinate  $C1$  die Eigenschaft hat, daß ihr Quadrat gleich ist der doppelten Fläche des Dreieckes 1. In derselben einfachen Weise konstruiert man auf dem Lot die weiteren Punkte 2, 3, . . . ,  $n$ , deren Abstände von  $C$  in der gleichen Beziehung zu den Dreiecken 2, 3, . . . ,  $n$  stehen. Konstruiert man jetzt auf der Geraden  $AB$  den Punkt  $1'$  mit  $C1' = C1$ , so ist das Quadrat der Entfernung  $1'2$  gleich der Summe der Doppelflächen der beiden Dreiecke 1 und 2; konstruiert man ferner auf  $AB$  den Punkt  $2'$  mit  $C2' = 1'2$ , so ist  $(2'3)^2$  gleich der Doppelfächensumme der Dreiecke 1, 2 und 3; u. s. w. bis zur Konstruktion des Punktes  $(n-1)'$ , dessen Entfernung von  $(n-2)$ , ins Quadrat erhoben, die Doppelfläche des ganzen  $(n+2)$ -Ecks angibt. Diese letzte Entfernung  $e$  greift man mit dem Zirkel ab und geht damit in eine von Kolberg konstruierte graphische Tafel ein, aus der man dann unmittelbar die gesuchte Fläche  $\frac{e^2}{2}$  ablesen kann. Aus einem vom Erfinder mitgeteilten Versuch ergibt sich die große Genauigkeit von  $\frac{1}{30000}$ .

3. Wir kommen nun in der chronologischen Reihenfolge zu dem Planimeter von Zareba. Dieses dient zur Verwandlung von Vielecken in rechtwinklige Dreiecke von gegebener Höhe (einer Kathete). Die zugrunde liegende geometrische Konstruktion ist folgende. Man denke sich ein  $n$ -Eck, dessen aufeinanderfolgende Eckpunkte wir mit forlaufenden Nummern 0, 1, 2, 3, . . . bezeichnen wollen; der Flächeninhalt des  $n$ -Ecks möge als positiv gelten, wenn man bei der Umfahrung seines Umfanges im Sinne der wachsenden Nummern die

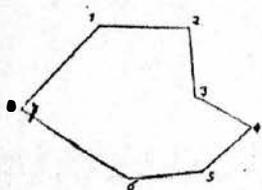


Fig. 2.

Fläche der  $n$ -Ecks zur rechten hat (Fig. 2), im entgegengesetzten Falle als negativ. Im Falle eines geschränkten Vielecks (Fig. 3) definieren wir den Flächeninhalt folgendermaßen. Jedes geschränkte Vieleck läßt sich in einzelne Felder zerlegen,

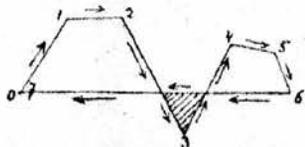


Fig. 3.

derart, daß an einigen Feldern sämtliche Seiten des Feldes in positivem Sinne (d. h. Fläche des Feldes rechtsliegend; in Fig. 3 die beiden weißgelassenen Felder), an anderen Feldern wieder sämtliche Seiten in negativem Sinne (das gestrichene Feld) durchlaufen werden, wenn man den Umfang des ganzen Vielecks in dem durch die Reihenfolge der Nummern der Eckpunkte angedeuteten Sinne durchfährt; wir wollen nun für das folgende festsetzen, daß die Flächen derjenigen Teilfelder, die dabei uhrzeigerwidrig umfahren werden, negativ gerechnet werden sollen.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Diese Festsetzungen sind dem sonst in der analytischen Geometrie und der analytischen Mechanik üblichen entgegengesetzt; ich wähle sie aber so mit Rücksicht darauf, daß sie sich den in

Unter diesen Festsetzungen gelten nun die folgenden Sätze. Wenn man durch einen Eckpunkt des gegebenen Vielecks, wie des Achtecks Fig. 4, eine

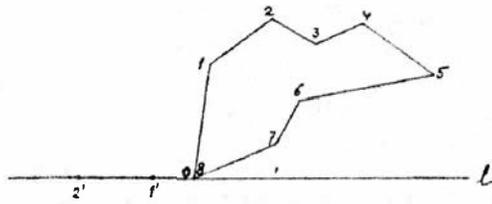


Fig. 4.

