Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichsrechnung

Siegmund Wellisch

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **5** (7–8, 9–10, 13–14, 15–16, 17–18, 21–22), S. 95–102, 129–137, 213–223, 245–249, 279–286, 335–345

1907


```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_190717,
Title = {Theoretische und historische Betrachtungen {\"u}ber die
    Ausgleichsrechnung},
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {95--102, 129--137, 213--223, 245--249, 279--286, 335--345},
Number = {7--8, 9--10, 13--14, 15--16, 17--18, 21--22},
Year = {1907},
Volume = {5}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III/2 Kegelgasse 29, Parterre, T. 2.
K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824,175.

Erscheint am 1. jeden Monats. Jährlich 24 Nummern in 12 Doppelheften.
Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.

Expedition und Inseratenaufnahme durch die Buchdruckerei J. Wladarz (vorm. Haase) Baden bei Wien, Pfarrgasse 3.

Nr. 7—8. Wien, am 1. April 1907. V. Jahrgang.

Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichungsrechnung.

Von S. Wellisch.

I. Über das arithmetische Mittel.

Wenn für die Bestimmung einer unbekannten Größe mehrere von einander unabhängig und unmittelbar erhaltene Beobachtungsergebnisse von gleicher Genauigkeit vorliegen, so wird als zweckmäßigster Wert der Unbekannten das einfache arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen angenommen. Sind die Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit, so tritt an die Stelle des einfachen das zusammengesetzte oder allgemeine arithmetische Mittel, welches Fechner zum Unterschiede von dem singulären Mittel das summarische Mittel nennt.

Das einfache arithmetische Mittel ist die durch die Anzahl der Beobachtungen geteilte Summe aller Beobachtungen; es ist in einer Reihe von direkten Beobachtungen derjenige Mittelwert, welcher angibt, wie groß eine jede Beobachtung sein müßte, wenn alle gleich wären und dennoch dieselbe Summe ergäben, wie die ursprünglichen Beobachtungen. Das allgemeine arithmetische Mittel ist die durch die Summe der Gewichte dividierte Summe der mit den betreffenden Gewichten multiplizierten Beobachtungen. Reuschle nennt die im Zähler stehenden Produkte die Momente der Beobachtungen in Beziehung auf ihren mittleren Wert und sagt, »daß dieser der Quotient der Summe der Momente durch die Summe der Gewichte sei«.

Die Regel vom arithmetischen Mittel ist unstreitig die einfachste und vorteilhafteste Anwendung der methodischen Ausgleichung.

Schon Simpson (1755) und Lambert (1760) hatten die Bedeutung des arithmetischen Mittels erkannt und dessen Berechtigung als zweckmäßigsten Mittelwert hervorgehoben. Lagrange (1773) hat es zum erstenmal einer fehlertheoretischen Untersuchung unterzogen und seither haben namhafte Mathematiker, wie D. Bernoulli (1777), Laplace (1812), Encke (1834), Reuschle (1843), Morgan (1864), Schiaparelli (1868), Stone (1868), Ferrero (1876), Czuber (1886) u. a. beachtenswerte Versuche oder eingehende Betrachtungen angestellt, die das arithmetische Mittel als dasjenige Resultat erweisen sollen, welchem die größte Wahrscheinlichkeit zugeschrieben werden darf.

Legendre (1805) spricht das arithmetische Mittel als ein in der Praxis lange übliches und bewährtes Prinzip an.

Muncke (1825) schreibt in Gehlers Phys. Wörterbuch, Art. Beobachtung: »Man ist allgemein darüber einverstanden, daß für ein- und dieselbe Größe das arithmetische Mittel aus der größtmöglichen Zahl von Beobachtungen, mit Ausschluß der von diesem Mittel selbst am weitesten abweichenden, als das der absoluten Wahrheit am meisten genähert anzusehen sei.«

Encke (1834) findet, daß bei einer beliebigen Anzahl gleich guter Beobachtungen einer unbekannten Größe das arithmetische Mittel aus allen den Wert gibt, der vorzugsweise zu wählen ist und folglich auch als der wahrscheinlichste angesehen werden muß und daß dieser Satz, »so lange man überhaupt mehrere Beobachtungen unter sich verbunden hat, von jeher als Grundsatz angenommen worden ist, und im eigentlichen Verstande beruht die Meinung, die wir von der Sicherheit aller aus der Erfahrung genommenen Größen in jeder Wissenschaft haben, wesentlich auf ihm. Man kann deswegen von ihm wohl behaupten, daß die Erfahrung seine Richtigkeit bestätigt hat«.

Reuschle (1843) nennt das arithmetische Mittel »das Mittel unter den Mitteln«, die zu konkurrieren überhaupt herangezogen werden können.

Gerling (1843) bezeichnet die Regel von dem arithmetischen Mittel als eine Rechnungsoperation, »welche seit Jahrhunderten, ehe von Ausgleichungsrechnungen im allgemeinen die Rede sein konnte, von dem praktischen Gefühle vorgeschrieben wurde«.

Wittstein (1849) erhebt sie zu einem Satze, »dem man im täglichen Gebrauche eine Art von unmittelbarer Evidenz beizulegen gewohnt ist«.

Dienger (1857) äußert sich hierüber wie folgt: »Die Annahme des arithmetischen Mittels ist eine so natürliche, daß sie von längst her gemacht wurde, ehe man nur an die Methode der kleinsten Quadratsummen dachte, und sie empfiehlt sich so unmittelbar, daß wir eine jede andere Methode, die nicht auf dieselbe zurückweisen würde, verwerfen würden.«

Dem Russen Sawitsch (1857) erscheint diese Regel so natürlich, daß sie selbst ohne einen Beweis zugegeben und daher als Grundsatz angenommen werden kann.

Henke (1868) betrachtet sie als einen Satz, »der längst als Prinzip anerkannt sei und der dem praktischen Gefühl als das einzig mögliche Auskunftsmittel erscheint«.

Geisenheimer (1879) nennt ihn ein altes Verfahren, »welches ein gewisser mathematischer Instinkt jeden Praktiker anwenden läßt«.

Oppolzer (1880) stellt ihn gleichsam als Axiom ohne Beweis hin, »da derselbe so viel Wahrscheinlichkeit für sich in Anspruch nimmt, daß man die Annahme als evident anzunehmen sich erlauben kann«.

Herr-Tinter (1887) erklären ihn »so sehr in der Natur der Sache begründet, daß man ihn seit jeher als unbedingt giltig angenommen hat«.

Ein strenger Beweis für die Regel des arithmetischen Mittels als des wahrscheinlichsten oder vorteilhaftesten Wertes einer wiederholt gemessenen Größe läßt sich aber nicht führen; es lassen sich nur plausible Gründe angeben, welche für die Wahl dieses Mittelwertes sprechen. Gauss (1809) behandelt daher das arithmetische Mittel wie ein Axiom, indem er es ohne Beweisführung zwischen allen beobachteten Werten, »wenn auch nicht mit absoluter Strenge, so doch wenigstens sehr nahe« als den wahrscheinlichsten Wert bezeichnet und zur Begründung seiner Fehlertheorie mit der Rechtfertigung heranzieht, »daß es immer das sicherste ist, an diesem festzuhalten«. Er spricht auch vom arithmetischen Mittel als von einer landläufigen Regel, deren Vortrefflichkeit allgemein als gut anerkannt ist. Sie galt eben seit jeher, wie in Czuber (1891) zu lesen steht, »als unanfechtbare Eingebung des Verstandes«, warum sollte da nicht auch ein Gauss ohne weitere Beweisführung davon Gebrauch machen?

Mit Bezug auf die Methode der kleinsten Quadrate macht daher Gauss (1809) die Aussage, daß dieses Prinzip überall mit demselben Rechte gelten muß, mit welchem das arithmetische Mittel zwischen mehreren beobachteten Werten derselben Größe als wahrscheinlichster Wert angenommen wird, und auch Hansen (1867) stellt an die Grenze der streng beweisbaren Aussprüche den Satz hin: »Mit demselben Rechte, mit welchem man im einfachen Falle das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Wert der einzelnen Unbekannten ansieht, muß man im allgemeinen Falle diejenigen Werte der Unbekannten als die wahrscheinlichsten Werte derselben betrachten, durch welche bewirkt wird, daß die Summe der mit ihren bezüglichen Gewichten multiplizierten Quadrate der übrigbleibenden Fehler ein Minimum wird.«

II. Über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate.

Gauss hat, abgesehen von der bloß auf »Prinzipien der Zweckmäßigkeit« basierten Begründungsart, zwei Versuche unternommen, die Methode der kleinsten Quadrate durch Anknüpfung an die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu deduzieren, und zwar in seinen Werken: »Theoria motus corporum coelestium, 1809« und »Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, 1821«.

Die erste Begründung gibt Gauss mit Benützung des arithmetischen

Mittels, an welchem festzuhalten er als das sicherste bezeichnet, da zwischen mehreren unmittelbar erlangten Beobachtungen das arithmetische Mittel den wahrscheinlichsten Wert liefert. Es schien ihm am natürlichsten, die Funktion, welche die Wahrscheinlichkeit der Fehler darstellt, so anzunehmen, daß für den einfachsten Fall die Regel des arithmetischen Mittels daraus hervorgehe. Er fand so auf umgekehrtem Wege, daß das Gesetz für die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers v, oder kürzer das Fehlergesetz, durch die Exponentialfunktion

$$\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hhvv}$$

ausgedrückt werden müsse, wo π den Kreisumfang für den Durchmesser 1, e die Basis der natürlichen Logarithmen und h eine Konstante bedeutet, die Gauss als das Maß für die Genauigkeit der Beobachtungen ansieht. Da nun die Wahrscheinlichkeit, daß mehreren von einander unabhängigen Beobachtungen die Fehler $v_1\ v_2\ v_3 \ldots$ anhaften, dargestellt werden kann durch das Produkt

$$\Omega = \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \varphi(v_3) \ldots,$$

so wird der wahrscheinlichste Wert aller Beobachtungen derjenige sein, für welchen dieses Produkt den größten Wert erlangt, oder die Summe

$$\Sigma = h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots = [h^2 vv]$$

ein Minimum wird. Diese Bedingung gilt aber nicht nur zwischen mehreren unmittelbar beobachteten Werten derselben Größe, sondern auch für ein Wertsystem der Größen x, y, z . . . von der allgemeinen Form

$$ax + by + cz + \ldots - l = v,$$

wo l die Beobachtungen bedeuten. Führt man statt der Genauigkeitsquadrate h^2 die Gewichtszahlen p ein, so hat man für die Methode der kleinsten Quadrate den grundlegenden Satz: $[pvv] = \min$, oder in Worten:

»Das wahrscheinlichste Wertsystem der Unbekannten ist dasjenige, welches die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den gemessenen und berechneten Werten der Beobachtungsgrößen, multipliziert mit ihren Gewichten, zu einem Minimum macht.«

Die zweite Begründung hat Gauss auf der selbständigen Definition des mittleren Fehlers der Beobachtungen aufgebaut, dessen willkürliche Wahl er durch die Allgemeinheit und Einfachheit ihrer Folgerungen rechtfertigt. Ist v der einer Beobachtung anhaftende Fehler, $\psi(v)$ die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Fehler zwischen den endlichen Grenzen o und v liege, so ist $d\psi(v)$ die Wahrscheinlichkeit des zwischen den unendlich nahen Grenzen v und $v + dv$ eingeschlossenen Fehlers, und es stellt der Differentialquotient

$$\frac{d\psi(v)}{dv} = \varphi(v)$$

die Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion oder das Fehlergesetz vor; das Integral

$$\int_a^b d\psi(v) = \int_a^b \varphi(v)\,dv$$

ist demnach die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler zwischen den endlichen Grenzen a und b liege. Das zwischen denselben Grenzen genommene Integral

$$\int v \, . \, \varphi(v) dv$$

ist dann das Mittel aller möglichen Fehler, nämlich die Summe sämtlicher Fehler dividiert durch ihre Anzahl, und es ist

$$m^2 = \int v^2 . \, \varphi(v) dv$$

der mittlere Wert aller Fehlerquadrate. Die Größe m, die Gauss am geeignetsten erscheint, als Genauigkeitsmaß für Beobachtungen zu dienen, wird der mittlere Fehler der Beobachtungen genannt. Indem Gauss diejenige Bestimmung der Unbekannten als die plausibelste und sicherste erklärt, welche mit dem kleinsten mittleren Fehler behaftet bleibt, gelangt er — unabhängig von der zuerst gelehrten Anknüpfungsart — zu dem Satze:

»Das plausibelste Wertsystem der Unbekannten ist dasjenige, bei welchem die kleinsten mittleren Fehler zu befürchten sind.«

Die erste auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen gestellte Begründung stützt sich auf das hypothetische Fehlergesetz, das aber, wie Laplace gezeigt hat, nur für eine unendlich große Anzahl von Beobachtungen strenge Giltigkeit besitzt. Ist jedoch die Anzahl der Beobachtungen eine mäßige, so bleibt, nach den eigenen Worten von Gauss, »die Frage unentschieden, so daß bei Verwerfung unseres hypothetischen Gesetzes die Methode der kleinsten Quadrate nur deshalb vor anderen empfohlen zu werden verdiente, weil sie zur Vereinfachung der Rechnungen am besten geeignet ist«.[1]) — »Die Methode der kleinsten Quadrate hat dann nicht mehr den Rang eines von der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebotenen Gesetzes, sondern empfiehlt sich nur durch die Einfachheit der damit verknüpften Operationen.«[2]) — »Mit diesem Gesetze steht aber und fällt die Bedeutung der Resultate als der wahrscheinlichsten Werte der unbekannten Elemente.«[3])

Aus diesem Grunde hat Gauss einerseits die aus der zweiten Begründung abgeleiteten Resultate nicht mehr die wahrscheinlichsten, sondern die plausibelsten genannt, anderseits hat er die aus dem mittleren zu befürchtenden Fehler gegebene Anknüpfungsart an die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die er nach seiner Überzeugung als die ausschließlich und einzig zulässige bezeichnete[4]), der älteren vorgezogen, also namentlich darum, weil die zweite Begründung, sobald einmal der Begriff des mittleren Fehlers als feststehend angenommen wird, von dem Fehlergesetze und von der Anzahl der Beobachtungen unabhängig erscheint. Aber auch der Begriff des mittleren Fehlers ist durchaus nicht frei von jeder Willkür, denn Gauss gibt zu seiner Bestimmung in den »Göttingischen gelehrten Anzeigen« vom 26. Februar 1821 folgendes an: »Man lege jedem Fehler ein von seiner

[1]) Gauss: Theoria comb. Art. 17.
[2]) Gauss: Göttingische gelehrte Anzeigen, 1821, Februar 26.
[3]) Czuber: Theorie der Beobachtungsfehler, S. 239.
[4]) Gauss: Brief an Schumacher vom 25. Nov. 1844.

Größe abhängendes Moment bei, multipliziere das Moment jedes möglichen Fehlers in dessen Wahrscheinlichkeit und addiere die Produkte: der Fehler, dessen Moment diesem Aggregat gleich ist, wird als mittlerer betrachtet werden müssen. Allein, welche Funktion der Größe des Fehlers wir für dessen Moment wählen wollen, bleibt wieder unserer Willkür überlassen, wenn nur der Wert derselben immer positiv ist und für größere Fehler größer als für kleinere.« Gauss hat nun die einfachste Funktion dieser Art gewählt, nämlich das Quadrat.

Es soll nun versucht werden, das Prinzip der kleinsten Quadratsummen sowohl unabhängig von dem exponentiellen Fehlergesetze und der Anzahl der Beobachtungen, als auch ohne Benützung des mittleren Fehlers, aber unter Zugrundelegung des axiomatischen Satzes vom arithmetischen Mittel zu begründen. Die hieraus gewonnenen Resultate können dann zwar ebenfalls nicht auf die größte mathematische Wahrscheinlichkeit im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung Anspruch erheben, sie können aber immerhin als die praktisch wahrscheinlichsten oder glaubwürdigsten Werte angesprochen werden.

Die Wahrscheinlichkeit ω für das Eintreten einer bestimmten Fehlergröße v, die eine Funktion des Fehlers ist und als unbekannt vorausgesetzt wird, ist allgemein dargestellt durch das Symbol

$$\omega = \varphi(v).$$

Sind nun $v_1\ v_2\ v_3 \ldots$ die Widersprüche, die in einer vorliegenden Reihe von Gleichungen auftreten, nämlich

$$\left.\begin{array}{ll} a_1x + b_1y + c_1z - l_1 = v_1 & \text{Gewicht } p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z - l_2 = v_2 & \text{,, } \quad p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z - l_3 = v_3 & \text{,, } \quad p_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots 1)$$

so ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Widersprüche mit den zunächst noch unbestimmten Näherungswerten für die Unbekannten x, y, z gleichzeitig erscheinen, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausgedrückt durch das Produkt

$$\Omega = \varphi(v_1)\,.\,\varphi(v_2)\,.\,\varphi(v_3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

Je größer diese Wahrscheinlichkeit ist, desto mehr werden die angenommenen Näherungswerte der Wahrheit entsprechen und es werden diejenigen Werte der Unbekannten die wahrscheinlichsten sein, welchen gleichzeitig die größte Wahrscheinlichkeit Ω zukommt, denn dieses Wertsystem der Unbekannten erzeugt die wahrscheinlichste Verbindung der übrigbleibenden Widersprüche oder Fehler. Da jede Änderung der von einander unabhängigen Unbekannten x, y, z auch alle v beeinflußt, wodurch auch Ω geändert wird, so hat man für die Bedingung des Maximums von Ω:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$

Bleiben wir zunächst bei der ersten Unbekannten x und beschränken wir uns der Einfachheit halber auch nur auf drei Fehlergleichungen, so hat man

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(v_1)}{\partial x}\Big(\varphi(v_2)\,.\,\varphi(v_3)\Big) + \frac{\partial \varphi(v_2)}{\partial x}\Big(\varphi(v_1)\,.\,\varphi(v_3)\Big) + \frac{\partial \varphi(v_3)}{\partial x}\Big(\varphi(v_1)\,.\,\varphi(v_2)\Big) = 0$$

oder mit Beziehung auf 2):

$$\frac{\partial \varphi(v_1)}{\partial x} \cdot \frac{\Omega}{\varphi(v_1)} + \frac{\partial \varphi(v_2)}{\partial x} \cdot \frac{\Omega}{\varphi(v_2)} + \frac{\partial \varphi(v_3)}{\partial x} \cdot \frac{\Omega}{\varphi(v_3)} = o$$

Kürzt man durch die konstante Größe Ω, so kann man auch setzen:

$$\frac{\partial \varphi(v_1)}{\partial v_1 \cdot \varphi(v_1)} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(v_2)}{\partial v_2 \cdot \varphi(v_2)} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(v_3)}{\partial v_3 \cdot \varphi(v_3)} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x} = o \quad . \; . \; . \; . \; 3)$$

Behufs Bestimmung der einzelnen Glieder dieser Gleichung betrachte man den einfachsten Fall der wiederholten direkten Beobachtung einer einzigen Unbekannten entsprechend dem Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{ll} x - l_1 = v_1 & \text{Gewicht } p_1 \\ x - l_2 = v_2 & \text{,,} \quad p_2 \\ \ldots\ldots & \ldots \end{array}$$

woraus als wahrscheinlichster Wert der Unbekannten das allgemeine arithmetische Mittel hervorgehen soll. Es vereinfacht sich dann die Gleichung 3), da in diesem Falle sämtliche Differentialquotienten der Widersprüche nach der Unbekannten:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_3}{\partial x} = 1$$

der Einheit gleich werden, wie folgt:

$$\frac{\partial \varphi(v_1)}{\partial v_1 \cdot \varphi(v_1)} + \frac{\partial \varphi(v_2)}{\partial v_2 \cdot \varphi(v_2)} + \frac{\partial \varphi(v_3)}{\partial v_3 \cdot \varphi(v_3)} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; 4)$$

Soll nun diese Gleichung 4) mit dem Satze vom arithmetischen Mittel übereinstimmen, für den die Bedingung besteht, daß alle mit den Gewichten multiplizierten Widersprüche untereinander sich aufheben, d. h.

