Paper-ID: VGI_190728

# Das Eigengewicht der Bestimmungsgleichungen

Karl Fuchs [1]

[1] *Preßburg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **5** (13–14), S. 209–213

1907

BibTEX:

```
@ARTICLE{Fuchs_VGI_190728,
Title = {Das Eigengewicht der Bestimmungsgleichungen},
Author = {Fuchs, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {209--213},
Number = {13--14},
Year = {1907},
Volume = {5}
}
```

ihrem Abschlusse entgegengingen. In den Anfang seiner Laufbahn ragen jedoch die großen geodätischen Aufgaben, welche österreichische Techniker für die Länder der ungarischen Krone gelöst. Die dieser Zeit folgende Epoche der Reambulierung der österreichischen Katastervermessung war arm an geodätischen Problemen höherer Art. Mangels entsprechender Aufgaben sank auch das Triangulierungs- und Kalkulbureau jäh von seiner erst erreichten Höhe.

Brochs unvergängliches Verdienst ist es nun, dieses Institut zu neuem Leben erweckt zu haben. Dem Zuge der Zeit folgend, welche an Stelle der graphischen Vermessung die den höheren Anforderungen entwickelteren Kulturlebens Rechnung tragende numerische Aufnahmsmethode setzte, hat derselbe der Polygonalvermessung in Österreich durch die Verfassung der Instruktion für Theodolitvermessungen die Wege geebnet und dieselbe dank der Einsicht und Förderung der maßgebenden Faktoren des k. k. Finanzministeriums zu segensreicher Entfaltung gebracht.

Diese Tat allein sichert Broch einen ehrenvollen Platz in der Geschichte des österreichischen Vermessungswesens.

Wien, im Juni 1907.

*Ernst Engel,*
k. k Inspektor
im k. k. Triangulierungs- und Kalkulbureau,
Dozent an der k. k. Hochschule für Bodenkultur
in Wien.

---

# Das Eigengewicht der Bestimmungsgleichungen.

Von Prof. **Karl Fuchs** in Preßburg.

Der Kern des vorliegenden Aufsatzes ergibt sich aus folgendem Zahlenbeispiele. Es seien drei lineare Bestimmungsgleichungen mit zwei Unbekannten gegeben:

$$+x+\frac{y}{\sqrt{3}}=10, \qquad -x+\frac{y}{\sqrt{3}}=10, \qquad 0.x+1.y=0 \quad \ldots \quad 1)$$

Geometrisch sind das die Gleichungen dreier Geraden, die ein gleichseitiges Dreieck umfassen. Auf Grund der vollkommenen Symmetrie erwarten wir als wahrscheinlichste Werte der Unbekannten die Koordinaten des Dreiecksmittelpunktes:

$$x=0, \qquad y=\frac{10}{\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Die Normalgleichungen der Methode der kleinsten Quadrate geben uns aber andere wahrscheinlichste Werte:

$$x=0, \qquad y=\frac{12}{\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Es kommt mithin den beiden ersten Gleichungen des Systemes 1) scheinbar ein größeres Gewicht zu, als der dritten Gleichung.

Wir wollen nun jede Gleichung 1) durch die algebraische Hypotenuse h ihrer Koeffizienten dividieren. Die algebraische Hypotenuse h irgendwelcher Koeffizienten a b . . . ist definiert durch:

$$h^2=a^2+b^2+\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

d. h. ihr Quadrat ist die Quadratsumme der Koeffizienten. Die Hypotenusen unserer drei Gleichungen 1) sind also:

$$h_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad h_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad h_3 = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

Nach Division durch diese Hypotenusen erhalten die drei Gleichungen 1) die Formen:

$$+\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} = 5\sqrt{3}, \quad -\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} = 5\sqrt{3}, \quad 0 \cdot x + 1 \cdot y = 0 \quad . \; . \; 6)$$

Wenn wir jetzt die Normalgleichungen anwenden, dann erhalten wir auch richtig die erwarteten Wurzeln 2); die drei Gleichungen sind also augenscheinlich nach der Division durch die Hypotenusen auf gleiches Gewicht gebracht worden. Im vorliegenden Aufsatze soll in der Tat allgemein bewiesen werden:

Die gegebenen Bestimmungsgleichungen werden auf gleiches Gewicht gebracht, wenn man jede einzelne Gleichung durch die algebraische Hypotenuse ihrer Koeffizienten dividiert.