außerhalb dieses Vielecks liegende Gerade («Grundlinie»)  $l$  legt und bei der Numerierung der Ecken gerade mit dieser Ecke anfängt, so daß dieser Punkt 0 heißen mag, so läßt sich nun leicht für den nächsten Eckpunkt 1 ein «ihm in Bezug auf das Punktepaar 0, 2 zugeordneter» Punkt  $1'$  auf der Geraden  $l$  finden, derart, daß es gleichgiltig ist, ob man von 0 nach 2 auf dem Wege 0, 1, 2 oder auf dem Wege 0,  $1'$ , 2 geht, d. h. daß die Fläche 0, 1, 2, 3, . . . , 7, 0 gleich ist der Fläche 0,  $1'$ , 2, 3, . . . , 7, 0. (Der Punkt  $1'$  wird einfach gefunden durch Schneiden der Grundlinie mit der durch 1 parallel zur Diagonale 0, 2 gelegten Geraden). Verfährt man jetzt mit dem neuen Achteck 0,  $1'$ , 2, . . . , 7, 0, dessen eine Seite also auf der Grundlinie liegt, wieder auf dieselbe Weise, indem man jetzt den dem Eckpunkt 2 in Bezug auf das Punktepaar  $1'$ , 3 zugeordneten Punkt  $2'$  der Grundlinie aufsucht, so erhält man ein Achteck, dessen zwei anstoßende Seiten auf der Grundlinie liegen, d. h. ein Siebeneck 0, ( $1'$ ),  $2'$ , 3, . . . , 7, 0. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man sukzessive: ein Sechseck 0,  $3'$ , 4, 5, 6, 7, 0; ein Fünfeck 0,  $4'$ , 5, 6, 7, 0; ein Viereck 0,  $5'$ , 6, 7, 0; schließlich ein Dreieck 0,  $6'$ , 7, 0. Alle diese Figuren, also auch das Schlußdreieck, sind mit dem gegebenen Vieleck flächengleich, wobei natürlich dieser Satz sich auf denjenigen Umlaufssinn jeder einzelnen Figur bezieht, bei welchem die ihr mit dem gegebenen Vieleck gemeinsamen Seiten (im Schlußdreieck die Seite 7, 0) in dem gleichen Sinne durchlaufen werden wie im gegebenen Vieleck.

Es kann indessen die Grundlinie auch ganz außerhalb des Vielecks liegen, d. h. keinen Punkt mit ihm gemeinsam haben; diesen Fall führt man auf den

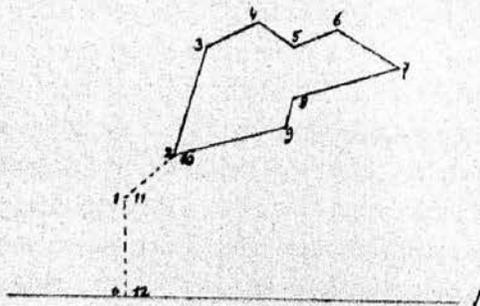


Fig. 5.

der Geodäsie, die ja das hauptsächlichste Anwendungsgebiet der Planimeter bildet, gebräuchlichen Festsetzungen (z. B. Zählung der Richtungswinkel, Annahme der  $+y$ -Axe nach rechts von der  $+x$ -Axe) anpassen.

vorigen zurück, indem man einen Eckpunkt des gegebenen Vieleckes durch eine gerade oder gebrochene Strecke mit einem beliebigen Punkte der Grundlinie verbindet und das gegebene Vieleck (Fig. 5) 2, 3, 4, . . . , 9, 2 durch das flächengleiche Vieleck 0, 1, 2, 3, 4, . . . , 9, 10, 11, 0 ersetzt. Die Regel zur Verwandlung des gegebenen Vielecks in ein Dreieck bleibt dann dieselbe, nur muß sie auf sämtliche Seiten des ergänzten Vieleckes angewandt werden. Da nun die gebrochene Verbindung eines Eckpunktes mit der Grundlinie willkürlich ist, so können wir sie auch so wählen, daß ihr letztes Stück senkrecht zur Grundlinie steht und eine vorgeschriebene Länge hat. Dann wird das Schlußdreieck ein rechtwinkliges Dreieck von ein- für allemal bestimmter Höhe sein, so daß sein Flächeninhalt nur noch von der auf  $l$  liegenden Kathete abhängen wird und daher einfach an einer an der Grundlinie angebrachten Teilung abgelesen werden kann.