$$[pv] = p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 = o, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

so müssen die mit einem unbestimmten Faktor k multiplizierten Glieder von 4) identisch sein mit den korrespondierenden Gliedern von 5), also:

$$\frac{\partial \varphi(v_1)}{\partial v_1 \cdot \varphi(v_1)} = k p_1 v_1 \qquad \frac{\partial \varphi(v_2)}{\partial v_2 \cdot \varphi(v_2)} = k p_2 v_2 \qquad \frac{\partial \varphi(v_3)}{\partial v_3 \cdot \varphi(v_3)} = k p_3 v_3$$

Setzt man nun diese Werte in 3), so erhält man:

$$k p_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + k p_2 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + k p_3 v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x} = o$$

oder nach Kürzung durch k und bei analoger Behandlung der übrigen Unbekannten y, z:

$$\left[pv \frac{\partial v}{\partial x}\right] = o \qquad \left[pv \frac{\partial v}{\partial y}\right] = o \qquad \left[pv \frac{\partial v}{\partial z}\right] = o \quad . \; . \; 6)$$

Bildet man jetzt die partiellen Differentialquotienten der Widersprüche nach allen Unbekannten aus den Fehlergleichungen 1), nämlich:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = a \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = b \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = c,$$

und substituiert sie in 6),
so resultieren die Bedingungsgleichungen:

$$[pav] = o \qquad [pbv] = o \qquad [pcv] = o,$$

welche, so wie das arithmetische Mittel im einfachsten Falle, die praktisch wahrscheinlichsten Werte im allgemeinen Falle hervorbringen. Sie stellen nichts anderes dar, als die entwickelte Minimumsbedingung der Methode der kleinsten Quadrate: $[pvv] = \text{min.}$, nämlich die gleich Null gesetzten partiellen Differentialquotienten des Ausdruckes, welcher zu einem Minimum werden soll.

Substituiert man in die drei letzten Bedingungsgleichungen die aus den Fehlergleichungen bestimmten Widersprüche, so ergeben sich sofort die Normalgleichungen:

$$[paa]\,x + [pab]\,y + [pac]\,z = [pal]$$
$$[pab]\,x + [pbb]\,y + [pbc]\,z = [pbl]$$
$$[pac]\,x + [pbc]\,y + [pcc]\,z = [pcl]$$

Es kann daher das Ausgleichungsprinzip ohne Bezugnahme auf die Summe der Fehlerquadrate oder des als Funktion dieser Summe definierten mittleren Fehlers auch wie folgt ausgesprochen werden:

»Das glaubwürdigste Wertsystem der Unbekannten ist dasjenige, für welches die Summen der mit den Koeffizienten einer jeden Unbekannten multiplizierten Produkte aus den Gewichten und den Widersprüchen für jede Unbekannte gleich Null ist.«

Es ist damit auch eine einfache und allgemeine Deduktion des Prinzips der kleinsten Quadratsumme selbst erbracht, und zwar in einer Form, wie sie als Einführung in die methodische Ausgleichungsrechnung für den ersten Unterricht wohl am geeignetsten erscheinen dürfte, da sie lediglich den eines förmlichen Beweises nicht erst bedürfenden Satz des arithmetischen Mittels ohne weitere Einschränkungen oder Voraussetzungen zu Grunde legt.

Wenn daher Pizzetti (1892) die Gauss'sche Begründung, da sie der wissenschaftlichen Kritik nicht recht stand zu halten vermag, im Hochschulunterrichte nicht mehr angewendet wissen möchte, so glaube ich, daß in der hier vorgeführten Deduktion ein einfacherer Ersatz erblickt werden könnte.

(Fortsetzung folgt.)

Zur Geschichte der praktischen Geometrie in Polen.

Von Prof. W. Láska.

Dank den Arbeiten von F. Kucharzewski, Birkenmajer, Żebrawski und Franke besitzt die polnische Literatur eine so vorzügliche Bearbeitung der Geschichte der mathematischen Wissenschaften, daß in der Tat nur sehr wenig hinzugetan werden kann. Eine kurze Übersicht dieser Leistungen gab Dickstein in Eneström's Bibliot. Math. 1889, S. 43. Der Eifer der genannten Forscher hat aber nicht nachgelassen, so daß noch über wichtige Arbeiten zu berichten ist. Um diese Forschungen, welche — weil in polnischer Sprache geschrieben — nicht allgemein zugänglich sind und sich in verschiedensten Zeitschriften zerstreut finden, der allgemeinen Literaturgeschichte anzureihen, habe ich die nachstehenden Zeilen geschrieben. Eine reiche Fülle von Neuigkeiten, welche ich gelegent-

Form und Ausstattung derselben von Seite der Druckerei die größte Sorgfalt verwendet werden.

Wenn uns eine ausgiebige Unterstützung der Kollegen in allen Teilen unseres Vaterlandes zuteil wird, hoffen wir nicht nur in der Lage zu sein, den vielseitigsten Wünschen unserer Leser entsprechen zu können, sondern auch unsere Zeitschrift auf eine Stufe der Vollkommenheit zu bringen, in der sie der Wissenschaft zu Frommen, dem Praktiker zu Nutzen und unserem Vaterlande zu Ehren wirken kann.

Wien, im April 1907.

Ladislaus v. Klatecki, k. k. Obergeometer I. Klasse.

und

Eduard Doležal, o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichungsrechnung.

Von S. Wellisch.

(Fortsetzung).

III. Über das Minimumsprinzip.

Wenn zur Bestimmung mehrerer Unbekannten überzählige Beobachtungen angestellt wurden, so daß infolge der ihnen anhaftenden unvermeidlichen Beobachtungsfehler in den Gleichungen, welche die theoretische Beziehung zwischen den zu ermittelnden und den beobachteten Größen zum Ausdrucke bringen, Widersprüche auftreten, so ist es die erste Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, dasjenige Wertsystem der Unbekannten zu ermitteln, welches den ursprünglichen Beobachtungen am besten sich anschmiegt, also solche Resultate abzuleiten, die von der Einwirkung der Messungsfehler noch am meisten verschont bleiben.

Das Prinzip, nach welchem die Methode der kleinsten Quadrate diese Aufgabe löst, und welches nach Legendre (1805) kurz darin besteht, »die Summe der Quadrate der Fehler zu einem Minimum zu machen«, kann in aller Ausführlichkeit wie folgt ausgesprochen werden: Das wahrscheinlichste Wertsystem für die Unbekannten, für deren Bestimmung überschüssige Beobachtungen vorliegen, ist dasjenige, bei welchem die Quadrate der Unterschiede zwischen den wirklich beobachteten und den ausgeglichenen Werten der als Funktion der Unbekannten auftretenden Beobachtungsgrößen die kleinste Summe ergeben. Dieser Satz gilt aber nur dann strenge, wenn bei allen Beobachtungen der gleiche Grad von Genauigkeit vorausgesetzt werden darf, andernfalls sind diese Quadrate vorerst noch mit den Gewichten der Beobachtungen zu multiplizieren. Der Wortlaut, die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Größen zu einem Minimum zu machen, rührt von Gauss (1809) her. Er kleidet aber auch das Prinzip der kleinsten Quadratsummen später (1826) in folgende Worte: »Die Summe der mit den beziehentlichen Gewichten der Beobachtungen multiplizierten Quadrate von Verbesserungen, durch welche man die

Beobachtungen mit den Bedingungsgleichungen in Übereinstimmung zu bringen vermag, wird ein Minimum, wenn man die plausibelsten Verbesserungen anwendet.»

Gerling (1843) stellt die Aufgabe der Ausgleichung in nachstehender Weise: »Für das System der wirklich beobachteten Größen ist ein anderes System von Größen zu substituieren, welche die beiden Eigenschaften haben, daß 1. alle Widersprüche wegfallen, die sich in den Beobachtungen oder deren Folgerungen finden; und daß 2. die Unterschiede zwischen den beobachteten und substituierten eine möglichst kleine Quadratsumme geben.« Aber auch er kleidet das Ausgleichungsprinzip in die Worte, »daß die Summe der Quadrate der Verbesserungen so klein als möglich werde.«

Laplace (1812), Littrow (1832), Encke (1834) und die meisten ihrer Nachfolger bringen wie Legendre die Summe der Quadrate der nach der Ausgleichung »übrigbleibenden Fehler« auf ein Kleinstes, während Vogler (1883), Koppe (1885) und wenige andere, an Gauss sich haltend, die als Ausgleichung anzubringenden »Verbesserungen« zu einer kleinstmöglichen Quadratsumme werden lassen. Hiezu führen wir eine Bemerkung Gerlings an, »daß es wohl ganz gleichgiltig sei, ob von Fehlern oder von Verbesserungen die Rede ist, daß aber das erste nun einmal allgemein üblich sei, obwohl die Fehler als solche gegen unseren Willen, unbewußt und regellos von außen uns aufgedrungen werden und uns deshalb immer selbst unbekannt bleiben, so daß wir nur die genäherte Voraussetzung machen können, sie seien unseren Verbesserungen an Größe gleich und nur durch das Zeichen davon verschieden.«

Helmert (1872) spricht sich daher passender dahin aus, daß die Summe der Quadrate der »kleinen Größen« (Fehler, Verbesserungen), welche gleich genauen Beobachtungswerten zuzufügen sind, um ihre Widersprüche zu heben, zu einem Minimum gemacht wird, und Harksen (1905) nennt, um jeder Wahl enthoben zu sein, diese Unterschiede die »Fehlerverbesserungen«, während Weitbrecht (1906) für die kleinen Größen, die nötig sind, um jeden Beobachtungswert zum wahrscheinlichen zu ergänzen, die Bezeichnung »Zuschläge« gebraucht.

Jordan (1877) erklärt dasjenige System der Unbekannten als das beste, welches in den Bedingungsgleichungen für die Unbekannten solche »Widersprüche« erzeugt, deren Quadratsumme ein Minimum ist.

Koll (1893) geht von dem Grundsatze aus, die gesuchten Größen als einheitliches Ergebnis aus sämtlichen vorliegenden Bestimmungen derart zu gewinnen, daß jedes Beobachtungsergebnis seinem Gewichte entsprechend berücksichtigt wird und daß die Quadratsumme der auf die Gewichtseinheit zurückgeführten »wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler« ein Minimum wird.

Bauschinger (1900) dezidiert: »Die Unbekannten sind so zu bestimmen, daß die Summe der Quadrate der »übrigbleibenden Widersprüche« ein Minimum werde.«

Czuber (1903) drückt sich dahin aus, daß unter allen Wertsystemen der unbekannten Elemente dasjenige das mit dem kleinsten Fehlerrisiko verbundene, also das vorteilhafteste sei, für welches die Summe der Quadrate der den Beobachtungen zugeschriebenen »scheinbaren Fehler« ein Minimum ist.

Die ausführlichste Definition des Minimumsprinzips bleibt die von Gauss, die begreiflichste gab Helmert, Jordan drückt sich am allgemeinsten aus und Bauschinger am einfachsten; Koll nahm die meiste Rücksicht auf den Geodäten, Czuber aber spricht am ausdrucksvollsten die Sprache des Mathematikers.

*

Lambert (1765) bestimmt die ausgeglichenen Werte so, »daß sie zwischen allen Observationen das wahre Mittel halten.« — Legendre (1805) gibt die Auflösungen derart, daß sie zwischen den übrigbleibenden Fehlern ein angemessenes Gleichgewicht herstellen und daß sie gewissermaßen zu dem Mittelpunkt führen, um welchen sich die Beobachtungswerte derart scharen, daß sie »möglichst wenig von ihm abweichen.« — Gerling (1843) verlangt von den ausgeglichenen Werten, daß sie der unerreichbaren Wahrheit »möglichst genähert« seien, was auch Wittstein (1849) fordert. — Henke (1868) nennt daher das Problem der Ausgleichungsrechnung eine »Aufgabe des möglichst nahe Liegens«. Aber man bezeichnet sie auch als eine Aufgabe des »möglichst Anpassens« oder »des kleinsten Zwanges« und gebraucht auch die Ausdrücke »möglichst gut genügen«, »möglichst eng anschließen«, »möglichst genau erfüllen«, »möglichst gleichmäßig entsprechen«, etc.

*

Diejenigen Werte, welche der Methode der kleinsten Quadrate entsprechen, nennt Gauss im Jahre 1809 die »wahrscheinlichsten«, im Jahre 1821 die »plausibelsten« und im Jahre 1823 »die sichersten«. — Während unter anderen Hagen die ursprüngliche Bezeichnungsweise beibehält, entscheidet sich Helmert für die zweite und Tchébychef für die dritte. — Fries nennt sie die »mittleren«, Freeden die »richtigsten«, Rüdiger die »ausgezeichneten«, Gooss die »brauchbarsten«, Vogler die »günstigsten«, Steinhauser die »besten«, Czuber die »vorteilhaftesten« und Bruns die »annehmbarsten«. Zuweilen findet man sie auch als die »zweckmäßigsten«, die »nächstliegenden«, die »folgerichtigsten« oder die »zuverlässigsten« bezeichnet. Die Taxierung als »glaubwürdigste« Werte kommt in Cantor's Schriften vor. (Die Methode der kleinsten Produkte liefert ihrem Sinne nach die »natürlichsten« Werte.)

*

Von den Begründern der methodischen Ausgleichungsrechnung, Gauss und Legendre, stammt auch ihr Name. Gauss sagt 1826: Das Anbringen der Verbesserungen an den Beobachtungen werden wir die »Ausgleichung der Beobachtungen« nennen. Fries (1842) hat daher für die der methodischen Ausgleichung zu Grunde liegenden Rechnungen die Bezeichnung »ausgleichende Rechnungen« angewendet und Gerling (1843) hat die Benennung »Ausgleichungsrechnung« zum ersten Male in den Titel seines Werkes aufgenommen. Er gab hiefür auch eine Begründung, die er in der Analogie des arithmetischen Mittels mit einem Satze der Statik erblickte; denn, da im Schwerpunkt eines materiellen Punktsystems die Summe der Punktgewichte vereinigt angenommen werden kann, so glaubte er hierin den Ursprung der Redewendungen »Beobachtungen ins Gleichgewicht setzen« oder »Beobachtungen ausgleichen« sehen zu dürfen. — Die kürzere Bezeichnung »Ausgleichsrechnung« statt »Ausgleichungsrechnung« ist als eine Verstümmelung des ursprünglichen Wortes anzusehen.

Für die von Legendre (1806) herrührende Bezeichnungsweise »Methode der kleinsten Quadrate«, welche auch Gauss beibehält, gebraucht Paucker (1819) zum ersten Male den Titel: »Methode der kleinsten Quadratsumme«, der auch in Gehler's physik. Wörterbuch (1825) Aufnahme fand. Darauf versuchte Hülsse (1841) diese als die sachgemäßere Bezeichnung einzubürgern, welche auch Fries und Dienger anwandten und — von Meyer als die richtigere befürwortet — auch von Vogler gebraucht wird. Hiezu bemerkt aber Jordan: »Der Name Methode der kleinsten Quadrate ist nun seit nahe 100 Jahren so fest eingewurzelt, daß es verkehrt wäre, obgleich dieser Name nicht ganz bezeichnend ist, daran rütteln zu wollen.«

Es sind aber beide Bezeichnungsweisen gleichberechtigt. Denn dasselbe Ausgleichungsverfahren, welches die kleinste Quadratsumme der übrigbleibenden Widersprüche erzeugt, erteilt auch den unbekannten Elementen die größten Gewichte oder die kleinsten Quadrate der mittleren Fehler.

Wird daher das arithmetische Mittel zur Begründung der methodischen Ausgleichungsrechnung benützt (erste Gauss'sche Begründung), so ist die Bezeichnung »Methode der kleinsten Quadratsummen« die sachgemäßere, wird aber der mittlere Fehler hiezu gewählt (zweite Gauss'sche Begründung), so ist die Benennung »Methode der kleinsten Quadrate« bezeichnender. Im Sinne der dritten Begründung könnte man der Ausgleichungsrechnung zutreffender den Namen der »Methode der kleinsten Summen« beilegen, welche Bezeichnung dann ganz allgemeine Bedeutung hätte.