Als Folgerung wird sich dann ergeben:

Das Eigengewicht einer Bestimmungsgleichung ist durch die Quadratsumme ihrer Koeffizienten bestimmt.

1. Es sei eine Reihe von Bestimmungsgleichungen $G_1, G_2 \ldots$ gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + \ldots = l_1 \\ a_2 x + b_2 y + \ldots = l_2 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7)$$

Die wahrscheinlichsten Werte $x_1, y_1 \ldots$ der Unbekannten, die die Normalgleichungen der Methode der kleinsten Quadrate versprechen, sind von der Art, daß die kleinsten Ergänzungen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ der Absolutglieder $l_1, l_2 \ldots$ die Gleichungen $G_1, G_2 \ldots$ befriedigen. (Erste Definition.)

Die kleinsten Ergänzungen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ sind bekanntlich die Ergänzungen, die die kleinste Hypotenuse $\lambda_0$ geben; es muß also gelten:

$$\lambda_0^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots = \Sigma (ax + by + \ldots - l)^2 = \text{Min.} \; . \; . \; . \; 8)$$

Die Minimumbedingungen dieser Gleichung sind bekanntlich eben die Normalgleichungen.

Die wahrscheinlichsten Werte $x_2, y_2 \ldots$ der Unbekannten, die wir — mit mehr oder weniger Recht — erwarten, sind von anderer Art:

Die kleinsten Ergänzungen

$$\xi_1, \eta_1 \ldots \qquad \xi_2, \eta_2 \ldots \qquad \ldots . \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 9)$$

der Unbekannten $x, y \ldots$ sollen die einzelnen Gleichungen $G_1, G_2 \ldots$ befriedigen. (Zweite Definition.)

Wir wollen den Weg suchen, wie man aus den gegebenen Gleichungen $G_1, G_2 \ldots$ die wahrscheinlichsten Werte im Sinne der zweiten Definition berechnen kann.

2. Wenn man in die Gleichung $G_1$ irgendwelche Werte $x_0, y_0 \ldots$ einsetzt, dann kann die Gleichung durch beliebige Ergänzungen $\xi_1, \eta_1 \ldots$ befriedigt werden:

$$a_1 (x_0 + \xi_1) + b_1 (y_0 + \eta_1) + \ldots = l_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 10)$$

Diese Ergänzungen $\xi_1, \eta_1 \ldots$ können wir beliebig groß wählen, da wir sie bis auf eine beliebig wählen können; wir können sie aber nicht alle gleichzeitig beliebig klein annehmen. Wir wollen nun die kleinsten Ergänzungen $\xi_1, \eta_1 \ldots$ berechnen, d. h. jene Ergänzungen, welche die kleinste Hypotenuse $\rho_1$ geben:

$$\rho_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \ldots = \text{Min.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ 11)$$

Wenn wir den Ergänzungen $\xi_1, \eta_1 \ldots$ irgendwelche Inkremente $\partial \xi_1, \partial \eta_1 \ldots$ geben wollen, ohne die Gleichheit 10) zu stören, dann müssen diese Inkremente die Bedingung erfüllen:

$$a_1 \partial \xi_1 + b_1 \partial \eta_1 + \ldots = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ 12)$$

Wenn die Ergänzungen $\xi_1, \eta_1 \ldots$ die kleinsten sein, also die Bedingung 11) erfüllen sollen, dann dürfen keine statthaften Inkremente $\partial \xi_1, \partial \eta_1 \ldots$ den Wert von $\rho_1$ verkleinern können, was nur dann der Fall ist, wenn die Inkremente den Wert von $\rho_1$ überhaupt nicht ändern können; das ist aber der Fall, wenn sie die folgende Bedingung erfüllen:

$$\xi_1 \partial \xi_1 + \eta_1 \partial \eta_1 + \ldots = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ 13)$$

Die beiden Gleichungen 12), 13) können nur dann gleichzeitig erfüllt werden, wenn die Koeffizienten der Inkremente proportional sind:

$$\frac{\xi_1}{a_1} = \frac{\eta_1}{b_1} = \ldots = q = \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \ldots}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + \ldots}} \quad \ldots \ldots \ 14)$$