Die mechanische Vorrichtung, welche zur Ausführung der soeben beschriebenen geometrischen Konstruktion dient, ist in Figur 6 (Figur 6 ist nach der Broschüre von Zareba, im Verhältnis 2 : 3 verjüngt) dargestellt. Das Lineal

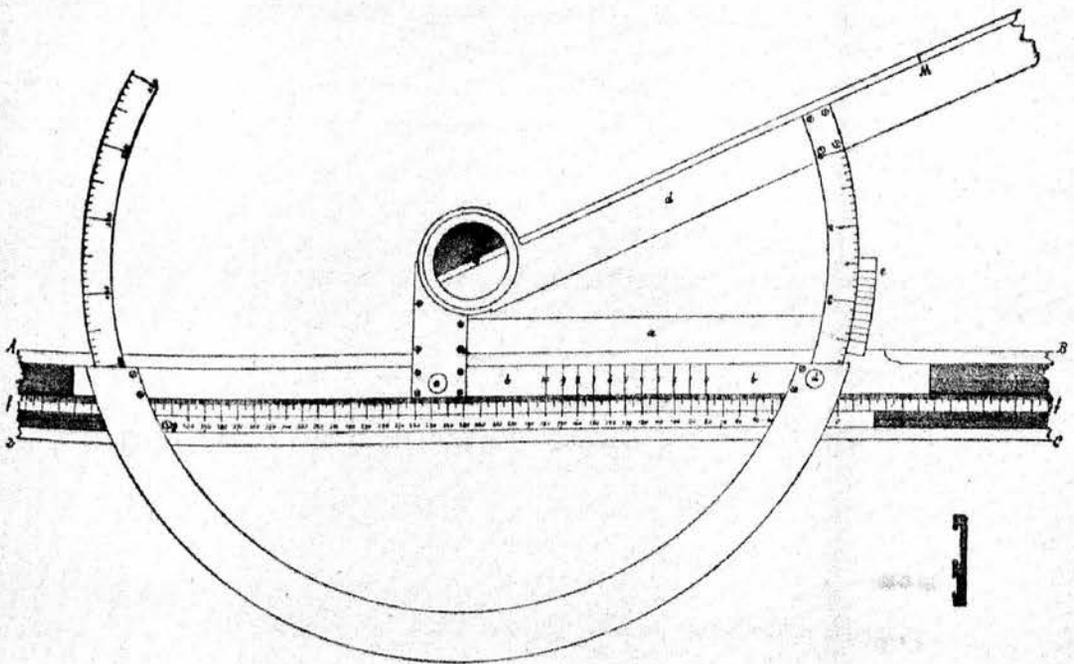


Fig. 6.

$ABCD$  wird auf der Ebene der auszumessenden Figur festgeschraubt. Dieses feste Lineal, dessen Querschnitt in der Nebenzeichnung der Tafel dargestellt ist, hat zwei parallele Nuthen und zwischen den beiden eine unbezifferte Längsteilung  $ff$ . In der unteren Nuth ist ein Lineal verschiebbar und durch das Schraubchen  $g$  festklemmbar, welches die Bezifferung zu den Hauptstrichen jener Teilung trägt; in der oberen Nuth läßt sich ein Lineal  $bb$ , das einen Index (mit Nonius) trägt, verschieben und durch das Schraubchen  $c$  festklemmen. Mit diesem Indexlineal ist der eine Arm  $a$  eines Winkelstücks  $aa'$  fest verbunden, dessen anderer Arm  $a'$  um einen Punkt  $S$  seiner abgeschrägten Kante drehbar ist; der