IV. Über die charakteristischen Fehler der Beobachtungen.

Die zweite Aufgabe der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Summen besteht in der Genauigkeitsbestimmung der Beobachtungen und der daraus abgeleiteten Funktionen nach den zwischen den Beobachtungen und den dafür berechneten Werten übrigbleibenden Unterschieden durch Ermittlung der denselben nach der Ausgleichung mutmaßlich zukommenden numerisch meßbaren Abweichungen von der Wahrheit. Die wahre Abweichung von der Wahrheit oder der wahre Fehler ε einer Beobachtungsgröße kann der Natur der Sache nach niemals ermittelt werden, wohl aber der zweckmäßigste Wert jenes Fehlers, der z. B. einer wiederholt gemessenen Größe vermutlich innewohnt. Dieser Fehlerwert ist aber nicht das Mittel aller mit dem absoluten Betrage, d. h. ohne Rücksicht auf das Vorzeichen genommenen scheinbaren Beobachtungsfehler v, welchen man den durchschnittlichen Fehler t nennt, auch nicht der sogenannte wahrscheinliche Fehler r, sondern der mittlere Fehler m. Hiebei ist zu beachten, daß in der älteren französischen Literatur der wahrscheinliche und auch der durchschnittliche Fehler mit dem Namen

»l'erreur moyenne« belegt worden ist (Laplace) und daß auch in Deutschland der durchschnittliche Fehler zuweilen den Namen »Mittel der Fehler« erhalten hat.

Nach der von Gauss als Grundsatz hingestellten Definition ist das Quadrat des mittleren Fehlers einer einzelnen Beobachtung oder das arithmetische Mittel der wahren Fehlerquadrate für unendlich viele gleichwertige Fälle durch das von $\varepsilon = -\infty$ bis $\varepsilon = +\infty$ ausgedehnte Integral

$$\int \varepsilon^2 \,.\, \varphi(\varepsilon) \,.\, d\varepsilon$$

dargestellt. Substituiert man hier das Gauss'sche Fehlergesetz, so wird

$$\mu^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2h^2} \,.$$

Der hiedurch bestimmte Wert des mittleren Fehlers

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0{\cdot}70711}{h}$$

drückt den mittleren Betrag aller möglichen Fehler aus, die in einer sehr großen Anzahl von Beobachtungen überhaupt auftreten können. Wir wollen ihn den theoretischen mittleren Fehler nennen, zum Unterschiede von dem empirischen mittleren Fehler, welcher bestimmt ist durch die Formel

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}} \,.$$

Analog stellen wir fest den theoretischen durchschnittlichen Fehler

$$\vartheta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon|\, e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{0{\cdot}56419}{h}$$

und den empirischen durchschnittlichen Fehler

$$t = \frac{[|\varepsilon|]}{n} = \frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}} \,.$$

Der theoretische wahrscheinliche Fehler ist bestimmt durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\rho} e^{-h^2 \varepsilon^2} d(h\varepsilon)$$

mit $\rho = \frac{0{\cdot}47694}{h}$;

der empirische wahrscheinliche Fehler r ist der zentrale Fehler der nach ihrer Größe geordneten Fehler.

Je größer die Anzahl der Beobachtungen ist, umsomehr werden sich die empirischen Fehler den theoretischen Fehlern nähern. Diese sind also die Grenzwerte, welchen sich die empirisch erlangten Näherungswerte mit der steigenden Anzahl der Beobachtungen nähern. Reuschle gebraucht daher für die Unterscheidung der theoretischen und empirischen Fehler die Namen mittlerer Fehler a priori und mittlerer Fehler a posteriori. Die bekannten Beziehungen

$$h = \frac{0{\cdot}70711}{\mu} = \frac{0{\cdot}56419}{\vartheta} = \frac{0{\cdot}47694}{\rho}$$

$$\vartheta = 0{\cdot}79788\,\mu \qquad \rho = 0{\cdot}67449\,\mu$$

$$\pi = \frac{2\,\mu^2}{\vartheta^2}$$

bestehen strenge auch nur zwischen den dem Gauss'schen Fehlergesetze genügenden theoretischen Fehlergrößen; sie finden zwischen den empirischen Fehlergrößen aber mit um so größerer Annäherung statt, je besser die Beobachtungsfehler das Gauss'sche Gesetz befolgen und je größer deren Anzahl ist (Vergl. Simony, 1905).

Der von Gauss (1821) festgestellte Begriff des mittleren Fehlers wird von ihm als der geeignetste und zweckmäßigste Maßstab zur Messung der Unsicherheit der Beobachtungen bezeichnet und als die Quadratwurzel aus der durch die Fehleranzahl geteilten Summe der wahren Fehlerquadrate definiert, nämlich

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}}\,.$$

Hauber (1830) stellt zu Anfang seines Aufsatzes über die »Theorie der mittleren Werte« (S. 27) den Satz auf: »Multipliziert man jeden möglichen Wert von x in seine Wahrscheinlichkeit, so heißt die Summe dieser Produkte der mittlere Wert von x.«

Littrow (1832) schreibt daher in seiner »Wahrscheinlichkeitsrechnung« (S. 64). »Der mittlere zu befürchtende Fehler, den man bei der Bestimmung des arithmetischen Mittels begangen haben mag, ist die Summe der Produkte jedes Fehlers der einzelnen Beobachtungen in seine Wahrscheinlichkeit« und erhält hiefür, indem er das Gewicht des arithmetischen Mittels mit $P = \frac{n^2}{2\,[v\,v]}$ ansetzt, den Wert $M = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \sqrt{\frac{[v\,v]}{2\,\pi\,n^2}}$, den auch Galloway (1839) noch anführt. Danach lautet sein Ausdruck für den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{2\,\pi\,n}}\,.$$

Encke (1834) definiert den mittleren Fehler wie Gauss und erklärt ihn näher als denjenigen Fehler, »welcher, wenn er bei allen Beobachtungen ohne Unterschied angenommen würde, dieselbe Summe der Quadrate der Fehler geben würde, wie die wirklich stattfindende kleinste Summe«, fügt aber später noch hinzu: »Um möglichst nahe den reinen mittleren Fehler der Beobachtungen zu erhalten, muß man bei einer unbekannten Größe die Summe der Fehlerquadrate so ansehen, als gehöre sie nicht zu n, sondern zu (n—1) Fehlern.« Er setzt also

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}\,.$$

Helmert (1872) bemerkt, daß m sich gerade so berechnet, als wären n—1 wahre Fehler mit der Quadratsumme [v v] gegeben.

Weinstein (1886) gibt folgendes an: »Der mittlere Fehler ist gleich der Quadratwurzel aus dem mittleren Fehlerquadrate. Er bezeichnet zugleich den Fehler, der bei der Sonderart der betreffenden Messungsmethode die größte Wahrscheinlichkeit besitzt, die er überhaupt zu erreichen vermag, für keine andere Messungsmethode eine größere Wahrscheinlichkeit aufweist, als für die, für welche er berechnet ist. Ferner ist er derjenige Fehler, der in einer unbegrenzten Messungsreihe allen Messungen zusammengenommen mit derselben Wahrscheinlichkeit zugesprochen werden kann, wie das System der faktisch vorgefallenen Fehler.« Er findet für ihn den Ausdruck:

$$m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e}{w_0},$$

wo e die Einheit darstellt, in der die Fehler gerade ausgedrückt werden, und w_0 die Wahrscheinlichkeit bedeutet, mit welcher man einen Fehler von der Größe $= 0$, also den günstigsten Fehler erwarten kann.

Cappilleri (1907) erklärt den mittleren Fehler kurz als die Quadratwurzel aus der Summe der Hoffnungswerte aller Fehlerquadrate.

Wir resumieren: Unter dem empirischen mittleren Fehler versteht man die Quadratwurzel aus dem auf eine der überschüssigen Beobachtungen entfallenden Anteil der auf die überschüssigen Beobachtungen gleichmäßig verteilten Summe der Quadrate aller scheinbaren Fehler.

*

Der wahrscheinlichste Fehler einer Beobachtungsgattung, welche Benennung Bessel (1815) zum ersten Male gebraucht, wird von Gauss (1816) in die Wissenschaft eingeführt und in folgender Weise bestimmt: Man ordne die sämtlichen Beobachtungsfehler (absolut genommen) nach ihrer Größe, so ist der mittelste, wenn ihre Zahl ungerade ist, oder das arithmetische Mittel der zwei mittelsten bei gerader Anzahl der wahrscheinliche Beobachtungsfehler. Später definiert er ihn als denjenigen Fehler, über welchen hinaus alle möglichen Fehler zusammen noch eben so viele Wahrscheinlichkeit haben, wie alle diesseits liegenden zusammen.

Littrow (1831) sagt in Baumgartners Zeitschrift, er ist derjenige Fehler, dessen Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeit des Gegenteiles gleich ist, d. h. »von dem es gleich wahrscheinlich ist, daß man ihn begangen, oder daß man ihn auch nicht begangen habe. Da also für diesen Fehler beide Wahrscheinlichkeiten gleich sind und da die Summe beider immer gleich der Einheit ist, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers gleich $^1/_2$, oder man kann 1 gen 1 wetten, daß der Fehler des Resultats nicht größer sei, als der wahrscheinliche.«

Encke (1834) drückt sich wie folgt aus: »Es ist der Fehler, unter welchem sich ebensoviele kleinere Fehler der Zahl nach befinden, als größere über ihm, so daß es ebensoviele Fälle gibt, in welchen die Fehler kleiner als der wahrscheinliche Fehler sind, als solche, in welchen sie größer sind. Man kann deswegen bei einer isolierten Beobachtung Eins gegen Eins wetten, daß der Fehler derselben nicht größer als der wahrscheinliche sei, wenn für die Gattung, zu welcher die Beobachtung gehört, der Wert des wahrscheinlichen Fehlers bekannt sein sollte.«

Hagen (1837) und Morgan (1838) bezeichnen den wahrscheinlichen Fehler als diejenige Fehlergrenze, von der es ebensogut wahrscheinlich ist, daß sie überschritten, als daß sie nicht erreicht wird.

Reuschle (1849) gibt folgendes an: »Der wahrscheinliche Fehler r halbiert das Feld der Wahrscheinlichkeit auf der Seite der positiven wie der negativen Fehler, so daß ein Fehler innerhalb der Grenzen $\pm r$ gleich wahrscheinlich ist mit einem außerhalb derselben.«

Wittstein (1849) versteht darunter einen Fehlerwert von solcher Beschaffenheit, »daß die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Wert, absolut genommen, nicht überschritten werde, genau den Wert $\frac{1}{2}$ erhält, d. h. gleich derjenigen Wahrscheinlichkeit wird, daß dieser Wert wirklich überschritten werde.«

Sawitsch (1857) bestimmt: »Der wahrscheinliche Fehler ist derjenige, bei welchem man mit gleichem Rechte ebensoviele kleinere denn größere Fehler als den erwähnten erwarten kann, wobei man nur den numerischen Wert der Fehler, nicht aber ihre positive oder negative Bedeutung in Betracht zieht.«

Helmert (1872) bezeichnet ihn als diejenige Grenze, die so bestimmt ist, daß die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens eines Fehlers innerhalb dieser Grenze ebensogroß ist, als die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens außerhalb dieser Grenze.

Czuber (1899) nennt ihn diejenige Fehlergrenze, für deren Unterschreitung wie Überschreitung je die Wahrscheinlichkeit $^1/_2$ besteht.

Wir resumieren: Der empirische wahrscheinliche Fehler ist die Fehlergrenze, welche die Anzahl der nach ihrer absoluten Größe geordneten Fehler einer hinlänglich großen Beobachtungsreihe so in zwei Hälften teilt, daß alle größeren und alle kleineren Fehler in gleicher Anzahl vorkommen. Er kann daher auch, um einen Ausdruck Fechner's zu gebrauchen, als der zentrale Fehler der vorliegenden Fehlerreihe definiert werden.

Dienger hat den wahrscheinlichen Fehler, da er ihm viel natürlicher erschien, dem mittleren Fehler vorgezogen; Gauss selbst aber wünschte seit der Einführung des von der Wahrscheinlichkeitsbetrachtung völlig unabhängigen mittleren Fehlers den wahrscheinlichen Fehler, als von Hypothese abhängig, gänzlich verbannt. Hansen und Henke sehen ihn als entbehrlich an und auch Bauschinger drückt den Wunsch aus, daß man von dem Gebrauch des wahrscheinlichen Fehlers endlich abkäme, worin wir ihm nur beistimmen können.

V. Über den mittleren Fehler der Gewichtseinheit.

Liegen für die Ermittlung der wahren Größe x_0 die unmittelbar erhaltenen, gleich genauen Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ vor, so ist der wahrscheinlichste Wert x der Unbekannten gegeben durch das einfache arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen:

$$x = \frac{[l]}{n}.$$

Haben die einzelnen Beobachtungen verschiedene Gewichte $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$, so ist der wahrscheinlichste Wert x bestimmt durch das allgemeine arithmetische Mittel:

$$x = \frac{[p l]}{[p]}\ .$$

Bezeichnet man die wahren Beobachtungsfehler wie bisher mit $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ und die scheinbaren Fehler mit $v_1\ v_2\ v_3 \ldots v_n$, so hat man die bekannten Beziehungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= v_1 + \xi \\ \varepsilon_2 &= v_2 + \xi \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varepsilon_n &= v_n + \xi \end{aligned}$$

wo $\xi = x_0 - x$ den wahren Fehler des arithmetischen Mittels bedeutet.

Bei gleichwertigen Beobachtungen hat man für das Quadrat des mittleren Fehlers einer Beobachtung:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}\ .$$

Haben die Beobachtungen verschiedene Gewichte, so ist das Quadrat des mittleren Fehlers einer Beobachtung vom Gewichte 1, oder des sogenannten »mittleren Fehlers der Gewichtseinheit«:

$$m^2 = \frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n}\ .$$

Betrachtet man die beiden Werte für x und die beiden Werte für m^2, so leuchtet es sofort nicht ein, warum bei ungleichen Gewichten das mittlere Fehlerquadrat nicht ebenso wie der Mittelwert der Unbekannten als das allgemeine arithmetische Mittel gebildet wird*), wo doch bei gleichen Gewichten sowohl das mittlere Fehlerquadrat, als auch der Mittelwert der Unbekannten als einfaches arithmetisches Mittel hervorgehen. Wenn also bei x im Nenner einmal n, das anderemal [p] auftritt, warum kommt bei m^2 im Nenner immer nur n vor? — Die Erklärung hiefür ist folgende:

Im ersten Falle bedeutet der Mittelwert m^2 jenes Fehlerquadrat, welches angibt, wie groß ein jedes der n wahren Fehlerquadrate $\varepsilon_1^2\ \varepsilon_2^2\ \varepsilon_3^2 \ldots \varepsilon_n^2$ sein müßte, wenn alle gleich wären und dennoch dieselbe Summe ergäben, wie die wahren Fehlerquadrate selbst. Im zweiten Falle stellen aber $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ die wahren Fehler der n Beobachtungen mit den Gewichten $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$ dar, somit sind — entsprechend dem Satze, daß sich die Gewichte umgekehrt wie die Quadrate der mittleren oder wahren Fehler verhalten — $\varepsilon_1 \sqrt{p_1}\ \varepsilon_2 \sqrt{p_2} \ldots \varepsilon_n \sqrt{p_n}$ die wahren Fehler der auf die Gewichtseinheit bezogenen Beobachtungen und es ist jetzt der Mittelwert m^2 derjenige, welcher angibt, wie groß jedes Quadrat der n Gewichtseinheitsfehler sein müßte, wenn alle gleich wären und dann dieselbe Summe gäben, wie zuvor.

(Fortsetzung folgt.)

---

*) Wie dies irrtümlicherweise in Bauernfeind's »Elemente der Vermessungskunde«, 6 Aufl, 1879, (II. Bd. S. 17, 18 u. 23) geschieht.

Auf Grund dieser zwei Bemerkungen haben wir also die Sätze:

Wenn wir unter den wahrscheinlichsten Werten der Unbekannten x, y . . . solche Werte verstehen, die die gegebenen Gleichungen $G_1, G_2 \ldots$ mit den kleinsten Ergänzungen $\xi, \eta \ldots$ befriedigen, dann haben die gegebenen Gleichungen schon von Haus aus ungleiches Gewicht. Jede Gleichung $G_1, G_2 \ldots$ hat ein Eigengewicht gleich der Quadratsumme h^2 ihrer Koeffizienten und die Gleichungen $G_1, G_2 \ldots$ werden auf gleiches Gewicht gebracht, indem man jede einzelne Gleichung durch der algebraischen Hypotenuse h ihrer Koeffizienten dividiert.

Das aber sollte bewiesen werden.

Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichungsrechnung.

Von Oberingenieur **S. Wellisch.**

(Fortsetzung).