Der letzte Bruch ist aus den ersten Brüchen auf folgende Art abgeleitet: Wir quadrieren die ersten Brüche und bringen sie so auf den Wert $q^2$; dann addieren wir sowohl die Zähler als auch die Nenner und erhalten so wieder einen Bruch vom Werte $q^2$; wenn wir dann die Wurzel ziehen, dann finden wir den letzten Bruch, der somit wieder den Wert q hat. Der letzte Bruch besteht aus zwei algebraischen Hypotenusen:

$$\rho_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \ldots} \qquad h_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + \ldots} \quad \ldots \ 15)$$

Die Gleichung 14) zerfällt somit in folgende Teilgleichungen:

$$\frac{\xi_1}{\rho_1} = \frac{a_1}{h_1} \qquad \frac{\eta_1}{\rho_1} = \frac{b_1}{h_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ 16)$$

Dabei gilt:

$$\left(\frac{\xi_1}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{\rho_1}\right)^2 + \ldots = 1 \qquad \left(\frac{a_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{h_1}\right)^2 + \ldots = 1 \quad \ldots \ 17), 18)$$

Wenn $G_1$ die Gleichung einer Ebene $E_1$ wäre, dann wären $x_0, y_0 \ldots$ die Koordinaten eines außerhalb der Ebene gelegenen Punktes $p_0$; $\rho_1$ wäre der Normalabstand des Punktes $p_0$ von der Ebene $E_1$; die Gleichungen 16) würden dann sagen, daß dieses Lot $\rho_1$ dieselben Stellwinkel hat, wie das vom Koordinatenursprung auf die Ebene $E_1$ gefällte Lot; die Gleichung 18) wäre das Grundgesetz aller Stellwinkel.

Wir haben die Absicht, die kleinsten Ergänzungen $\xi_1, \eta_1 \ldots$ zu berechnen. Um sie aus den Gleichungen 16) berechnen zu können, müssen wir erst den Wert von $\rho_1$ bestimmen. Wir setzen zu dem Zweck in 10) die Werte von $\xi_1, \eta_1 \ldots$

aus 16) ein und dividieren die Gleichung durch $h_1$. Mit Rücksicht auf 18) finden wir dann:

$$-\rho_1 = \frac{a_1 x_0 + b_1 y_0 + \ldots - l_1}{h_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

Jetzt können wir aus den Gleichungen 16) die kleinsten Ergänzungen $\xi_1, \eta_1 \ldots$ berechnen. Entsprechendes gilt auch für die übrigen Gleichungen $G_2, G_2 \ldots$

Wir suchen ursprünglich die wahrscheinlichsten Werte $x_2, y_2 \ldots$ der Unbekannten im Sinne der zweiten Definition, d. h. die kleinsten Ergänzungen 9) der *Unbekannten* $x_2, y_2 \ldots$ sollen die Gleichungen $G_1, G_2 \ldots$ befriedigen. Da genügt es offenbar, die algebraische Hypotenuse der $\rho$ zu einem Minimum zu machen:

$$\rho_0^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots = \text{Min.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 20)$$

da ja jedes einzelne $\rho$ seinerseits die Ergänzungen $\xi, \eta \ldots$ der betreffenden Gleichung G zu einem Minimum macht. Es muß also laut 20) und 19) gelten:

$$\rho_0^2 = \sum \left(\frac{a}{h} \cdot x + \frac{b}{h} \cdot y + \ldots - \frac{l}{h}\right)^2 = \text{Min.} \quad \ldots\ldots \quad 21)$$

Wenn wir diese Gleichung 21) mit 8) vergleichen, dann finden wir:

*Wenn wir jene wahrscheinlichsten Werte $x_2, y_2 \ldots$ suchen, die die gegebenen Gleichungen $G_1, G_2 \ldots$ mit den kleinsten Ergänzungen $\xi, \eta \ldots$ befriedigen, dann müssen wir vor Anwendung der Normalgleichungen jede einzelne Gleichung G durch die algebraische Hypotenuse h ihrer Koeffizienten dividieren.*

Das ist unser erstes Resultat. Die je durch ihre Koeffizientenhypotenuse h dividierten Gleichungen $G_1, G_2 \ldots$ wollen wir die *reduzierten* Gleichungen nennen und mit $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \ldots$ bezeichnen.