Winkel zwischen den beiden Armen kann an einem mit dem beweglichen Arm festverbundenen Kreisbogen und dem mit  $\alpha$  festverbundenen Index  $e$  abgelesen werden. Es werden nun die Nullstriche der beiden beweglichen Lineale auf einen und denselben Hauptstrich des festen Lineals eingestellt und die beiden Lineale festgeklemmt. Darauf stellt man (mit Hilfe der Teilung am Kreisbogen) den Arm  $\alpha'$  senkrecht zu den Linealen und markiert auf dem Papier den Punkt  $N$ , der mit einer festen Marke  $M$  an der Kante des Armes  $\alpha'$  koinzidiert. Dieser Punkt entspricht dem Punkt 1 der Figur 5 und die durch  $S$  parallel zu den Linealen gedachte Gerade bildet die Grundlinie. Man dreht nun den beweglichen Arm so weit, bis die äußere Kante durch den nächstliegenden Eckpunkt des gegebenen Polygons (Punkt 2 der Figur 5) hindurchgeht, klemmt den beweglichen Arm mit dem Schraubchen  $d$  an das Indexlineal fest, verschiebt (nach Lösung des Schraubchens  $c$ ) das Indexlineal samt dem ganzen Winkelstück soweit bis die Kante von  $\alpha'$  wieder durch  $N$  hindurchgeht und schraubt  $c$  wieder zu. Die neue Lage des Punktes  $S$  entspricht nun dem Punkt  $1'$ . Dann dreht man wieder (nach Lösung von  $d$ ) den Arm  $\alpha'$  bis zum folgenden Punkt 3 des Polygons, schraubt  $d$  fest und verschiebt wieder das ganze Winkelstück mit dem Indexlineal bis zum Punkt 2. So setzt man das Verfahren fort bis zur Konstruktion desjenigen Punktes der Grundlinie (Punkt  $10'$  in der Fig. 5), welcher dem Endpunkt des Umfanges des gegebenen Polygons zugeordnet ist. Das so erhaltene rechtwinklige Schlußdreieck  $(0, 10', 11, 0)$ , dessen Höhe konstant, nämlich gleich der Entfernung der Marke  $M$  von dem Drehungspunkt  $S$  ist, hat einen Flächeninhalt, der durch die letzte Stellung des Index an der auf  $ff$  gezeichneten und auf  $gg$  bezifferten Teilung angegeben wird. (Schluß folgt.)

## Die Fehlerflächen topographischer Aufnahmen.

Von Prof. Dipl. Ing. A. Klingatsch in Graz.

(Schluß).

### IV.

Die Fehlerfläche für die stereophotogrammetrische Punktbestimmung beziehen wir auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt  $O_1$  mit dem Hauptpunkte des Kameraobjektives des über dem einen — als fehlerfrei vorausgesetzten — der beiden die Standlinie bestimmenden Fundamentalpunkte aufgestellten Instrumentes zusammenfallen soll.

Ist  $O_2$  die Projektion des zweiten Fundamentalpunktes auf die durch  $O_1$  gehende Horizontalebene, so nehmen wir  $O_1 O_2$  als Richtung der  $X$ . Die Bildebene wird bei den Aufnahmen in beiden Standpunkten vertikal und parallel zu  $O_1 O_2$  vorausgesetzt; wird schließlich die Vertikale durch  $O_1$  als Richtung der  $Y$  angenommen, so ist jene der  $Z$  parallel zur optischen Achse des Apparates.

Bezeichnen  $\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2$  die auf das Achsenkreuz der Aufnahmsplatten bezogenen Bilder desselben Punktes, ferner  $\xi_1 - \xi_2 = a$  die stereoskopische Parallaxe,

kaum nötig erscheint. Um das Aufschlagen der Werte  $\cos 2\varphi$  und  $\sin 2\varphi$  zu ersparen, kann man einen Kartontransporteur an den entsprechenden Stellen von  $\varphi$  mit den Tafelwerten von  $\cos 2\varphi$ , bezw.  $\sin 2\varphi$  (u. zw. bloß mit 0.0, 0.1, 0.2, ... 1.0) beschreiben. Eine weitergehende Genauigkeit ist wohl unnötig, da sie von dem Ungleichförmigkeitsgrad des örtlichen Papiereinganges aufgezehrt wird.

Ein gutes Näherungsverfahren besteht darin, daß man den Längen-, Höhen- und Diagonaleingang ( $r_1, r_n, r_a$ ) eines Quadratzolles ermittelt und dann je nach der Neigung der gemessenen Seite schätzungsweise interpoliert. Wie bei jeder geradlinigen Interpolation ist der zu befürchtende Fehler in erster Näherung  $\frac{1}{8}$  des Unterschiedes der aufeinanderfolgenden Differenzen, also  $\frac{1}{8} [(r_n - r_a) - (r_a - r_1)]$ . Nun ist nach 8)

$$r_1 = p, r_a = \frac{p}{2} + \frac{q}{2} - \frac{\beta}{2}, r_n = q.$$

Folglich überschreitet der zu befürchtende Fehler im schlimmsten Falle nicht die Grenze  $\frac{1}{8} (q - p - q + \beta + p) = \frac{\beta}{8}$ , ist also — weil  $\beta$  viel kleiner als der mittlere Eingang — eine sehr kleine Größe.