Eine andere Erklärung wäre folgende:

Dividiert man alle Gewichte durch ihr arithmetisches Mittel

$$\frac{[p]}{n} = k,$$

was ja zulässig ist, da die Gewichte nur Verhältniszahlen sind, so erhält man die neuen, auf eine andere Einheit bezogenen Gewichte:

$$g_1 = \frac{p_1}{k} \qquad g_2 = \frac{p_2}{k} \qquad \ldots \quad g_n = \frac{p_n}{k}$$

welche die Eigenschaft haben, daß deren arithmetisches Mittel gleich der Einheit ist, denn man hat:

$$\frac{[g]}{n} = \frac{\left[\frac{p}{k}\right]}{n} = 1 \quad \text{und } [g] = n.$$

Bildet man das mittlere Fehlerquadrat nach dem allgemeinen arithmetischen Mittel, nämlich

$$m_*^2 = \frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{[p]},$$

so kann man hiefür auch setzen:

$$m_*^2 = \frac{[g\varepsilon\varepsilon]}{[g]} = \frac{[g\varepsilon\varepsilon]}{n}.$$

Damit erscheint der mittlere Fehler der Gewichtseinheit bei Zugrundelegung einer ganz bestimmten Gewichtseinheit mit dem allgemeinen arithmethischen Mittel in Einklang gebracht. Eine nähere Beziehung zwischen m und m_* erhält man, wenn im Nenner für $[p] = nk$ substituiert wird, und zwar:

$$m_*^2 = \frac{1}{k}\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{m^2}{k}$$

oder:

$$m = m_* \sqrt{k} = m_* \sqrt{\frac{[p]}{n}}$$

Um den mittleren Fehler der Gewichtseinheit durch eine Formel auszudrücken, welche nicht die unbekannten wahren Fehler, sondern die berechenbaren scheinbaren Fehler enthält, bilde man die Produkte $p \varepsilon \varepsilon$ aus den Gleichungen $\varepsilon = v + \xi$ und addiere sie, so folgt unter Berücksichtigung, daß für das arithmetische Mittel $[p v] = o$ sein muß:

$$[p \varepsilon \varepsilon] = [p v v] + [p] \xi^2.$$

Setzt man hierin für ξ den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}}$$

und für $[p \varepsilon \varepsilon] = n\, m^2$, so ergibt sich

$$n\, m^2 = [p v v] + m^2$$

und hieraus:

$$m = \sqrt{\frac{[p v v]}{n - 1}} \quad \text{und} \quad M = \sqrt{\frac{[p v v]}{[p]\,(n - 1)}}.$$

Setzt man aber für ξ den Wert $M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{m_*}{\sqrt{n}}$ und für $[p \varepsilon \varepsilon] = [p]\, m_*^2$, so resultiert:

$$[p]\, m_*^2 = [p v v] + \frac{m_*^2}{n} [p]$$

und hieraus:

$$m_* = \sqrt{\frac{[p v v]}{[p] - k}} = \sqrt{\frac{[p v v]}{[p]} \cdot \frac{n}{n - 1}} \quad \text{und} \quad M = \sqrt{\frac{[p v v]}{[p]\,(n - 1)}}$$

oder unter Einführung der reduzierten Gewichte

$$m_* = \sqrt{\frac{[g v v]}{[g] - 1}} = \sqrt{\frac{[g v v]}{n - 1}} \quad \text{und} \quad M = \sqrt{\frac{[g v v]}{n\,(n - 1)}}.$$

Obgleich die mittleren Fehler der Gewichtseinheit m und m_* von einander verschieden sind, bleiben die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen und des arithmetischen Mittels dieselben, ob sie aus m oder m_* berechnet werden. Am einfachsten erfolgt jedoch deren Berechnung mit Benützung der von Gauss aufgestellten Formel für den Gewichtseinheitsfehler.

VI. Über den maximalen mittleren Fehler.

Ist L der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Größen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots l_n$, so ergibt sich der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung aus der Beziehung:

$$m^2 = \frac{[(L - l)^2]}{n - 1} = \frac{[v^2]}{n - 1} = \frac{[\varepsilon^2]}{n}$$

und der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels aus der Formel:

$$M^2 = \frac{[(L - l)^2]}{n\,(n - 1)}.$$

So wie für den Mittelwert aus einer Reihe von Beobachtungsgrößen ein mittlerer Fehler angegeben werden kann, ebenso läßt sich für den mittleren Wert aus einer Reihe von Beobachtungsfehlern, wie überhaupt für jede auf Grund von Beobachtungsdaten abgeleitete Größe, ein mittlerer Fehler nach den Regeln der Fehlertheorie berechnen.

Um den mittleren zu befürchtenden Fehler m_1 in der Bestimmung des mittleren Fehlers m zu erhalten, wird ein analoger Vorgang eingeschlagen, wie bei der Ermittlung des mittleren Fehlers M des arithmetischen Mittels. Da m^2 das arithmetische Mittel aller ε^2 ist, so wie L das arithmetische Mittel aller l, so ist das Quadrat des mittleren Fehlers von m^2 dargestellt durch die Formel:

$$M_1^2 = \frac{[(m^2 - \varepsilon^2)^2]}{n(n-1)}.$$

Entwickelt man die Quadratsumme im Zähler, so erhält man

$$M_1^2 = \frac{n m^4 - 2 m^2 [\varepsilon^2] + [\varepsilon^4]}{n(n-1)} = \frac{m^4}{n-1}\left(1 - 2\frac{[\varepsilon^2]}{n m^2} + \frac{[\varepsilon^4]}{n m^4}\right).$$

oder mit Rücksicht auf die Relation $m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n}$:

$$M_1^2 = \frac{m^4}{n-1}\left(\frac{[\varepsilon^4]}{n m^4} - 1\right).$$

Wird nun der Durchschnittswert der vierten Potenzen der wahren Fehler unter der Voraussetzung gebildet, daß sämtliche ε alle möglichen Werte mit Rücksicht auf ihre Wahrscheinlichkeit durchlaufen, so hat man nach der Entwicklung von Gauss (1823) für $m^2 = \frac{1}{2h^2}$:

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{3}{4h^4} = 3m^4,$$

sohin

$$M_1^2 = \frac{2m^4}{n-1} \text{ und } M_1 = m^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Um aus diesem Ausdrucke für den mittleren Fehler von m^2 den mittleren Fehler von m zu erhalten, stelle man folgende Betrachtung an. Wenn m um m_1 fehlerhaft ist und daher richtig $m \pm m_1$ lauten soll, so ist für m^2 richtig $m^2 \pm 2 m m_1 + m_1^2$ oder mit hinreichender Annäherung $m^2 \pm 2 m m_1$ zu setzen. Demnach ist der Fehler von m^2 bei genügend großem, ja selbst bei mäßig großem n das 2 m-fache des Fehlers von m und man kann daher den Ausdruck

$$m_1 = \frac{M_1}{2m} = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}},$$

die sogenannte Bessel'sche Formel, für den mittleren Fehler m_1 des mittleren Fehlers m gebrauchen. Simony (1905) hat hiefür die genauere Formel

$$m_1 = \frac{\sqrt{8n-9}}{4(n-1)}\, m,$$

sonach für die mittleren Grenzen von m den Wert

$$m\left(1 \pm \frac{\sqrt{8n-9}}{4(n-1)}\right)$$

erhalten und daran die Bemerkung geknüpft, daß die Berechnung von m für $m > 1$ und $n < 20$ in Anbetracht des hohen prozentuellen Betrages des jeweiligen mittleren Fehlers von m nur eine mathematische Schätzung, nicht aber eine exakte Bestimmung von m ermöglicht.

Der mittlere Fehler m_1 von m ist aber als Funktion aller Beobachtungen selbst wieder mit einem mittleren Fehler m_2 behaftet, der sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetze wie folgt berechnet. Der mittlere Fehler m_x einer Bestimmung x überträgt sich auf eine hieraus durch Multiplikation mit einer konstanten Zahl a abgeleitete Größe a x durch Multiplikation des Fehlers mit derselben Konstanten; es ist also der mittlere Fehler m_{ax} des Produktes ax bestimmt durch

$$m_{ax} = a\,m_x.$$

Analog wird für $x = m$, $m_x = m_1$, $a = \frac{\sqrt{8n-9}}{4(n-1)}$ und $m_{ax} = m_2$ erhalten:

$$m_2 = m_1 \frac{\sqrt{8n-9}}{4(n-1)} = m\left(\frac{\sqrt{8n-9}}{4(n-1)}\right)^2.$$

Ebenso entsteht der mittlere Fehler m_3 des mittleren Fehlers m_2:

$$m_3 = m\left(\frac{\sqrt{8n-9}}{4(n-1)}\right)^3$$

und allgemein der mittlere Fehler m_r von m_{r-1}:

$$m_r = m\left(\frac{\sqrt{8n-9}}{4(n-1)}\right)^r$$

Es resultiert sonach für den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung die unendliche Reihe:

$$m_0 = \pm m \pm m_1 \pm m_2 \pm m_3 \pm \ldots \pm m_\infty$$

Die ungünstigste Kombination aller dieser Fehlerbeträge tritt offenbar unter der Annahme durchaus gleicher Vorzeichen ein und man erhält so durch Addition das Maximum:

$$\mathfrak{M} = \pm m\left\{1 + \frac{\sqrt{8n-9}}{4(n-1)} + \left(\frac{\sqrt{8n-9}}{4(n-1)}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{8n-9}}{4(n-1)}\right)^3 + \ldots\right\}.$$

Der Ausdruck in der Paranthese ist eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\alpha = \frac{\sqrt{8n-9}}{4(n-1)}$; dessen Summe gibt für unendlich viele Glieder den Wert $\frac{1}{1-\alpha}$ und damit wird:

$$\mathfrak{M} = \pm \frac{4(n-1)}{4(n-1) - \sqrt{8n-9}}\, m.$$

Die Fehlergröße $\mathfrak{M}$ kann als **maximaler mittlerer Fehler** bezeichnet werden, denn sie gibt im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie angenähert jenen Fehlbetrag an, mit dem eine Beobachtung von bestimmter Gattung im ungünstigsten Falle behaftet sein kann. Er nähert sich um so mehr dem theoretischen mittleren Fehler, je mehr die Anzahl der Beobachtungen wächst und erreicht für $n = \infty$ sein Minimum $m = \mu$, d. h. bei einer unendlichen Anzahl von Beobachtungen ist der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung zugleich sein wahrer Wert, ebenso wie das arithmetische Mittel einer unendlichen Anzahl von Beobachtungsgrößen deren wahren Wert darstellt.

Der maximale mittlere Fehler, dessen Verhältnis zum empirischen mittleren Fehler, der Einheit sich nähernd, mit der wachsenden Anzahl der Beobachtungen immer abnimmt, ist aber nicht zu verwechseln mit dem in einer vorliegenden Beobachtungsreihe zu erwartenden Maximalfehler, dessen Verhältnis zum mittleren Fehler mit der steigenden Anzahl der Beobachtungen zunimmt. (Vergl. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, Art. 87).

Man findet für den maximalen mittleren Fehler $\mathfrak{M}$ und den Maximalfehler M folgende Verhältniszahlen:

n	$\mathfrak{M}$: m	M : m
5	1·534	1·281
10	1·306	1·642
20	1·193	1·960
30	1·151	2·127
40	1·128	2·241
50	1·114	2·326
100	1·077	2·575

VII. Über die Ausscheidung von Beobachtungen.

Das einfache arithmetische Mittel ist im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie nur dann der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Größen, wenn die zur Mittelbildung verwendeten Beobachtungsresultate von gleicher Genauigkeit sind. Sobald aber das arithmetische Mittel als der wahrscheinlichste Wert angesprochen wird, sind alle mit ihm nicht übereinstimmenden Beobachtungen nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche als weniger wahrscheinlich zu bezeichnen, und zwar wäre dementsprechend eine Beobachtung umsoweniger genau zu nennen, je weiter sie von dem arithmetischen Mittel entfernt ist oder je größer ihr scheinbarer Fehler ausfällt. Werden aber von diesem Gesichtspunkte aus den einzelnen Beobachtungen verschiedene Genauigkeiten beigemessen, so wäre der wahrscheinlichste Mittelwert nicht mehr nach dem einfachen, sondern nach dem allgemeinen arithmetischen Mittel zu bilden, obgleich die ursprünglichen Beobachtungen ausdrücklich von gleicher Zuverlässigkeit vorausgesetzt wurden und sohin keine Gewichtsunterscheidungen getroffen werden dürften. Dem darin enthaltenen Sophismus läßt sich nur dadurch beikommen, daß das arithmische Mittel überhaupt nicht als der wahrhaft wahrscheinlichste Wert, sondern bloß als ein approximativer Mittelwert erklärt wird, wobei das Vorhandensein der mehr oder minder großen Abweichungen vom Mittel lediglich dem reinen Zufall anzurechnen sei.

Alle Versuche, eine Verbesserung des arithmetischen Mittels durch Einführung sophistischer Gewichte unter Beibehaltung aller ursprünglich gleichwertigen Beobachtungen herbeizuführen, können daher die beabsichtigte Wirkung nur verfehlen. Hiezu gehört das Verfahren von Svanberg (1821), wonach den ursprünglich gleichgewichtig angenommenen Größen nachträglich Gewichte beigelegt werden, welche den reziproken Werten der scheinbaren Fehler oder deren Quadrate proportional zu setzen sind. Ähnliche Betrachtungen haben auch Morgan (1847) und Glaisher (1873) angestellt, indem auch sie den Beobachtungen durch Zuerteilung fiktiver Gewichte einen um so geringeren Einfluß auf die Mittelbildung einräumen, je weiter sie von dem einfachen arithmetischen Mittel abstehen.

Derartige Bestrebungen, auf diesem Wege eine Verschärfung der Resultate zu erreichen, führen schließlich dahin, den vom arithmetischen Mittel beträchtlich abweichenden Beobachtungen die Anteilnahme an der Mittelbildung überhaupt zu entziehen.

Hält man sich die Definition von Muncke vor Augen, wonach das arithmetische Mittel mit Ausschluß der von dem Mittel selbst am weitesten abweichenden Beobachtungen als das der absoluten Wahrheit am meisten genährt anzusehen sei, so kann man geneigt sein, vor der definitiven Mittelbildung alle Beobachtungen, deren Abweichungen von dem vorläufigen arithmetischen Mittel im positiven wie im negativen Sinne eine gewisse Grenze überschreiten, gänzlich zu verwerfen. Untersuchungen nach dieser Richtung hin wurden auch angestellt von Benjamin Peirce (1852), Gould (1854), Airy (1856), Winlock (1856), Chauvenet (1868), Stone (1876), Jordan (1877), Helmert (1877), Bertrand (1888), Czuber (1891) und Vogeler (1907).

Während manche Ausgleicher aus prinzipiellen Gründen gegen die Ausschließung einzelner, durch bloße Vergleichung mit den übrigen Beobachtungen als zweifelhaft zu haltender Beobachtungen sich ausgesprochen haben, finden andere hiezu selbst dann eine gewisse Berechtigung, wenn nicht gerade ungewöhnliche Ursachen einen fraglichen Widerspruch herbeigeführt haben sollten.

Hagen (1837) teilt hierin folgende Ansicht: «Die Täuschung, die man durch Verschweigen von Messungen begeht, läßt sich eben so wenig entschuldigen, als wenn man Messungen fälschen oder fingieren wollte. — Hat man während der Beobachtung von der großen Unsicherheit einzelner Messungen sich überzeugt, so kann man diese unberücksichtigt lassen; letzteres darf aber nicht deshalb geschehen, weil man später bemerkt, daß sie von den übrigen bedeutend abweichen, (man nimmt nämlich ein unendlich kleines Gewicht an).»

Bessel und Baeyer (1838) geben folgende Erklärung ab: «Wir haben jede gemachte Beobachtung, und zwar alle mit gleichem Gewichte, zu dem Resultate stimmen lassen, ohne das etwaige Zusammentreffen ungünstiger Umstände mit der stärkeren Abweichung einer Beobachtung als einen Grund zu ihrer Ausschließung gelten zu lassen. Wir haben geglaubt, nur durch die feste Beobachtung dieser Regel Willkür aus unseren Resultaten entfernen zu können».

Gerling (1843) drückt sich über die Bedeutung der angestellten Beobachtungen recht drastisch aus, indem er sagt: «Jede Beobachtung, die nicht einen entschiedenen protokollarischen Verdachtsgrund gegen sich hat, habe ich als einen Zeugen für die Wahrheit zu betrachten, und ebensowenig, wie ich den Zeugen torquieren darf, bis er sagt, was ieh gesagt haben will, ebensowenig darf ich auch ohne Weiteres sein Zeugnis verwerfen, weil dasselbe von den übrigen bedeutend abweicht».

Faye (1888) erblickt in der Verwerfung einzelner Beobachtungen eine schwere Unzukömmlichkeit, da es dem Rechner in vielen Fällen leicht wäre, auf diesem Wege aus den Beobachtungen das ihm am besten zusagende Resultat zu ziehen, um dadurch eine vorgefaßte Meinung zu stützen. Die beste Regel sei daher die, nur solche Beobachtungen auszuscheiden, welche sich als zweifelhaft kennzeichnen in dem Augenblicke, wo sie gemacht werden und vor jeder Rechnung.

Bertrand (1888) ist der Meinung, «daß die Unterdrückung der als schlecht bezeichneten Beobachtungen die Zuverlässigkeit der Resultate um so mehr erhöhen wird, je mehr Beobachtungen beseitigt worden sind», oder mit anderen Worten, je rigoroser man hiebei zu Werke geht.

«Es unterliegt keinem Zweifel», sagt Czuber (1891), «daß die Ausscheidung solcher Beobachtungen, deren Abweichung vom arithmetischen Mittel dem absoluten Betrage nach eine gewisse Grenze überschreitet und die vermutlich oder höchst wahrscheinlich minder gut sind, die Genauigkeit des Resultates erhöhen müßte, und zwar in um so höherem Grade, je enger man jene Grenze zöge».

Wählt man als Grenze den Maximalfehler, so wächst dieselbe mit der Anzahl der Beobachtungen. Der maximale mittlere Fehler hingegen zieht die Grenze umso enger, je mehr Beobachtungen ausgeführt sind. Im nachstehenden werden wir den maximalen mittleren Fehler zur Verbesserung der Endresultate verwenden, nachdem aus der vorliegenden Beobachtungsreihe die abnorm widersprechenden Beobachtungen auf Grund des Maximalfehlers zur Ausscheidung gelangt sind.

Als Beispiel benützen wir eine von Clarke (1888) aufgestellte Reihe von 40 mikroskopischen Bestimmungen der Lage eines Teilstriches auf einem Maßstabe, die auch Czuber a. a. O. S. 195 anführt. Die mit gleicher Genauigkeit angestellten Beobachtungen in Einheiten von 0·000 001 Yard = 0·91 Mikrons und deren scheinbare Fehler sind:

l	v	l	v	l	v	l	v
3·68	+0·25	2·81	+1·12	5·48	—1·55	3·28	+0·65
3·11	+0·82	4·65	—0·72	3·76	+0·17	3·78	+0·15
4·76	—0·83	3·27	+0·66	4·59	—0·66	3·22	+0·71
2·75	+1·18	4·08	—0·15	2·64	+1·29	3·98	—0·05
4·15	—0·22	4·51	—0·58	2·98	+0·95	3·91	+0·02
5·08	—1·15	4·43	—0·50	4·21	—0·28	5·21	—1·28
2·95	+0·98	3·43	+0·50	5·23	—1·30	4·43	—0·50
6·35	—2·42	3·26	+0·67	4·45	—0·52	2·28	+1·65
3·78	+0·15	2·48	+1·45	3·95	—0·02	4·10	—0·17
4·49	—0·56	4·84	—0·91	2·66	+1·27	4·18	—0·25

Das einfache arithmetische Mittel ist . . . . $L = 3{\cdot}93$,

Der mittlere Fehler einer Beobachtung $m = \sqrt{\frac{32{\cdot}5268}{39}} = 0{\cdot}913$,

Der Maximalfehler $M = 2{\cdot}241\,m$ . . . . $= 2{\cdot}05$.