3. Wenn wir jede der reduzierten Gleichungen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \ldots$ mit ihrer Hypotenuse h wieder multiplizieren, dann erhalten wir die ursprünglichen Gleichungen $G_1, G_2 \ldots$ wieder zurück. Mit Bezug auf 8) können wir also schreiben:

$$\lambda = h\left(\frac{a}{h} \cdot x + \frac{b}{h} \cdot y + \ldots - \frac{l}{h}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

und Gleichung 8) selbst nimmt die Form an:

$$\lambda_0^2 = \Sigma\, h^2\left(\frac{a}{h} \cdot y + \frac{b}{h} \cdot y + \ldots - \frac{l}{h}\right) = \text{Min.} \quad \ldots\ldots \quad 23)$$

Wenn wir diese Gleichung 23) mit 21) vergleichen, dann erkennen wir:

Wenn wir die Normalgleichungen unmittelbar auf die *gegebenen* Gleichungen $G_1, G_2 \ldots$ anwenden, dann erhalten wir wahrscheinlichste Werte $x_0, y_0 \ldots$ von der Art, als hätten wir jede reduzierte Gleichung $\mathfrak{G}$ nicht *einmal*, sondern $h^2$mal angeschrieben, d. h. als hätten wir jeder reduzierten Gleichung ein *Gewicht* gleich der Quadratsumme $h^2$ ihrer Koeffizienten zugeschrieben; und das stimmt mit unserer Erfahrung am einleitenden Zahlenbeispiel überein.

Wenn wir die Normalgleichungen aber laut 21) auf die *reduzierten* Gleichungen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \ldots$ anwenden, dann erhalten wir wahrscheinlichste Werte $x_2, y_2 \ldots$ mit kleinsten befriedigenden Ergänzungen $\xi, \eta \ldots$, und zwar Werte von der Art, wie wir sie von Gleichungen *gleichen* Gewichtes erwarten.

Auf Grund dieser zwei Bemerkungen haben wir also die Sätze:

Wenn wir unter den wahrscheinlichsten Werten der Unbekannten x, y ... solche Werte verstehen, die die gegebenen Gleichungen $G_1, G_2 \ldots$ mit den kleinsten Ergänzungen $\xi, \eta \ldots$ befriedigen, dann haben die gegebenen Gleichungen schon von Haus aus ungleiches Gewicht. Jede Gleichung $G_1, G_2 \ldots$ hat ein Eigengewicht gleich der Quadratsumme $h^2$ ihrer Koeffizienten und die Gleichungen $G_1, G_2 \ldots$ werden auf gleiches Gewicht gebracht, indem man jede einzelne Gleichung durch der algebraischen Hypotenuse h ihrer Koeffizienten dividiert.

Das aber sollte bewiesen werden.

---

# Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichungsrechnung.

Von Oberingenieur **S. Wellisch.**

(Fortsetzung).

Eine andere Erklärung wäre folgende:

Dividiert man alle Gewichte durch ihr arithmetisches Mittel

$$\frac{[p]}{n} = k,$$

was ja zulässig ist, da die Gewichte nur Verhältniszahlen sind, so erhält man die neuen, auf eine andere Einheit bezogenen Gewichte:

$$g_1 = \frac{p_1}{k} \qquad g_2 = \frac{p_2}{k} \qquad \ldots, \; g_n = \frac{p_n}{k}$$

welche die Eigenschaft haben, daß deren arithmetisches Mittel gleich der Einheit ist, denn man hat:

$$\frac{[g]}{n} = \frac{\left[\frac{p}{k}\right]}{n} = 1 \quad \text{und } [g] = n.$$

Bildet man das mittlere Fehlerquadrat nach dem allgemeinen arithmetischen Mittel, nämlich

$$m_*^2 = \frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{[p]},$$

so kann man hiefür auch setzen:

$$m_*^2 = \frac{[g\varepsilon\varepsilon]}{[g]} = \frac{[g\varepsilon\varepsilon]}{n}.$$

Damit erscheint der mittlere Fehler der Gewichtseinheit bei Zugrundelegung einer ganz bestimmten Gewichtseinheit mit dem allgemeinen arithmethischen Mittel in Einklang gebracht. Eine nähere Beziehung zwischen m und $m_*$ erhält man, wenn im Nenner für $[p] = nk$ substituiert wird, und zwar:

$$m_*^2 = \frac{1}{k}\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{m^2}{k}$$