Die Vorteile dieses Verfahrens bleiben auch dann noch aufrecht, wenn man statt des Quadratzolles den Sektionsrahmen zugrunde legt.

#### IV. Inhaltsänderung einer Fläche.

Die Flächeninhalte affiner Figuren stehen in einem konstanten Verhältnisse, das nur von dem Abbildungsgesetz abhängig ist. Es wird darum der (relative) Flächeneingang einer Figur ebenso groß sein als der des Sektionsrahmens. Der Flächeninhalt des deformierten Sektionsrahmens ist  $AB \cdot AD \cos \beta = l \cdot h \cos \beta = lh$ ; der Flächeninhalt des ursprünglichen Rechteckes ist  $AB' \cdot AD' = l(1+p) \cdot h(1+q) = lh(1+p+q)$ , wobei die Glieder höherer Ordnung (mit  $\beta^2$ , bezw.  $pq$ ) unterdrückt wurden.\*) Der absolute Flächeneingang beträgt also  $lh(p+q)$ , der relative Flächeneingang (oder Flächeneingang schlechthin)  $p+q$ . Es ergibt sich daher die altbekannte Regel: Bei der rhombischen Deformation ist der Flächeneingang gleich der Summe aus dem Längen- und Höheneingange.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß das Prinzip der Zurückführung mittels zweimaliger affiner Umformung (womit zugleich die kinematische Seite dieser Frage erledigt erscheint) auch dann noch anwendbar ist, wenn man von der Deformation eines bekannten Dreieckes ausgeht.

## Über einige Planimeter polnischer Erfindung, insbesondere über das Planimeter von Zareba.

Von Dr. L. Grabowski.

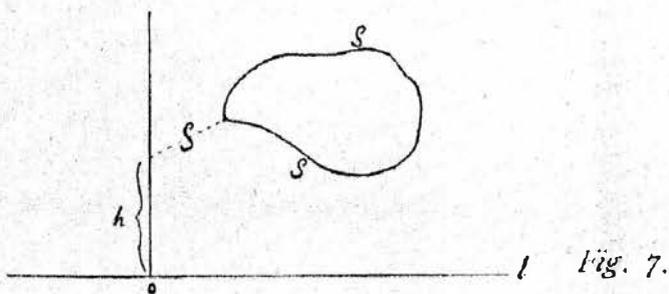
(Schluß).

4. Das Planimeter von Gangloff, für welches hier auf die ausführliche Beschreibung im VIII. Bande der Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart, ver-

\*) Die Instruktion für Meßtischaufnahmen vom Jahre 1907 berücksichtigt das Glied  $pq$  überflüssiger Weise.

wiesen werden mag, unterscheidet sich offenbar von dem Planimeter von Zareba nur rein äußerlich; und zwar hauptsächlich durch die Art und Weise, auf welche es erreicht wird, daß der bewegliche Arm während der Verschiebung vom Punkt  $i+1$  zum Punkt  $i$  des Polygons sich nicht dreht. Anstatt des in einer Nuth des festen Lineals geführten Winkelstückes, dessen Öffnung bei Zareba durch die Klemmschraube  $d$  gesichert wird, haben wir bei dem Gangloff'schen Planimeter eine an das feste Lineal angelegte Glastafel (Abbildung Band VIII, Zeitschrift für Vermessungswesen, Seite 155), auf welcher ein um einen Punkt dieser Tafel drehbares Lineal aufliegt; dieses Lineal ist durchbrochen und in der Öffnung ein Fadenkreuz aufgespannt, dessen einer Faden der scharfen Kante des beweglichen Armes beim Zareba'schen Planimeter, der Kreuzungspunkt aber der festen Marke an jener Kante entspricht. Einer Drehung des Lineals bei der Verschiebung wird dadurch vorgebeugt, daß diese Verschiebung eben durch Bewegung der ganzen Glastafel, auf der das Lineal aufliegt, bewerkstelligt wird.

Der in der zitierten Beschreibung des Gangloff'schen Planimeters hervorgehobene Nachteil, «daß die Fäden und der Umfang des zu berechnenden Polygons nicht in einer Ebene liegen, wodurch Fehler bei der Einstellung entstehen», ist offenbar bei dem Zareba'schen Planimeter vermieden.



5. Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch eine theoretische Bemerkung einschalten. Wenn eine durch nicht geradlinige Kontur begrenzte ebene Figur vorliegt (Fig. 6), so ist zur Bestimmung des Flächeninhaltes derselben das Planimeter von Zareba oder Gangloff nicht verwendbar, da in diesem Falle unendlich viele Operationen mit dem Instrument erforderlich wären. Denkt man sich jedoch

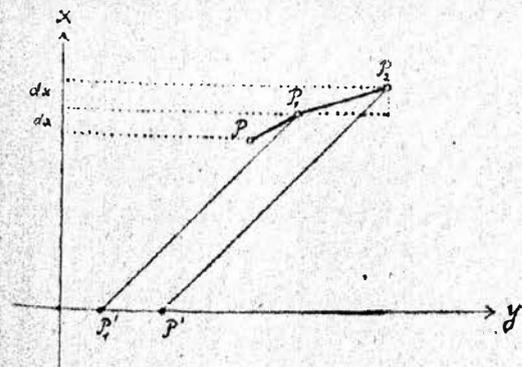


Fig. 8.

$P(x, y)$  ein Punkt der Kontur  $S$  und  $P'(0, y')$  der ihm zugeordnete Punkt der

rein theoretisch einen Mechanismus vorhanden, der die Konstruktion des dem laufenden Punkte  $P$  der Kontur zugeordneten Punktes  $P'$  auf der Grundlinie kontinuierlich besorgt, so kann man den analytischen Ausdruck für die Verschiebungen dieses Punktes  $P'$  auf der Grundlinie suchen. Es werde das im Punkte  $O$  der Grundlinie errichtete Lot als die  $x$ -Axe, die Grundlinie selbst als die  $y$ -Axe angenommen. Ist dann (Fig. 8)

Grundlinie, sind ferner  $P_1(x + dx, y + dy)$  und  $P_2(x + 2dx, y + 2dy + d^2y)$  die beiden nächsten Punkte der Kontur, so ist

$$P_1' P_2' = (y_2 - y_1) - (x_2 - x_1) \cdot \operatorname{tg}(P', P_2)$$

wo  $(P', P_2)$  den Richtungswinkel von  $P' P_2$  bezeichnet. Daraus folgt, da

$$\operatorname{tg}(P', P_2) = \frac{y_2 - y'}{x_2 - x_1}$$

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y') = x_2(y_1' - y') + x_2(y_2 - y_1)$$

oder

$$(y - y' + 2dy + d^2y) \cdot dx = (x + 2dx)dy' + (x + 2dx)(dy + d^2y)$$

oder, mit Weglassung der Glieder die bei unendlich kleinen  $dx, dy$  verschwinden,

$$x \cdot d(y' + y) = (y - y') \cdot dx;$$

daraus

$$d(x \cdot y') = y dx - x dy.$$

Durch Integration über die ganze Kontur  $S$  erhält man

$$h \cdot (y'_n - y'_o) = 2F,$$

wo  $F$  die gesamte von der Kontur umschlossene Fläche,  $y'_n$  die am Anfang,  $y'_o$  die am Schluß der Umfahrung der Kontur  $S$  vorhandene Ordinate des zugeordneten Punktes ( $y'_n - y'_o$  also die Totalverschiebung dieses Punktes auf der Grundlinie), endlich  $h$  den Anfangs- und zugleich Endwert der Abszisse des laufenden Punktes von  $S$  bezeichnet.

Diese Beweisführung ist allerdings zunächst nur von rein theoretischem Interesse, da eine mechanische Vorrichtung zur fortlaufenden Konstruktion des zugeordneten Punktes bis jetzt nicht bekannt, vielleicht auch überhaupt nicht ausführbar ist. Indessen ist der Fall geradlinig begrenzter Figuren in dem hier behandelten als Spezialfall enthalten, und die obige Abtheilung stellt daher zugleich auch die analytische Begründung der Planimeter von Zareba und Gangloff dar.