Diesem zufolge fällt nur eine einzige der 40 Beobachtungen, nämlich $l_8 = 6{\cdot}35$ mit dem scheinbaren Fehler $-2{\cdot}42$, als widersprechend und zweifelhaft, der Ausscheidung anheim. Verfährt man mit den übrigen 39 Beobachtungen wie mit der ursprünglichen, vollzähligen Reihe, so ergibt sich als neues arithmetisches Mittel 3·87 und entsprechend dem sekundären Maximalfehler von 2·232 . 0·835 = 1·86 zeigt sich keine Beobachtung mehr als zweifelhaft.

Die Anwendung des maximalen mittleren Fehlers auf die 39 nicht mehr zweifelhaften Beobachtungen verlangt zunächst die Ausscheidung von weiteren 11 Beobachtungen, deren scheinbare Fehler den maximalen mittleren Fehler von $\mathfrak{M} = 1·130 . 0·835 = 0·94$ überschreiten. Die übrigbleibenden 28 Beobachtungen geben das dritte arithmetische Mittel zu 3·91 mit dem mittleren Fehler einer Einzelbeobachtung von 0·545. Durch sukzessive Fortsetzung dieses Ausscheidungsprozesses erhält man folgende Ergebnisse:

n = 39	L = 3·87	$\mathfrak{M}$ = 1·130 . 0·835 = 0·94
28	3·91	1·157 . 0·545 = 0·63
19	4·03	1·199 . 0·356 = 0·43
15	4·06	1·232 . 0·254 = 0·31
11	3·99	1·286 . 0·167 = 0·22
9	3·99	1·330 . 0·149 = 0·20
7	4·05	1·400 . 0·104 = 0·15

Es verbleibt schließlich eine Reihe von bloß 7 Beobachtungen, nämlich:

l = 4·18	v = —0·13
4·15	—0·10
4·10	—0·05
4·08	—0·03
3·98	+0·07
3·95	+0·10
3·91	+0·14

deren arithmetisches Mittel 4·05 einen maximalen mittleren Fehler von 0·15 erzeugt, der bereits größer ist, als die zurückbleibenden Abweichungen v, so daß von jenen 7 Beobachtungen keine mehr unterdrückt werden kann.

«Wäre es möglich,» bemerkt Czuber in der „Theorie der Beob.", S. 206, «unter den Beobachtungen die genauesten, dies Wort im gewöhnlichen Sprachgebrauch genommen, nämlich die mit dem kleinsten Fehler behafteten herauszufinden, so würden diese ein viel genaueres Resultat liefern, als das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen es darstellt.»

Im Sinne dieses Ausspruches hat es den Anschein, als ob dem letzten arithmetischen Mittel aus den 7 bevorzugten Werten ein größeres Vertrauen entgegengebracht werden dürfte, als dem ersten, aus den ursprünglichen 40 Werten gezogenen Mittel und in der Tat weist das Schlußergebnis, das von 3·93 auf 4·05 gestiegen ist, eine mittlere Unsicherheit auf, die den dritten Teil der ursprünglichen beträgt, denn es ist der mittlere Fehler einer Beobachtung von 0·913 auf 0·104 und der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels von 0·144 auf 0·039 herabgemindert worden.

Wir wollen auch noch von einem mehr praktischen Standpunkte aus untersuchen, welcher Wert der Wahrheit besser zu entsprechen scheint. «Ordnet man die Ergebnisse wiederholter Messungen der Größe nach, so ist der wahrscheinlichste Wert derjenige, welcher am häufigsten vorkommt; denn diesen würde man beim blinden Hineingreifen häufiger fassen, als irgend einen anderen Wert.

Werden derartige Grundbegriffe beim weiteren Ausbau einer Wissenschaft nicht strenge festgehalten, so wird», wie der Astronom Kloock (1893) diesem Ausspruche hinzufügt, «alles folgende verworren und trügerisch ausfallen».

Nun haben von den 40 Beobachtungen an der Stelle der Einer

8	Beobachtungen	die	Ziffer	2
13	»	»	»	3
14	»	»	»	4
4	»	»	»	5
1	»	»	»	6

Daher ist an der Stelle der Einer die Ziffer 4 wahrscheinlicher als die Ziffer 3. An Stelle der Zehntel ist auf dem bloßen Anblick 0 die wahrscheinlichste Ziffer, denn es heben sich die je dreimal vorkommende Werte 3·9 und 4·1 gegenseitig auf, so daß die Zahl 4·0 siebenmal in Rechnung gestellt erscheint. Es vermag daher der Wert 4·05 mehr Vertrauen zu erwecken als 3·93.

VIII. Über das Genauigkeitsmaß.

Auf Grund der mathematischen Definition der theoretischen charakteristischen Fehler und entsprechend der Gauß'schen Gleichung:

$$\frac{\mu}{\vartheta} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

sollte sich für den wahrscheinlichen Fehler derselbe numerische Wert ergeben, ob er aus der Gleichung

$$\rho = 0{\cdot}47694\,\sqrt{2}\,\mu = 0{\cdot}67449\,\mu$$

oder aus der Gleichung

$$\rho = 0{\cdot}47694\,\sqrt{\pi}\,\vartheta = 0{\cdot}84535\,\vartheta$$

berechnet wird. Desgleichen sollte das Maß der Genauigkeit aus den beiden Formeln

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mu} = \frac{0{\cdot}70711}{\mu} \qquad h = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\vartheta} = \frac{0{\cdot}56419}{\vartheta}$$

eindeutig und widerspruchsfrei hervorgehen. Da aber die den Gauss'schen Definitionen zu Grunde gelegten idealen Voraussetzungen nur in den seltensten Fällen zutreffen und daher nicht die theoretischen, sondern die empirischen Fehler in Rechnung gestellt werden können, so wird man sowohl für ρ als auch für h im allgemeinen je zwei verschiedene Werte erhalten, nämlich

$$r_1 = 0{\cdot}67449\,m \qquad r_2 = 0{\cdot}84535\,t$$

$$h_1 = \frac{0{\cdot}70711}{m} \qquad h_2 = \frac{0{\cdot}56419}{t}$$

und auch das Verhältnis $\frac{m}{t}$ wird seinem theoretischen Werte $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ mit um so geringerer Annäherung entsprechen, je weniger gut die Beobachtungsfehler das Gauss'sche Gesetz befolgen, so daß die Gauss'sche Gleichung, wie Cornu (1876) schon betont hat, gleichsam als Prüfstein für die Anwendbarkeit des Gauss-schen Fehlergesetzes auf Beobachtungsreihen verwendet werden kann.

Simony (1905) hat nun in seinem klassischen Werke «Über die Anwendbarkeit der Fehlerwahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung auf Ertragsbestimmungen», (Zeitschrift f. d. landwirtsch. Versuchswesen in Österreich 1905, S. 87—1126) die sich gestellte Aufgabe gelöst, die empirischen Fehler m und t derart zu verändern, daß sie bei möglichst engem Anschluß an die Rohwerte m, t mit der Gauss'schen Relation

$$\frac{m^*}{t^*} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

im Einklang gebracht werden. Dies wird erreicht, indem die Summe der Quadrate der Unterschiede der neuen Werte m^*, t^* von den Rohwerten m, t durch passende Wahl von t^* zu einem Minimum gemacht wird. Setzt man also

$$S = (m - m^*)^2 + (t - t^*)^2 = \left(m - t^* \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 + (t - t^*)^2 = \text{min.}$$

und differentiert man S nach t^*, so wird:

$$\frac{1}{2}\frac{dS}{dt^*} = - m \sqrt{\frac{\pi}{2}} + t^* \frac{\pi}{2} - t + t^* = 0$$

$$t^* \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = m \sqrt{\frac{\pi}{2}} + t$$

somit

$$t^* = \frac{m\sqrt{2\pi} + 2t}{2 + \pi}$$

und

$$m^* = t^* \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{m\pi + t\sqrt{2\pi}}{2 + \pi},$$

das gibt für

$$\pi = 3{\cdot}14159265:$$

$$m^* = 0{\cdot}6110155\, m + 0{\cdot}4875198\, t$$

$$t^* = 0{\cdot}4875198\, m + 0{\cdot}3889846\, t.$$

Diese Fehlergrößen werden nach Simony die Normalwerte der mittleren und durchschnittlichen Fehler genannt. Sie zeichnen sich vor den Rohwerten dadurch aus, daß sie für r und h eindeutige Resultate liefern, nämlich

$$r^* = 0{\cdot}67449\, m^* = 0{\cdot}84535\, t^*$$

$$h^* = \frac{0{\cdot}70711}{m^*} = \frac{0{\cdot}56419}{t^*}$$

Die Benützung der normalen mittleren Fehler ist jedoch nur dann praktisch zulässig, wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$m^*(1 - \alpha) < |\, m \,| < m^*(1 + \alpha),$$

worin α durch die Simony'sche Formel

$$\alpha = \frac{\sqrt{8n - 9}}{4(n - 1)}$$

definiert erscheint, d. h. wenn m innerhalb der mittleren Grenzen von m^* zu liegen kommt. Im Gegenfalle sind vorerst so viele der abnorm größten oder kleinsten Werte der betreffenden Beobachtungsreihe auszuscheiden, bis diese Grenzbedingung erfüllt ist.

Dividiert man m^*, t^*, r^* durch $\sqrt{n}$, so ergeben sich die Normalwerte der mittleren, durchschnittlichen und wahrscheinlichen Fehler der Mittelwerte:

$$M^* = \pm \frac{m^*}{\sqrt{n}} \qquad T^* = \pm \frac{t^*}{\sqrt{n}} \qquad R^* = \pm \frac{r^*}{\sqrt{n}},$$

und es resultiert als Normalwert des Genauigkeitsmaßes des arithmetischen Mittels die eindeutige Bestimmung:

$$H^* = \frac{1}{M^*\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2n}}{2m^*}.$$

Im Beispiele des vorigen Kapitels ist für $n = 40$:

$[vv] = 32{\cdot}5268$		$[\lvert v \rvert] = 29{\cdot}26$	
$m = 0{\cdot}913$	$t = 0{\cdot}741$	$r_1 = 0{\cdot}616$	$r_2 = 0{\cdot}626$
$m^* = 0{\cdot}919$	$t^* = 0{\cdot}733$	$r^* = 0{\cdot}621$ $(0{\cdot}620)$	
	$h^* = 0{\cdot}769$	$H^* = 4{\cdot}866.$	

Die Erfüllung der Grenzbedingung für $\alpha = 0{\cdot}128$

$$m^*(1 - \alpha) = 0{\cdot}811 < 0{\cdot}913 < 1{\cdot}027 = m^*(1 + \alpha)$$

läßt keine der 40 Beobachtungen als abnorm zweifelhaft erscheinen.

(Fortsetzung folgt).

Genauigkeit und Prüfung einer stereophotogrammetrischen Aufnahme.

Von Eduard Doležal, o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Fortsetzung).

III. Einfluß einer Plattenverschwenkung auf die Horizontal-Parallaxe und die Raumkoordinaten.

Eine prinzipielle Forderung der Stereophotogrammetrie ist, daß die in den beiden Basispunkten erhaltenen Bilder sich in einer Ebene befinden. Hat aber die eine Bildebene eine Verschwenkung erfahren, so ist es nun von Interesse, den Einfluß dieser Verschwenkung auf die Horizontal-Parallaxe und die Raumkoordinaten selbst kennen zu lernen.

1. Änderung der Horizontal-Parallaxe eines Punktes durch eine Änderung der Lage der parallelen Platten (Bilder).

Angenommen, das Bild in der Station S_2 sei um den Winkel φ verschwenkt (Fig. 4); die Trasse der Bildebene $\overline{T_2'T_2'}$ schließt mit der theoretisch richtigen Lage der Trasse $\overline{T_2T_2}$ den Winkel φ, den Verschwenkungswinkel, ein.

Es seien:

$\overline{\Omega_2 p_2} = a_0$ die wahre Horizontal-Parallaxe,
$\overline{\Omega_2' p_2'} = a$ die effektiv gemessene Parallaxe,
$\overline{S_2 \Omega_2} = \overline{S_2 \Omega_2'} = f$ die Bilddistanz und
α der Horizontalwinkel des Strahles $\overline{S_2 P}$ mit der Bilddistanz in S_2, so ergeben sich aus den rechtwinkeligen Dreiecken $p_2 \Omega_2 S_2$ und $p_2' \Omega_2' S_2'$ unmittelbar die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= f \operatorname{tg} \alpha \\ a &= f \operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi) \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 18)$$

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Obergeometer L. v. Klatecki.

Doppelheft Nr. 15—16. **Wien, am 1. August 1907.** V. Jahrgang.

Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichungsrechnung.

Von Oberingenieur **S. Wellisch.**

(Fortsetzung).

IX. Über das Gewicht.

Seit Gauss den mittleren Fehler m als das geeignetste Maß bezeichnet hat, um «die Unsicherheit von Beobachtungen allgemein zu definieren und zu messen», sind auch die damit zusammenhängenden Begriffe «Genauigkeit h» und «Gewicht p» als Präzisionsmaße gebraucht worden.

Laplace (1814) hat im Essai philosophique (nach der von Tönnies 1818 besorgten deutschen Übersetzung) folgende Erklärung gegeben: «Die Wahrscheinlichkeit der Irrtümer, welche jedes Element noch befürchten läßt, ist der Zahl proportional, deren hyperbolischer Logarithme die Einheit ist, wenn nämlich diese Zahl auf eine dem im Minimum genommenen Quadrate des Irrtums gleiche Potenz erhoben und mit einem beständigen Koeffizienten multipliziert wird, der als der Model der Wahrscheinlichkeit der Irrtümer betrachtet werden kann: weil, wenn der Irrtum derselbe bleibt, seine Wahrscheinlichkeit mit Schnelligkeit abnimmt, indem jener wächst, so daß das erhaltene Element umsomehr nach der Seite der Wahrheit hin, wenn ich so sagen kann, wiegt, je größer der Model ist. Daher werde ich diesen Model das Gewicht des Elementes oder Resultats nennen». — Die von Schnuse (1841) veranstaltete deutsche Ausgabe des Werkes: Recherches sur la Probabilité von Poisson (1837), das sich eng an Laplace anschließt, gibt die Definition in ebenso schwulstiger Weise.

Wir wollen nun beobachten, welche Entwicklung die Definition des Begriffes «Gewicht» seither genommen hat, und wie sich allmählig durch Umformung, Verbesserung und Ausfeilung ihr Ausbau vollzogen hat.

Nach der von Gauss (1819) aufgestellten Definition versteht man unter der mathematischen Genauigkeit einer Beobachtung jene Größe, welche dem mittleren Fehler umgekehrt proportional ist, während das Gewicht immer dem

Quadrate der Genauigkeit direkt oder dem Quadrate des mittleren Fehlers umgekehrt proportional genommen wird. Man hat somit die Beziehungen:

$$m = \frac{1}{h\sqrt{2}} \qquad p = kh^2 = \frac{k}{2m^2}.$$

«Um daher das Gewicht durch eine Zahl ausdrücken zu können, muß man das Gewicht einer gewissen Gattung von Beobachtungen als Einheit annehmen».

In Klügels Mathem. Wörterbuch, das von Mollweide fortgesetzt und von Grunert (1831) beendet wurde, wird zwischen Genauigkeit und Gewicht kein Unterschied gemacht; es wird h ausdrücklich die Präzision, der Wert oder das Gewicht der entsprechenden Beobachtung genannt. «Ist also das Gewicht der n Einzelbeobachtungen $= h$, so ist das Gewicht des arithmetischen Mittels $= h\sqrt{n}$». In diesem Buche, welches die Methode der kleinsten Quadrate in der 1. Abt., S. 983 bis 1027, behandelt, wird nebst Zitierung der grundlegenden Arbeiten von Gauss und Laplace auch auf die einschlägigen Schriften von Plana (1811 und 1819), Paucker (1819), Svanberg (1821), Muncke (1825) und Riese (1830) verwiesen.

Littrow Vater (1832) und einige andere Astronomen seiner Zeit setzen ohne weitere Erklärung $p = \frac{n}{2[vv]}$.

Encke's Definition (1834), welche von den besten Lehrbüchern für höhere Geodäsie und Astronomie, wie Fischer (1846), Brünnow (1852), Littrow Sohn (1859), Herr-Tinter (1887) akzeptiert wurde, lautet: «Man versteht unter Gewicht eines gegebenen Wertes die Anzahl von gleich guten Beobachtungen einer bestimmten Art (deren Genauigkeit als Einheit der Genauigkeit angesehen werden soll), welche erforderlich sein würde, um aus ihrem arithmetischen Mittel eine Bestimmung von gleicher Genauigkeit zu erhalten, wie die des gegebenen Wertes ist.»

Betrachtet man jede ungleich genaue Beobachtung als ein arithmetisches Mittel aus einer gewissen Anzahl von Beobachtungen, welche untereinander von einerlei Genauigkeit sind, und bezeichnet man eine der letzteren mit dem Namen «Gewichtseinheit», so nennt Gerling (1843) die Anzahl der Gewichtseinheiten, welche beobachtet sein müßten, damit ihr arithmetisches Mittel dieselbe Genauigkeit habe, die einer vorgegebenen angestellten Beobachtung zukommt, das «Gewicht» dieser letzteren.

Wittstein (1849) faßt sich viel kürzer, indem er die numerischen Koeffizienten, welche die relative Güte der einzelnen Beobachtungen charakterisieren, die Gewichte dieser Beobachtungen nennt.

Hartner (1850) stellt fest: «Das Gewicht einer Beobachtung ist ausgedrückt durch diejenige Anzahl gleich genauer Beobachtungen, welche erforderlich ist, damit dem arithmetischen Mittel daraus dieselbe Genauigkeit zukommt, wie der vorliegenden Beobachtung. — Das Gewicht jeder einzelnen dieser gedachten gleich genauen Beobachtungen wird Gewichtseinheit genannt.»

Sawitsch (1857) äußert sich nach der deutschen Übersetzung von Lais (1863) wie folgt: «Das Gewicht eines Beobachtungswertes zeigt an, wie viel

Beobachtungen von bestimmter Güte zu machen notwendig sind, um einen Fehler gleich demjenigen zu erlangen, den das gegebene Beobachtungsresultat enthält.»

F r e e d e n (1863) nennt die Repetitionszahlen, oder solche Zahlen, welche die Wiederkehr einer gleichen Beobachtung angeben, überhaupt alle Zahlenwerte, welche die Zuverlässigkeit einzelner Beobachtungen ausdrücken, die Gewichte dieser Beobachtungen.

H a n s e n (1867) versteht unter der Benennung des Gewichtes irgend einer Beobachtung oder eines Resultates aus Beobachtungen diejenige Anzahl von Beobachtungen von der Genauigkeit = 1, deren arithmetisches Mittel für eben so genau gehalten werden muß, wie diese Beobachtung oder dieses Resultat aus Beobachtungen, wobei das Gewicht immer relativ zn verstehen ist, indem immer die Genauigkeit oder das Gewicht irgend einer bestimmten Gattung von Beobachtungen = 1 gesetzt werden muß.

H e l m e r t (1872) versteht darunter jene Zahl, welche angibt, wie viele Beobachtungen von dem Gewichte 1 die gegebene Beobachtung ersetzt oder aufwiegt. Als Gewichtseinheit bezeichnet er eine fingierte Beobachtung mit dem Gewichte 1.

B a u e r n f e i n d (1876) bemüht sich, noch deutlicher als Gerling zu sein und sagt: «Denkt man sich zu den vorhandenen ungleich genauen Beobachtungen eine große Reihe anderer gleich genauer Beobachtungen, und betrachtet man jede vorhandene Beobachtung als das arithmetische Mittel aus einer gewissen Anzahl bloß gedachter Beobachtungen, so kann man die Anzahl der fingierten Beobachtungen, deren arithmetisches Mittel dieselbe Genauigkeit hat wie eine gegebene wirklich angestellte Beobachtung, das Gewicht der letzteren nennen, während jede der fingierten Beobachtungen die Gewichtseinheit vorstellt.»

J o r d a n (1877) drückt sich mit gleicher Deutlichkeit aber kürzer wie folgt aus: Das Gewicht einer Beobachtung ist bestimmt durch diejenige Zahl, welche angibt, wie viele fingierte Beobachtungen von gleicher Genauigkeit zu einem arithmetischen Mittel vereinigt werden müssen, damit dieses die Genauigkeit der gegebenen Beobachtung hat, wobei man das Gewicht einer fingierten Beobachtung gleich 1 setzt.

W e i n s t e i n (1886) definiert: «Man nennt jene Zahl, welche angibt, mit wie vielen Messungen nach einer Methode man eine ähnliche Schärfe wie mit einer Messung nach einer anderen Methode erreicht, das Gewicht dieser gegen jene Gewichte sind also Relativzahlen.»

C z u b e r (1891) gibt folgendes an: «Man nennt das Gewicht einer Beobachtung p mal größer als das einer anderen, wenn die Folgerungen, welche man für den Wert der beobachteten Größe aus e i n e r Beobachtung der ersten Art ziehen kann, gleichwertig sind mit den Folgerungen, welche sich aus p Beobachtungen der zweiten Art ziehen lassen, die sämtlich dasselbe Resultat ergeben haben. Ist p eine gebrochene Zahl, etwa $\frac{r}{s}$, so erfährt die Definition die Abänderung, daß s Beobachtungen der ersten Art gleichwertig sind mit r Beobachtungen der zweiten Art.»

Erscheint die Definition nunmehr vollkommen klargestellt, so finden sich dem Wortlaute nach noch beachtenswerte Variationen, z. B.:

Koll (1893): «Die Gewichte sind Verhältniszahlen, die angeben, wie oft ein Beobachtungsergebnis oder eine aus einem Beobachtungsergebnis abgeleitete Größe in einer Rechnung anzusetzen ist, um ihre Genauigkeit richtig zu berücksichtigen.»

Herz (1900): «Die Gewichte repräsentieren die Anzahl einfacher Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, welche man zu einem Mittel vereinigt denken kann, um die gegebene Beobachtung zu ersetzen.»

Weitbrecht (1906): »Das Gewicht einer Beobachtung ist nichts anderes als diejenige Anzahl von (wirklich ausgeführten oder nur gedachten) Beobachtungswiederholungen je vom mittleren Fehler μ, welche nötig ist, um den mittleren Fehler m dieser Beobachtung zu erreichen.»

Aus der von den verschiedensten Seiten beleuchteten Definition des Gewichtes geht hervor, daß eine Beobachtung mit dem Gewicht g ersetzt werden kann durch g Beobachtungen mit dem Gewichte 1 und daß statt der Benennung «Gewicht» manchmal auch anschaulicher die Bezeichnung «Anzahl» gewählt werden kann. Eine Beobachtung mit dem Gewichte 1 oder eine «Normalbeobachtung» stellt also sozusagen die «Beobachtungseinheit» dar, die gewöhnlich als «Gewichtseinheit» bezeichnet wird. Was man gemeiniglich die Gewichtseinheit nennt, ist also nicht die Einheit des Gewichtes, sondern eine Beobachtung, welcher die Gewichtseinheit zukommt. (Siehe auch Vogler: «Didaktisches zur Ausgleichungsrechnung» in der Zeitschr. f. Verm., Stuttgart 1904, S. 402).

Die Einführung ungleicher Gewichtsansätze kann verschiedenen Ursachen entspringen. Werden Messungen, Wägungen, Beobachtungen, Erhebungen etc. in einer ungleichen Anzahl vorgenommen, so spricht man von «Wiederholungsgewichten n». Werden Beobachtungen nach ungleich scharfen Methoden, mit ungleich beschaffenen Instrumenten, unter wechselnden äußeren Umständen oder mit verschiedener Sorgfalt angestellt, so werden die ihnen zugeschriebenen Gewichte speziell als «Genauigkeitsgewichte p» bezeichnet. Die Gewichte n und p sind von den Beobachtungsgrößen selbst unabhängig. Gewisse Messungsoperationen sind aber so beschaffen, daß ihre Güte mit der Messungsgröße selbst in einem bestimmten Zusammenhange stehen; dann sind die auftretenden Fehler von den Beobachtungsergebnissen abhängig und demgemäß auch die Gewichte bestimmte Funktionen der Beobachtungsstücke. So ist der Fehler der Längenmessung, wenn er nur von systematischen Teilen befreit ist, der Quadratwurzel aus der gemessenen Länge proportional. Derartige Gewichte heißen «Längengewichte», «Entfernungsgewichte», «Strahlengewichte» etc. Wird ein geometrisches Messungssystem so ausgeglichen, wie wenn es ein elastisches wäre, so kommen den einzelnen Elementen Gewichte zu, die wir speziell als «natürliche Gewichte» kennen gelernt haben.

Verschiedenartige, einer einzelnen Bestimmung beizulegende Gewichte kombinieren sich durch Multiplikation der Einzelgewichte zu dem «Gesamtgewichte g». Es ist beispielsweise in dem Falle der Richtungsausgleichung eines

Dreiecksnetzes, wo nicht nur verschiedene Strahlenlängen s, sondern auch ungleiche Genauigkeiten $\sqrt{p}$ und Wiederholungszahlen n auftreten, das Gesamtgewicht mit $g = n p s$ anzusetzen, während bei wiederholten Längenmessungen das Totalgewicht durch das Produkt $g = n p \cdot \frac{1}{L}$ ausgedrückt erscheint. Jahn (1839) bestimmt das Gesamtgewicht bei Besetzungen von Stellen aus dem Produkte a g v l k für jeden einzelnen Kandidaten, wo a das Alter, g die Gesundheit, v das Vermögen, l das Ledig- und Verheiratetsein und k den Charakter, die Kenntnisse und Leistungen der Kandidaten bedeuten*) und sich deren Einheiten auf den jüngsten, den kränklichsten, den reichsten und jeden ledigen Kandidaten beziehen und k durch vorausgegangene, sorgfältige Untersuchung von den stellenbesetzenden Wählern durch eine Zahl auszudrücken ist.

Dem Begriffe «Gewicht» kommt demnach eine viel allgemeinere Bedeutung als die eines bloßen Genauigkeitsmaßes zu: Es ist allgemein als ein die Beobachtungsart näher bezeichnendes Merkmal aufzufassen, das sich von den direkt angestellten Beobachtungen auch auf Funktionen von Beobachtungen gewissermaßen überträgt.

Von den erwähnten Gewichtsarten sind die Wiederholungsgewichte direkt proportional oder gleich zu setzen den Anzahlen der wiederholten Erhebungen; die von den Messungsgrößen abhängigen Gewichte lassen sich aus dem Abhängigkeitsgesetze berechnen; die Bestimmung der Genauigkeitsgewichte ist aber im allgemeinen nur einer Schätzung zugänglich, sie ist, wie Freeden sich ausdrückt, «oft diskretionärer Natur und deshalb eine Sache des Taktes und der Erfahrung». Es erscheint daher notwendig, für diesen Gewichtsfaktor eine willkürliche Taxierung zu treffen, worüber Kries (1886) folgendes bemerkt: «Wenn es erforderlich ist, Beobachtungen verschiedener Art mit einander zu kombinieren, und man Veranlassung hat, die einen für genauer als die anderen zu halten, ohne daß aus der Beobachtungsreihe selbst sich für das Präzisionsmaß derselben bestimmte Anhaltspunkte ergeben, so ist es notwendig, über die den verschiedenen Beobachtungen beizulegenden Gewichte irgend eine willkürliche Festsetzung zu treffen; man führt etwa das Resultat eines Beobachters mit dem doppelten oder dreifachen Gewicht in die Rechnung ein, wie das eines anderen.»

Während sohin die Gewichte der Beobachtungen zumeist als gegeben vorliegen oder vor der definitiven Ausgleichung berechnet werden können, sind die Gewichte der Funktionen von Beobachtungen oder der unbekannten Elemente erst im Wege der Ausgleichungsrechnung abzuleiten, worüber im folgenden Kapitel näheres gesagt werden soll.

(Fortsetzung folgt.)

---

*) Der Protektionsfaktor P spielte zu Jahn's Zeiten noch keine Rolle.

Es sei nun P_{14} (siehe Fig. 3) derjenige Punkt, dessen Ordinate

$$\frac{y_1 + y_4}{2}$$

ist und analog P_{23}, ferner P_m der Punkt mit der Ordinate y_m, dann hat man

$$4 P_m = P_{14} + 3 P_{32}.$$

Die Punkte P_{14} und P_{32} sind offenbar die Schnittpunkte einer durch P_1 und P_4 resp. P_2 und P_3 bestimmten Geraden mit der Teilungsgeraden.

Man hat ferner

$$P_m = P_{23} - \tfrac{1}{4}(P_{23} - P_{14}).$$

Wir erhalten so für den Inhalt

$$y_m . 3 \triangle x = y_{23} . 3 \triangle x - \tfrac{3}{4}(P_{23} - P_{14}) \triangle x.$$

Auf der geteilten Geraden lesen wir direkt

$$\eta_m = 3 \triangle x . y_m$$

ab und analog $\eta_{23} = 3 \triangle x . y_{23}$, $\eta_{14} = 3 \triangle x . y_{14}$.

Man hat also, wenn die Fläche $A P_1 P_2 P_3 P_4 B$ mit i_{14} bezeichnet wird, sofort

$$i_{14} = \eta_{23} - \tfrac{1}{4}(\eta_{23} - \eta_{14}).$$

Diese Formel gilt streng für eine Parabel dritten Grades. Da man aber eine jede Kurve innerhalb mäßiger Grenzen durch eine solche darstellen kann, allgemein als eine Näherungsformel.

Beim Gebrauche legt man das Planimeter so auf die Figur, daß sie von der Nullgeraden nahezu in zwei gleiche Teile zerlegt wird.

Hierauf wird an die Schnittpunkte $P_2 P_3$ die Filmgerade angelegt und η_{23} abgelesen. Ebenso wird durch Anlegen der Filmgerade an die Punkte $P_1 P_4$ die Lesung η_{14} gewonnen. Die zwischen y_1 und y_4 eingeschlossene Fläche ist dann gegeben durch die Formel

$$i_{14} = \eta_{23} - \tfrac{1}{4}(\eta_{23} - \eta_{14}).$$

Hat man mit Begrenzungen mit nicht abzuwechselnder Krümmung zu tun, so können die Abstände der Ordinaten ziemlich groß genommen werden, ohne daß das Verfahren viel an Genauigkeit einbüßt, was oft eine nicht unbedeutende Zeitersparnis bedeutet.

Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichungsrechnung.

Von Oberingenieur **S. Wellisch.**

(Fortsetzung).

X. Über das Prinzip der kleinsten Summen.

Liegen zur Bestimmung der u Unbekannten x, y, z, . . . die n Fehlergleichungen (n > u) mit den Gesamtgewichten vor:

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1 = v_1 & \text{Gewicht } g_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - l_2 = v_2 & \quad \text{»} \qquad g_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots 1)$$

und ist $f = \varphi\,(l_1, l_2, l_3, \ldots l_n)$ eine lineare Funktion der von einander unabhängig gemessenen n Größen $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$; bezeichnet man die partiellen Differentialquotienten der Funktion nach den einzelnen Beobachtungsgrößen der Reihe nach mit

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} = q_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial l_2} = q_2 \,.\;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{\partial f}{\partial l_n} = q_n$$

und sind die den beobachtenden Größen anhaftenden mittleren Fehler:

$$\pm\, m_1 \qquad \pm\, m_2 \;.\;.\;.\; \pm\, m_n,$$

sohin die ihnen zukommenden Gewichte

$$g_1 = \frac{m_0^2}{m_1^2} \qquad g_2 = \frac{m_0^2}{m_2^2} \;.\;.\;.\;.\; g_n = \frac{m_0^2}{m_n^2}$$

wo $m_0^2 = \frac{[gvv]}{n - u}$ das mittlere Fehlerquadrat einer Beobachtung vom Gewichte 1 oder m_0 den sogenannten «mittleren Fehler der Gewichtseinheit» bedeutet, so ist der mittlere Fehler der Funktion:

$$m_f = \pm \sqrt{(q_1 m_1)^2 + (q_2 m_2)^2 + \ldots + (q_n m_n)^2} = \pm \sqrt{[q^2 m^2]} = \pm\, m_0 \sqrt{\left[\frac{qq}{g}\right]}$$

und das reziproke Gewicht der Funktion: $\frac{1}{g_f} = \left[\frac{qq}{g}\right]$.

Satz: Die Anwendung der Theorie der kleinsten Summen zur Ausgleichung überzähliger Beobachtungen läßt nicht nur bei den beobachteten Elementen die kleinsten mittleren Fehler zurück, sondern erteilt auch den unbekannten Elementen die größten Gewichte.

a) Ausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Fehler.

Obwohl die Bestimmung der mittleren Fehler und Gewichte der Ausgleichungsresultate in den meisten Handbüchern der Methode der kleinsten Quadrate zu finden ist, sei diese Aufgabe namentlich aus dem Grunde selbständig durchgeführt, weil in der hier etwas abweichenden Ableitung der Finalgleichungen eine Vereinfachung insofern hineingebracht erscheint, als die auftretenden Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sowohl für gleiche, als auch für ungleiche Gewichte der Beobachtungen hier konsequent dieselbe Bedeutung behalten. (Vergl. Jordan: Handbuch der Vermessungskunde, I. Bd. 1888, § 22, oder 1904, § 21, Gleichung 8 und 9).