6. Kehren wir nun wieder zur Abhandlung des Herrn Kucharzewski zurück, so finden wir als chronologisch nächstfolgendes das Planimeter von Baranowski,

das schon zu der Kategorie der Umfahrungsplanimeter gehört und somit einen Vorgänger des Amsler'schen Polarplanimeters bildet. Baranowski hat sein Planimeter zuerst im Jahre 1849, bei Gelegenheit eines Ref rates in der Helsingforscher Akademie über sein Hodometer angezeigt und drei Jahre darauf auch ausführlich beschrieben.<sup>1)</sup> Dieses Planimeter ist interessant durch die überaus einfache und direkte Art, in welcher hier die analytischen Ausdrücke der Theorie durch die mechanischen Vorgänge nachgebildet werden. Es ist in der Fig. 9 (Grundriß) ganz schematisch gezeichnet. Aus einer massiven kreisförmigen Grundplatte erhebt sich ein Zapfen  $Z$ , der den Pol des Instrumentes bildet; um diesen Pol ist ein prismatischer Stab  $SS$  drehbar, der als Führung für den Fahrstift  $F$  dient. Die beiden Bewegungen des Mechanismus, durch deren Kom-

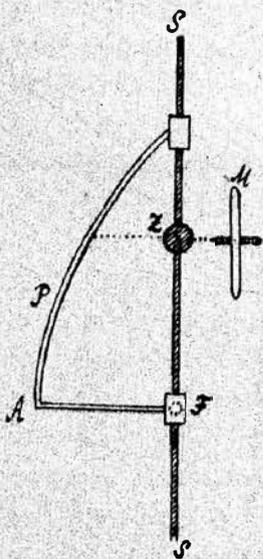


Fig. 9.

<sup>1)</sup> Acta Soc. Sc. Fennicae, 1852.

bination der Fahrstift der gegebenen Kontur nachgeführt wird, sind hier also direkt die beiden Veränderungen der Polarkoordinaten: eine Verschiebung längs des Stabes entspricht der Veränderung des Radiusvektors, eine Drehung des Stabes der Veränderung der Anomalie. Ein auf einem kleinen Geleise senkrecht zum Stab laufender Rahmen trägt die Axe der Meßrolle  $M$ , so daß die Verlängerung dieser Axe stets die durch den Pol gehende Vertikale schneidet. Der unterste Punkt des Rollenumfanges liegt auf der Grundplatte auf. Mit dem Stück, das den Fahrstift trägt, ist ein Parabelbogen  $P$  verbunden, der also die Verschiebung des Fahrstiftes längs des Stabes mitmacht; er hat seinen Scheitelpunkt in  $A$ . Eine in der Figur nicht gezeichnete Vorrichtung, durch welche ein Ansatz des Meßrollenträgers in stetem gleitendem Kontakt mit dem Parabelbogen bleibt, bewirkt, daß die zum Stab rechtwinklige Entfernung zwischen dem Mittelpunkt der Rolle und dem Parabelbogen konstant bleibt; und zwar ist sie gleich  $AF$ . Die Entfernung der Meßrolle vom Pol  $Z$  ist infolgedessen proportional dem Quadrat von  $ZF$ , also gleich  $c \cdot r^2$ , wo  $r$  der Radiusvektor des Punktes der befahrenen Kurve ist. Man sieht, daß bei einer Verschiebung des Fahrstiftes längs des Radiusvektors die Rolle nur dem Pol genähert oder von ihm weggeschoben wird, ohne sich zu drehen; bei einer Drehung  $d\varphi$  des Fahrstabes um den Pol  $Z$  dagegen wird die Meßrolle auf der Grundplatte rollen und dabei einen Bogen ihres Umfanges abwickeln, der erstens dem Drehungswinkel  $d\varphi$ , zweitens aber auch der Entfernung der Rolle vom Pol  $Z$  proportional ist. Es ist somit die Abwicklung der Rolle

$$db = c \cdot r^2 d\varphi.$$

Durch Integration über die ganze geschlossene Kurve  $S$  erhält man also ( $2c = k$  gesetzt)

$$b - b_0 = k \cdot F,$$

wo  $F$  die von der Kontur umschlossene Fläche bezeichnet. Die Instrumentalkonstante  $k$  wird natürlich so gewählt, daß die an der Teilung der Rolle abgelosene Abwicklung  $b - b_0$  direkt den Flächeninhalt in einer bestimmten Flächeneinheit ausgedrückt angibt. — Durch gewisse Nebenvorrichtungen, auf die hier nicht eingegangen werden soll, hat Baranowski dafür gesorgt, daß sein Planimeter auch als Pantograph, oder als Instrument zur Teilung eines Sektors einer beliebigen Kurve in beliebigem Verhältnis angewandt werden kann.