Stellt man die Bedingung auf, daß die Summe der mit den Gewichten multiplizierten Quadrate der übrigbleibenden Widersprüche, d. i.:

$$[gvv]$$

ein Minimum werde, so erhält man aus den Fehlergleichungen 1), wenn man sich auf drei Unbekannte beschränkt, die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
[gaa]x + [gab]y + [gac]z &= [gal] \\
[gab]x + [gbb]y + [gbc]z &= [gbl] \\
[gac]x + [gbc]y + [gcc]z &= [gcl]
\end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 2)$$

Um die mittleren Fehler oder Gewichte der ersten Unbekannten x angeben zu können, hat man den Anteil jeder der Beobachtungswerte $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ an dieser

Unbekannten zu bestimmen, d. h. man hat diese Unbekannte als Funktion der direkt beobachteten Elemente l darzustellen. Zu diesem Behufe multipliziere man die Normalgleichungen 2) der Reihe nach mit den vorläufig noch unbestimmten Koeffizienten $k_x' \; k_x'' \; k_x'''$ und summiere sie, wodurch man erhält:

$$\{[gaa]k_x' + [gab]k_x'' + [gac]k_x'''\}x + \{[gab]k_x' + [gbb]k_x'' + [gbc]k_x'''\}y +$$
$$+ \{[gac]k_x' + [gbc]k_x'' + [gcc]k_x'''\}z - \{[gal]k_x' + [gbl]k_x'' + [gcl]k_x'''\} = 0$$

Nun ermittelt man die sogenannten Gewichtskoeffizienten so, daß der Koeffizient von x gleich der Einheit wird und die Koeffizienten von y und z verschwinden, stellt also folgende Gewichtsgleichungen für die Unbekannte x auf:

$$\left.\begin{aligned} [gaa]k_x' + [gab]k_x'' + [gac]k_x''' &= 1 \\ [gab]k_x' + [gbb]k_x'' + [gbc]k_x''' &= 0 \\ [gac]k_x' + [gbc]k_x'' + [gcc]k_x''' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3)$$

Aus diesen Gleichungen berechnet man in üblicher Weise die Gewichtskoeffizienten und erhält so mit Berücksichtigung von 3) die sogenannte «unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen»:

$$x = [gal]k_x' + [gbl]k_x'' + [gcl]k_x'''$$

welche durch die Auflösung der Summenausdrücke wie folgt umgeformt wird:

$$x = (a_1 k_x' + b_1 k_x'' + c_1 k_x''') g_1 l_1 + (a_2 k_x' + b_2 k_x'' + c_2 k_x''') g_2 l_2 + \ldots$$

Setzt man für die Ausdrücke in den Parenthesen, da hierin alle Glieder bekannt sind, zur Abkürzung der Reihe nach die Faktoren $\alpha_1 \, \alpha_2 \, \alpha_3 \ldots$, so erscheint x als lineare Funktion der direkt beobachteten Größen $l_1 \, l_2 \, l_3 \ldots$ übersichtlich dargestellt, nämlich:

$$x = \alpha_1 g_1 l_1 + \alpha_2 g_2 l_2 + \ldots$$

Sohin ist, da $q = \alpha g$, der mittlere Fehler von x:

$$m_x = \pm m_0 \sqrt{\left[\frac{qq}{g}\right]} = \pm m_0 \sqrt{[g\alpha\alpha]} = \pm \sqrt{\frac{[gvv]\,[g\alpha\alpha]}{n-u}}.$$

Die Summe $[g\alpha\alpha]$ wird direkt summarisch wie folgt erhalten: Multipliziert man die Ausdrücke für $\alpha_1 \, \alpha_2 \, \alpha_3 \ldots$ der Reihe nach mit $g_1\alpha_1$, $g_2\alpha_2$, $g_3\alpha_3 \ldots$ und bildet man die Summe, so erhält man zunächst:

$$[g\alpha\alpha] = [ga\alpha]k_x' + [gb\alpha]k_x'' + [gc\alpha]k_x''' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 4)$$

Multipliziert man jetzt dieselben Ausdrücke der Reihe nach mit ga, gb, gc und addiert jedesmal, so ergeben sich mit Hinweis auf 3) die Beziehungen:

$$[ga\alpha] = 1 \quad [gb\alpha] = 0 \quad [gc\alpha] = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

Folglich erhält man durch Substitution von 5) in 4):

$$[g\alpha\alpha] = k_x'$$

$$m_x = \pm m_0 \sqrt{k_x'} \qquad g_x = \frac{1}{k_x'}$$

In analoger Weise ergeben sich auch die mittleren Fehler und Gewichte der Unbekannten y und z. In übersichtlicher Zusammenstellung hat man daher für drei Unbekannte:

1. Das System der Gewichtskoeffizienten aus den drei Gruppen von Gewichtsgleichungen:

$$\begin{array}{l|c|c} [gaa]k' + [gab]k'' + [gac]k''' = 1 & 0 & 0 \\ [gab]k' + [gbb]k'' + [gbc]k''' = 0 & 1 & 0 \\ [gac]k' + [gbc]k'' + [gcc]k''' = 0 & 0 & 1 \end{array}$$

und zwar: $k_x'\ k_x''\ k_x'''$ — $k_y'\ k_y''\ k_y'''$ — $k_z'\ k_z''\ k_z'''$, je nachdem die Absolutglieder: 1, 0, 0, — 0, 1, 0, — 0, 0, 1, eingeführt werden.

2. Die Darstellung der Unbekannten als lineare Funktionen der Beobachtungen:

$$x = [\alpha g l]$$
$$y = [\beta g l]$$
$$z = [\gamma g l],$$

worin die Faktoren α, β, γ allgemein wie folgt bestimmt sind:

$$\alpha = a k_x' + b k_x'' + c k_x'''$$
$$\beta = a k_y' + b k_y'' + c k_y'''$$
$$\gamma = a k_z' + b k_z'' + c k_z'''$$

3. Die mittleren Fehler und Gewichte der Unbekannten:

$$m_x = \pm m_0 \sqrt{[g\alpha\alpha]} = \pm m_0 \sqrt{k_x'} \qquad g_x = 1 : k_x'$$
$$m_y = \pm m_0 \sqrt{[g\beta\beta]} = \pm m_0 \sqrt{k_y''} \qquad g_y = 1 : k_y''$$
$$m_z = \pm m_0 \sqrt{[g\gamma\gamma]} = \pm m_0 \sqrt{k_z'''} \qquad g_z = 1 : k_z'''$$

Da in den Ausdrücken für die mittleren Fehler die Koeffizienten k bei vorliegenden Beobachtungen konstante Größen sind, die Unbekannten aber so bestimmt wurden, daß der zweite Faktor im Ausdrucke für die mittleren Fehler, nämlich $m_0 = \sqrt{\frac{[gvv]}{n-u}}$, zu einem Minimum wird, so sieht man, daß das Prinzip der kleinsten Summen nicht nur den Beobachtungen, sondern auch den Unbekannten in ihrer Gesamtheit die kleinsten mittleren Fehler erteilt.

b) Ausgleichung nach dem Prinzip der größten Gewichte.

In dem Vorgehenden wurden die Beobachtungen so ausgeglichen, daß die Summe der mit den Beobachtungsgewichten multiplizierten Quadrate der übrigbleibenden Widersprüche und damit auch die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen und der berechneten Unbekannten zu einem Minimum werden. Damit ist aber noch nicht dargetan, daß durch die Ausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Summen auch die Gewichte der Unbekannten am größten werden, da aus den Ansätzen für die Gewichte der zu einem Minimum gemachte mittlere Fehler der Gewichtseinheit durch Kürzung hinausgefallen ist. Es bietet sich nun die Frage dar, wie die Unbekannten zu berechnen sind, damit die Gewichte der Unbekannten den möglich größten Wert erlangen? Offenbar so, daß die Summen

$$[g\alpha\alpha], \qquad [g\beta\beta], \qquad [g\gamma\gamma]$$

welche den Gewichtsreziproken gerade proportional sind, je für sich Minima werden.

Ausgehend von den wahren Werten der Unbekannten X Y Z, setzen wir die Gleichungen für die wahren Fehler an:

$$a_1X + b_1Y + c_1Z - l_1 = \varepsilon_1 \qquad \text{Anzahl } g_1$$
$$a_2X + b_2Y + c_2Z - l_2 = \varepsilon_2 \qquad \text{»} \quad g_2$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

Führen wir die Untersuchung zunächst für die Unbekannte X durch, so multiplizieren wir diese Fehlergleichungen der Reihe nach mit den vorläufig noch unbestimmt gelassenen Multiplikatoren $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots$ und addieren sie unter Berücksichtigung ihrer «Anzahl», so daß wir die Summengleichung erhalten:

$$[ga\alpha]X + [gb\alpha]Y + [gc\alpha]Z - [gl\alpha] = [g\varepsilon\alpha]$$

Um die darin vorkommenden Multiplikatoren α so zu bestimmen, daß X eine lineare Funktion aller l werde, müssen hiefür solche Werte aufgesucht werden, welche die Glieder mit Y und Z zum Verschwinden bringen und den Koeffizienten von X zur Einheit machen. Unterwirft man daher diese Multiplikatoren den Bedingungsgleichungen:

$$[ga\alpha] = 1 \qquad [gb\alpha] = 0 \qquad [gc\alpha] = 0 \quad \ldots\ldots 6),$$

so reduziert sich die obige Summengleichung auf die einfache Form:

$$X - [gl\alpha] = [g\varepsilon\alpha].$$

Wird hierin $[g\varepsilon\alpha] = 0$ gesetzt, so geht der wahre Wert X der Unbekannten in seinen der Wahrheit am nächsten liegenden Wert x über, so daß

$$X - x = [g\varepsilon\alpha]$$

den wahren Fehler von x vorstellt, und die Unbekannte als eine lineare Funktion der direkten Beobachtungen ausgedrückt ist, nämlich:

$$x = [\alpha g l] = \alpha_1 g_1 l_1 + \alpha_2 g_2 l_2 + \ldots$$

Es wird nun offenbar derjenige Wert von x der beste sein, dessen Fehler dem wahren Fehler am nächsten kommt, das ist aber mit größter Wahrscheinlichkeit der mittlere Fehler $m_x = \pm m_0 \sqrt{[g\alpha\alpha]}$. Damit nun m_x ein Minimum werde, müssen, da jetzt m_0 bei gegebenen Beobachtungen als eine unveränderliche Größe anzunehmen ist, die in einer Anzahl n vorkommenden Multiplikatoren α, von welchen durch die Erfüllung der Bedingungsgleichungen 6) erst drei eliminiert erscheinen, während $n - 3$ immer noch unbestimmt bleiben, so gewählt werden, daß $\quad [g\alpha\alpha] = \text{min} \quad$ wird.

Um nun dieser Bedingung zu genügen, geht man nach Lagrange so vor, daß man zunächst die der Reihe nach mit den Korrelaten $-2k_x'$, $-2k_x''$, $-2k_x'''$ multiplizierten Bedingungsgleichungen 6) zu der aufgelösten Summe $[g\alpha\alpha]$ hinzufügt, wodurch erhalten wird:

$$[g\alpha\alpha] = g_1\alpha_1^2 + g_2\alpha_2^2 + \ldots - 2k_x'([ga\alpha] - 1) - 2k_x''[gb\alpha] - 2k_x'''[gc\alpha] = \text{min.}$$

Durch Nullsetzen der nach allen α genommenen partiellen Differentialquotienten und Kürzung durch die Konstanten g wird:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = a_1 k_x' + b_1 k_x'' + c_1 k_x''' \\ \alpha_2 = a_2 k_x' + b_2 k_x'' + c_2 k_x''' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 7)$$

Durch Substituierung dieser Ausdrücke in 6) wird erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} [gaa]k_x' + [gab]k_x'' + [gac]k_x''' = 1 \\ [gab]k_x' + [gbb]k_x'' + [gbc]k_x''' = 0 \\ [gac]k_x' + [gbc]k_x'' + [gcc]k_x''' = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 8)$$

womit die Korrelaten k und weiters die Multiplikatoren α, sowie die Summe $[g\alpha\alpha]$ berechnet werden können.

Durch die Erfüllung der Minimumsbedingung $[g\alpha\alpha] = \min$ hat die Unbekannte x die geringste Abweichung von der Wahrheit oder das größte Gewicht erhalten, was auch in analoger Weise von den übrigen Elementen y, z nachgewiesen werden kann.

Vergleicht man nun die Multiplikatoren α des Kap. b mit den Faktoren α des Kap. a und die Korrelaten k des Kap. b mit den Koeffizienten k des Kap. a, so ergibt sich aus der Identität der von einander unabhängig eingeführten Zahlengrößen die Tatsache, daß der hier eingeschlagene Vorgang bei der Ausgleichung der beobachteten Elemente mit den Vorschriften der Methode der kleinsten Summen vollkommen übereinstimmt. Man ist daher zu dem Schlusse berechtigt:

«Diejenigen Werte der Unbekannten, die aus einer Kombination der Beobachtungen hervorgehen, welche die Summe $[g\alpha\alpha]$ zu einem Minimum machen, sind mit denjenigen Werten identisch, welche die Summe $[gvv]$ auf ein kleinstes Maß bringen».

Oder: «Das Ausgleichungsverfahren, welches die Unbekannten so bestimmt, daß die Summe der mit den Beobachtungsgewichten multiplizierten Quadrate der übrigbleibenden Widersprüche ein Minimum wird, ist identisch mit jenem Ausgleichungsverfahren, welches den Resultaten die kleinsten mittleren Fehler oder die größten Gewichte zuteilt.»

Demnach liefert die Theorie der kleinsten Summen unbedingt die besten Resultate für die Unbekannten. Je nachdem aber die kleinsten Summen im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate oder im Sinne der Methode der kleinsten Produkte gebildet werden, erzeugt die eine oder die andere Methode das der eingeführten Bedingung gemäße Maximum für die Gewichte der unbekannten Elemente.

XI. Über die Koordinatengewichte.

Liegen für die Bestimmung der beiden Unbekannten x, y die drei Gleichungen vor:

$$a_1 x + b_1 y = \omega_1$$
$$a_2 x + b_2 y = \omega_2$$
$$a_3 x + b_3 y = \omega_3$$

so kann man dieselben nach den Unbekannten in allen Kombinationen zu zweien auflösen und erhält so die drei verschiedenen Wertpaare:

$$x_1 = -\frac{b_1\omega_2 - b_2\omega_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad y_1 = \frac{a_1\omega_2 - a_2\omega_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$
$$x_2 = -\frac{b_1\omega_3 - b_3\omega_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1} \qquad y_2 = \frac{a_1\omega_3 - a_3\omega_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1}$$
$$x_3 = -\frac{b_2\omega_3 - b_3\omega_2}{a_2 b_3 - a_3 b_2} \qquad y_3 = \frac{a_2\omega_3 - a_3\omega_2}{a_2 b_3 - a_3 b_2}$$

Diese drei Wertpaare stellen die Koordinaten der drei Schnittpunkte der durch die drei Gleichungen bestimmten Geraden dar und es sind die einfachen arithmetischen Mittel:

$$X = \frac{[x]}{3} \qquad Y = \frac{[y]}{3}$$

die Koordinaten des Schwerpunktes des durch diese Geraden gebildeten Dreieckes.

Die Schwerpunktlage, für welche die Summe der Quadrate aller Abstände von den Dreieckspunkten ein Minimum ist, entspricht aber nicht der etwa im Falle des Vorwärtseinschneidens nach der Methode der kleinsten Summen zu ermittelnden wahrscheinlichsten Punktlage, für welche bei gleichen Strahlenlängen die Summe der Quadrate der Abstände von den Dreiecksseiten ein Minimum werden soll. Dieser Minimumspunkt ist bestimmt durch das allgemeine arithmetische Mittel der Koordinaten:

$$X_0 = \frac{[gx]}{[g]} \qquad Y_0 = \frac{[gy]}{[g]},$$

worin die Gewichte g nach Jakobi (1841) folgende Werte besitzen:

$$g_1 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$
$$g_2 = (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2$$
$$g_3 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$$

Für die von Fuchs in der Abhandlung über das Eigengewicht der Bestimmungsgleichungen in der «Österr. Zeitschr. f. Verm.» 1907, S. 209, angeführten Gleichungen

$$+x + \frac{y}{\sqrt{3}} = 10, \qquad -x + \frac{y}{\sqrt{3}} = 10, \qquad y = 0$$

erhält man die Koordinatenpaare

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = 10\sqrt{3}$$
$$x_2 = +10 \qquad y_2 = 0$$
$$x_3 = -10 \qquad y_3 = 0\,.$$

Das einfache arithmetische Mittel derselben liefert die Koordinaten des Schwerpunktes:

$$X = 0 \qquad Y = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Führt man jedoch die Koordinatengewichte

$$g_1 = \tfrac{4}{3}, \qquad g_2 = 1, \qquad g_3 = 1, \qquad [g] = \tfrac{10}{3}$$

ein, so ergibt sich das allgemeine arithmetische Mittel der Koordinaten

$$X_0 = 0 \qquad Y_0 = \frac{12}{\sqrt{3}},$$

welche der wahrscheinlichsten Punktlage entsprechen.

Damit erscheinen auch die sogenannten «Eigengewichte» der Bestimmungsgleichungen einer näheren Erklärung zugänglich.

Liegen mehrere Punkte vor, so ist der wahrscheinlichste unter ihnen ihr Schwerpunkt, sind hingegen mehrere Seiten (Richtungen) gegeben, so ist ihr wahrscheinlichster Schnittpunkt der Gauß'sche Minimumspunkt. Allerdings ist auch der Schwerpunkt ein Minimumspunkt, aber er ist es nur in Bezug auf gegebene Punkte, nicht aber auch in Bezug auf gegebene Gerade.

Die Fuchs'schen Eigengewichte verschwenken demnach die gegebenen Geraden derart, daß die wahrscheinlichste Punktlage des deformierten Fehlerpolygons zusammenfällt mit der Schwerpunktslage des ursprünglichen Polygons, womit aber die Forderung der Methode der kleinsten Quadrate, die Summe der Quadrate der Beobachtungsfehler zu einem Minimum zu machen, ignoriert wird. Es sollte aber, wenn nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen wird, nach dem Vorbilde eines Gauss, Bessel und Hansen unbedingt daran festgehalten werden, daß nur diejenigen Werte, welche unmittelbar durch Beobachtung gegeben sind, verbessert werden, um den Bestimmungsgleichungen zu genügen und nicht solche Werte, die erst aus den Beobachtungen durch Ableitung gewonnen werden müssen. (Vergl. Wellisch: «Über die Prinzipien der Ausgleichungsrechnung» in der «Zeitschr. f. Vermessungsw.» Stuttgart 1907, S. 579).

(Fortsetzung folgt.)

Über Tachymeter und ihre Geschichte.

Zusammengestellt von Statthalterei-Ingenieur **Dr. Hans Löschner.**

(Fortsetzung).

Die vierte Gruppe in unserer Tachymeter-Einteilung umfaßt die automatischen Tachymeter, bei welchen die tachymetrischen Elemente D und h unmittelbar aus den Lattenablesungen — ohne besondere Rechnung — erhalten werden.

Hierher wird zunächst das schon früher erwähnte Tachymeter nach Patent Tichy und Starke gezählt.

Ein weiteres Tachymeter dieser Gruppe hat Prof. E. Hammer im Jahre 1894 entworfen, nachdem schon früher, besonders in Frankreich und Italien, Instrumente gebaut worden waren, bei welchen die Horizontaldistanz — nicht aber der Höhenunterschied — an der Latte abgelesen werden konnte.[1]) Die Veranlassung zum Entwurfe Hammer's gab das «Reduktionstachymeter» von G. Roncagli und E. Urbani, bei welchem ein verschiebbares, nach der Beziehung $L \cos^2 \alpha$ geteiltes Glasmikrometer entsprechend dem am Vertikalkreis abgelesenen Zenitwinkel eingestellt wird und sodann unmittelbar den der horizontalen Entfernung entsprechenden Lattenabschnitt liefert.[2]) Während nun nach Roncagli eine Verschiebung des

[1]) Hammer in Zeitschrift für Instrumentenkunde 1898, S. 241; Reinhertz in Jordan's Handbuch der Vermessungskunde Bd. II, 1904, S. 740.