7. Das Planimeter von Majewski (zuerst vorgeführt 1870 auf der Gewerbeausstellung in Petersburg, dann 1873 auf der Weltausstellung in Wien mit der goldenen Medaille prämiert) gehört zu der Klasse derjenigen Planimeter, welche die zu messende Fläche durch parallele äquidistante Sehnen in schmale, als Parallelogramme oder Trapeze zu behandelnde Streifen zerlegen. Gegen ein an der Zeichnungsebene festgemachtes Lineal läßt sich ein zweites, mit jenem paralleles, durch Drehung einer Kurbel von vertikaler Axe und einen Übertragungsmechanismus (Zahnrad und Schraube) verschieben, und zwar so, daß der Abstand des beweglichen Lineals von dem festen mit jeder Kurbelumdrehung um die planimetrische Längeneinheit zunimmt. Nach jeder vollen Kurbelumdrehung wird die Strecke an der Kante des beweglichen Lineals, welche durch die beiden

Schnittpunkte der Kante mit der gegebenen Kontur begrenzt ist, mittels einer längs dieser Kante gleitenden Spitze durchlaufen. Diese Bewegung überträgt sich auf ein Rad (Zählrad), welches mit einem Zeiger versehen ist, der die Größe der Bewegung an einem Zifferblatt anzeigt. Sobald der Endpunkt der Sehne erreicht ist, schaltet man das Zählrad mittels eines Hebels aus, schiebt das bewegliche Lineal durch eine Umdrehung der Kurbel vor, verschiebt die Laufspitze auf den Anfangspunkt der neuen Sehne und läuft nach Wiedereinschaltung des Zählrades die neue Sehne durch. Auf diese Weise werden also die Flächeninhalte der aufeinanderfolgenden Streifen durch das Zählrad mechanisch summiert.

Das Prinzip dieses Planimeters enthält, wie man sieht, nichts neues, das Instrument ist eng verwandt mit mehreren anderen, von denen es sich nur durch die technische Konstruktion unterscheidet, mittels welcher die Zerlegung der Fläche in Parallelstreifen und die mechanische Addition letzterer bewirkt wird. In dieser Hinsicht dürfte es wohl das vollkommenste seiner Klasse sein.

8. Schließlich sind in der Reihe der Planimeter polnischer Herkunft noch die beiden Integraphen: der von Żmurko und der von Abdank-Abakanowicz, anzuführen, die ja — wie jeder Integraph — zugleich Planimeter sind. Der Integraph von Żmurko, ausgeführt von G. Coradi in Zürich, wurde zuerst 1878 in Paris ausgestellt. Der Integraph von Abakanowicz wurde zuerst 1880 in einer polnischen Bauingenieur-Zeitschrift beschrieben. Da indessen die ausführlichen Beschreibungen dieser beiden Instrumente in weltbekannten Sprachen und an leicht zugänglichen Stellen erschienen sind,<sup>1)</sup> liegt kein Bedürfnis vor, diese Instrumente hier zu beschreiben.

## Über den Einfluß des Windes auf die barometrisch gemessenen Höhenunterschiede.

Von Prof. J. Liznar in Wien.

Die barometrische Höhenformel, die bekanntlich unter der Voraussetzung abgeleitet wird, daß sich die Atmosphäre im Gleichgewichte befindet, weil nur in diesem Falle der in einem bestimmten Niveau herrschende Druck dem Gewichte der über ihm lagernden Luftsäule gleich ist, liefert nur dann richtige Werte des Höhenunterschiedes, wenn die in ihr vorkommenden Größen bei Windstille beobachtet wurden. Bei windigem oder stürmischem Wetter werden die Fehler um so größer, je stärker die Luftbewegung ist, sie hängen also von der Windgeschwindigkeit ab. Über diesen Zusammenhang existieren bisher leider keine eingehenderen Untersuchungen, weil man es, um brauchbare Werte des Höhenunterschiedes zu erhalten, so viel als möglich vermieden hat, die Höhenmessungen bei

<sup>1)</sup> Der Integrator des Prof. Dr. Żmurko in seiner Wirkungsweise und praktischen Verwendung dargestellt von K. Skibiński, Ing. u. Privatdozent an der k. k. techn. Hochschule in Lemberg. (S. A. aus dem LIII. Bande d. Denkschr. d. math-naturw. Kl. d. k. k. Akad. d. Wiss. Wien 1886.)

Les intégraphes; la courbe intégrale et ses applications. Par Br. Abdank-Abakanowicz. Paris, Gauthier-Villars, 1886.