[2]) Zeitschrift für Instrumentenkunde 1893, S 381 und 1895, S. 180. — Den gleichen Zweck verfolgen u. a. die Anordnungen von Baggi und von V. Reina. — Zeitschrift für Instrumentenkunde 1896, S. 340 und 1897, S. 287. — Bezüglich der französischen Instrumente ist insbesondere auf das Werk: «Goulier, Etudes théorétiques et pratiques sur les levers topométriques et en particulier sur la tacheométrie, Paris 1892» hinzuweisen. — Vergl. auch in Zeitschrift für Instrumentenkunde 1899, S. 191: A. Champigny's selbstrechnender Tachymetertheodolit für Ablesung von Horizontaldistanz und Höhenunterschied; ferner in Zeitschrift für Instrumentenkunde 1899, S. 377: Tachymeter von M. Nassò und endlich in Zeitschrift für Instrumentenkunde 1897, S. 155, über den automatisch wirkenden Tachygraphen von F. Schrader, eines durch seine topographischen Arbeiten in den Pyrenäen und als Leiter der geographischen Anstalt der Hachette'schen Buchhandlung in Paris bekannt gewordenen Ingenieur-Geographen.

Die Konstruktion bietet keine Schwierigkeiten und ist in der Fig. 2 gegeben. Man hat nur durch den Schnittpunkt der Geraden g_1, g_2 eine zur X-Axe parallele Gerade zu ziehen.

Zwei in der Entfernung $\frac{a_1^2}{\lambda}$ resp. $\frac{a_2^2}{\lambda}$

von dieser Geraden gezogene Parallelen schneiden die Geraden g_1, resp. g_2 in Punkten, deren Entfernungen von dem Schnittpunkte der Geraden g_1, g_2 eben die gesuchten Größen P_1 und P_2 sind.

Wird die Gerade g_{12} in gleicher Weise mit einer weiteren g_3 u. s. w. kombiniert, so erhält man zum Schlusse eine Gerade, welcher der einen Normalgleichung entspricht.

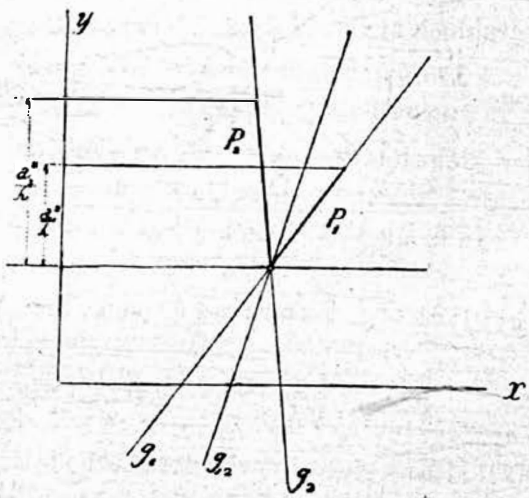

Fig. 2.

Ebenso ist die Gerade für die zweite Normalgleichung zu konstruieren. Der Schnittpunkt beider gibt dann diejenigen Werte von x und y, welche der Methode der kleinsten Quadrate entsprechen.

Die Konstruktion läßt sich bei Anwendung der Lehren der graphischen Statik wesentlich vereinfachen, wovon jedoch hier abgesehen werden soll, nachdem ein Bedürfnis der praktischen Anwendung dieser Gleichungen nicht vorliegt.

Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichungsrechnung.

Von Oberingenieur **S. Wellisch.**

(Schluß).

Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß man, um durch Ausgleichung mehrerer Strahlenschnitte zu den von Fuchs erwarteten Werten zu gelangen, die einfache Methode der kleinsten Quadrate nicht anwenden darf.

Versuchen wir es also mit einer anderen Methode, z. B. mit dem Bertotschen Verfahren, nach welchem den einzelnen Geraden Gewichte anzuweisen sind, die den Quadraten ihrer Längen s^2 proportional sind. Bezeichnet σ den Südwinkel einer Geraden, so ist

$$a = -\frac{\sin\sigma}{s} \qquad b = \frac{\cos\sigma}{s} \qquad s = \frac{\sin\sigma}{a} = \frac{\cos\sigma}{b}$$

und das Quadrat der «algebraischen Hypotenuse» oder das Eigengewicht der Bestimmungsgleichung:

$$h^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{s^2}.$$

Da sohin die Eigengewichte auch durch die Bertot'schen Gewichte definiert erscheinen, so gelangt man zu dem Resultate, daß diejenigen Werte, welche nach Prof. Fuchs zu erwarten sind, auch durch Anwendung des Bertot'schen Verfahrens gewonnen werden können. Gleicht man mit Rücksicht auf die Ungleichheit der drei Strahlenlängen

$$s_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad s_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad s_3 = 1$$

nach der Methode der kleinsten Produkte aus, welche den einzelnen Gleichungen die natürlichen Gewichte s zuerteilt, so gelangt man zu einem Resultate, welches zwischen dem nach Gauss und dem nach Bertot erhaltenen zu liegen kommt, nämlich:

1. Wahrscheinlichste Punktlage nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$x = 0 \qquad y = \frac{12}{\sqrt{3}},$$

2. Natürlichste Punktlage nach der Methode der kleinsten Produkte:

$$x = 0 \qquad y = \frac{11}{\sqrt{3}},$$

3. Geometrische Punktlage nach dem Bertot'schen Verfahren oder mit Benützung der Eigengewichte:

$$x = 0 \qquad y = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

Von diesen drei Punkten ist der Schwerpunkt im allgemeinen verschieden; nur für regelmäßige Fehlerpolygone, also auch für ein dem Fuchs'schen Beispiele zu Grunde liegendes gleichseitiges Dreieck fällt der Schwerpunkt mit dem geometrischen Mittelpunkte zusammen. Sind die Strahlenlängen einander gleich, was z. B. bei den Gleichungen

$$x + \frac{y}{\sqrt{3}} = 10, \qquad -x + \frac{y}{\sqrt{3}} = 10, \qquad \frac{2}{\sqrt{3}}\,y = 0$$

der Fall ist, so fällt auch der wahrscheinlichste und der natürlichste Mittelpunkt mit dem geometrischen zusammen. Für ungleiche Strahlenlängen darf aber nicht ohneweiteres der Schwerpunkt als das Ausgleichungsresultat erwartet werden.

XII. Über die Bezeichnung der Gleichungen.

Für die meisten, in den Formeln der Ausgleichungsrechnung gebrauchten Größen und Begriffe finden sich die mannigfachsten Buchstabenbezeichnungen.

So trifft man beispielsweise für die scheinbaren Fehler der Ausgleichung in der umfangreichen Literatur die Symbole v, ν, φ, λ, ω, △, δ, x, △x, l, f. Selbst die Schreibung von Eigennamen wird nicht konsequent durchgeführt; so findet man für Tchébychef die Schreibweisen: Tchebychef, Tchebichef, Tchebycheff, Tschebyscheff, Tschebytschew und Čebyšev. Nimmt man gleichzeitig mit einem modernen Handbuch der Ausgleichungsrechnung z. B. Weinsteins Physikalische Maßbestimmungen und Fechners Kollektivmaßlehre zur Hand, so kostet es Mühe, in dem Formelapparat sich zurecht zu finden. Auch für die in der Literatur der Ausgleichsrechnung am häufigsten vorkommenden Gleichungsarten gibt es die verschiedensten, zum Teil widersprechenden Benennungen, Definitionen und Schreibweisen. Um einer hiedurch leicht entstehenden Gedanken-Verwirrung vorzubeugen, wäre es hoch an der Zeit, daran zu denken, zum Zwecke der konsequenten Einhaltung einheitlicher Ausdrücke eine Einigung in der einheitlichen Bezeichnung der am häufigsten vorkommenden Größen und Begriffe zu erzielen und Vorschläge zu erstatten, wie hier mit der Benennung von Gleichungen ein schüchterner Anfang gemacht werden soll.

In den Formeln, welche die theoretische Abhängigkeit der wahren Werte der zu bestimmenden Unbekannten von gegebenen Koeffizienten in mathematischer Form zum Ausdrucke bringen, können die Unbekannten von einander unabhängig oder abhängig sein.

1. Sind die in den theoretischen Relationen auftretenden Unbekannten von einander unabhängig und vermitteln direkt beobachtete Größen ihren mathematischen Zusammenhang, so hat man es mit «Vermittlungsgleichungen» zu tun. (Nach Gerling: «Bedingungsgleichungen vermittelnder Beobachtungen», nach Hartner: «Bestimmungsgleichungen», nach Weinstein: «Beobachtungsgleichungen»).

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = L_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = L_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

2. Sind die in den theoretischen Relationen vorkommenden Unbekannten von einander abhängig, so daß sie bestimmten, strenge zu erfüllenden Bedingungen unterworfen sind, so spricht man von «Bedingungsgleichungen».

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = o$$
$$b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots + b_n x_n = o$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler sind sowohl die Vermittlungsgleichungen als auch die Bedingungsgleichungen untereinander nicht verträglich. Aufgabe der Ausgleichungsrechnung ist es, die Unbekannten so zu bestimmen, daß sie den Vermittlungsgleichungen so gut als möglich, den Bedingungsgleichungen aber strenge Genüge leisten.

3. Werden in die Vermittlungsgleichungen die mit den unvermeidlichen Fehlern behafteten Beobachtungen eingeführt, so entstehen die je eine Verbesserung enthaltenden «Fehlergleichungen vermittelnder Beobachtungen», welcher Name von Gauss herrührt.*) (In Klügels Wörterbuch heißen sie

*) Siehe Helmert: Ausgleichungsrechnung 1907, S. 40.

«Gleichungen für die Fehler», nach Encke: «Bedingungsgleichungen», nach Sawitsch: «Fundamental- oder Grundgleichungen», nach Vogler und Hammer: «Verbesserungsgleichungen»).

$$a_1x + b_1y + c_1z + \ldots - l_1 = v_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + \ldots - l_2 = v_2$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

4. Werden die mit unvermeidlichen Fehlern behafteten Beobachtungswerte in die Bedingungsgleichungen eingesetzt, so erhält man nach Hartner-Doležal die «Widerspruchsgleichungen», welche die zwischen den Sollbeträgen und Beobachtungswerten sich ergebenden Fehler der Gleichungen oder die Widersprüche aufweisen.

$$a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots + a_n l_n = \omega_a$$
$$b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + \ldots + b_n l_n = \omega_b$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

5. Diejenigen Gleichungen, welche die streng zu erfüllenden Bedingungen zwischen den Widersprüchen und den an den Beobachtungsergebnissen anzubringenden Verbesserungen zum Ausdrucke bringen, heißen die «Fehlergleichungen bedingter Beobachtungen». (Nach Gerling: «Bedingungsgleichungen bedingter Beobachtungen», nach Jordan: «Bedingungsgleichungen, bezogen auf die Verbesserungen», nach Koll: «Umgeformte Bedingungsgleichungen».)

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_n v_n + \omega_a = 0$$
$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots + b_n v_n + \omega_b = 0$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

6. Gleichungen, durch deren Auflösung unbekannte Elemente eindeutig berechnet werden, heißen nach Gerling «Normalgleichungen», weil sie, wie Oppolzer bemerkt, für die Bestimmung der Unbekannten maßgebend (normierend) sind. (Sie heißen nach Laplace: «Finalgleichungen», nach Encke: «Bedingungsgleichungen», nach Natani: «Bestimmungsgleichungen», nach Koll: «Endgleichungen».)

$$[aa]x + [ab]y + [ac]z = [al]$$
$$[ab]x + [bb]y + [bc]z = [bl]$$
$$[ac]x + [bc]y + [cc]z = [cl]$$

7. Sind die unbekannten Elemente die Gewichte der zu suchenden Größen, so legt man den Normalgleichungen nach Gerling speziell den Namen «Gewichtsgleichungen» bei.

8. Ein durch allmähliche Elimination um je eine Unbekannte vermindertes System von Gleichungen heißt das System der «Reduktionsgleichungen». Man spricht also von «reduzierten Fehlergleichungen», «reduzierten Normalgleichungen», «reduzierten Gewichtsgleichungen» u. s. w. Es lauten z. B. die reduzierten Normalgleichungen bei vier Unbekannten x, y, z, t:

1. Reduktion:
$$[bb.1]y + [bc.1]z + [bd.1]t = [bl.1]$$
$$[bc.1]y + [cc.1]z + [cd.1]t = [cl.1]$$
$$[bd.1]y + [cd.1]z + [dd.1]t = [dl.1]$$

2. Reduktion:
$$[cc.2]z + [cd.2]t = [cl.2]$$
$$[cd.2]z + [dd.2]t = [dl.2]$$

3. Reduktion:
$$[dd.3]t = [dl.3]$$

9. Die ersten Gleichungen der durch sukzessive Reduktion entstehenden Systeme von reduzierten Normalgleichungen bezeichnet man als die «vollständig reduzierten Normalgleichungen» oder nach Oppolzer die «Eliminationsgleichungen». (Nach Encke und Jordan: «Endgleichungen», nach Koll: «Reduzierte Endgleichungen».)

$$\begin{aligned}[aa]x + [ab\ \ ]y + [ac\ \ ]z + [ad\ \ ]t &= [al\ \ ]\\ [bb.1]y + [bc.1]z + [bd.1]t &= [bl.1]\\ [cc.2]z + [cd.2]t &= [cl.2]\\ [dd.3]t &= [dl.3]\end{aligned}$$

10. Die zur Prüfung der Koeffizienten der Normalgleichungen dienenden Relationen heißen «Probegleichungen» (auch «Prüfungsgleichungen», «Kontrolgleichungen», «Summengleichungen»).

11. Diejenigen Gleichungen, welche die zur Bestimmung eines Minimums mit Nebenbedingungen erforderlichen Hilfsgrößen, Multiplikatoren oder Korrelaten mit den Verbesserungen in Beziehung bringen, werden nach Gauss «Korrelatengleichungen» genannt. (Jordan nennt sie die «Korrektionsgleichungen».)

12. Diejenigen Gleichungen, welche die zur Bestimmung des Gewichtes einer Funktion der ausgeglichenen Elemente erforderlichen Übertragungs-Koeffizienten liefern, nennt man nach Gerling die «Übertragungsgleichungen».

XIII. Über das Summenzeichen.

Die Summe gleichartig gebildeter Ausdrücke, die sich nur durch die Indices von einander unterscheiden, z. B. das Aggregat

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2,$$

wird in den mathematischen Wissenschaften der Kürze und Übersichtlichkeit wegen allgemein durch Vorsetzen des griechischen Buchstaben Σ vor dem vom Index befreiten Ausdrucke angezeigt.

Während aber noch Hauber (1830) hiefür

$$\Sigma v^2$$

schreibt, gebrauchen spätere Schriftsteller, wie z. B. Natani (1875) die Schreibweise

$$\Sigma (v^2)$$

und Violle (1883):

$$(\Sigma v^2).$$

Legendre (1806) drückt in spezieller Anwendung auf die Ausgleichungsrechnung diese Summe durch das Integralzeichen

$$\int v^2$$

im Sinne eines stehenden S aus, das sich auch noch in Littrow (1831) und in Klügels Math. Wörterbuch (1831) vorfindet.

Gauss (1810) hat hiefür das Symbol

$$[vv]$$

eingeführt, welches seither in der Ausgleichungsrechnung nicht nur aus Pietät, sondern auch aus Gründen der Zweckmäßigkeit fast allgemein gebraucht wird.

Der Engländer Galloway (1839) setzt jedoch abweichend als Summenzeichen das große lateinische S:

$$\mathbf{S}(vv),$$

während Fries (1842) hiefür das kleine s der alten Type gebraucht:

$$\int vv,$$

und Vogler (1883) sich des Zirkumflexes

$$\overset{\backsim}{vv}$$

im Sinne eines liegendes S bedient, das nur noch von seinem Kollegen Hegemann (1896 und 1906) Nachahmung gefunden hat.

Jahn (1839), Hansen (1867) u. a. wählten statt der im Schreiben unbequemen eckigen Klammer die runde Klammer

$$(vv).$$

Manche Autoren benützen aber

$$(aa) \text{ für } \left[\frac{aa}{p}\right],$$

Weinstein (1886) setzt a_{11}, a_{12} statt [aa] [ab] und zur Darstellung des arithmetischen Mittels

$$\overline{v^2} \text{ für } \frac{[vv]}{n},$$

wofür Fechner (1897) das Symbol

$$A\,[v^2]$$

gebraucht. Ich glaube, daß wohl kein ernster Grund vorliegt, die von Gauss eingeführte einfache Symbolik zu verlassen, denn selbst in Kombinationen für die Bezeichnung von Summen mehrerer Summen leistet sie noch gute Dienste. So schreibt Uhlich (1896)

$$\Big[[v]\,[v]\Big] \text{ und } [[1]]$$

Helmert (1904): $\Sigma\,[\lambda\lambda]$

und Schulze (1906): $\Big[\sin^2[\alpha]\Big].$

Zum Unterschiede von der algebraischen Summe

$$[v]^{*})$$

wird für die Summe der numerischen oder absoluten Werte gleichartiger Größen gesetzt von

Helmert:	[val. abs. v]
Wolf:	Σv
Jordan:	$[\pm v]$
Weinstein:	$\Sigma \mid v \mid$
Láska:	[(v)]

während heute allgemein die Schreibweise

$$[\,|\,v\,|\,]$$

üblich geworden ist.

---

*) Morgan wählte in der Encyclopedia Metropolitana (1837) für die Darstellung des Produktes 1 . 2 . 3 . 4 . . . (x — 1) x das Symbol [x], wofür heute nach Kramp (x!) gesetzt wird.

XIV. Literarische Notizen.

Die Literatur über die Gegenstände der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Fehlertheorie und der Methode der kleinsten Quadrate ist eine so reichhaltige und umfassende, daß es für einen einzelnen kaum möglich ist, alle einschlägigen Schriften zu studieren, ja es dürfte bei den heutigen Einrichtungen überhaupt schwer fallen, sämtliche zugehörigen Arbeiten sich bloß zu beschaffen. Um einen halbwegs befriedigenden Überblick über die vorhandene Literatur zu gewinnen, ist man daher darauf angewiesen, auch aus zweiter Hand zu schöpfen. Bei der Zusammenstellung nachstehender Daten haben namentlich folgende Werke gute Dienste geleistet:

1892. Pizzetti P.: «I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali». Atti d'Univ. Genova.

1899. Czuber E.: «Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen». (Jahresber. der Deutsch. Math.-Ver. VII.)

1901. Wölffing E.: «Ergänzung des von E. Czuber in seinem Referat über Wahrscheinlichkeitsrechnung gegebenen Literaturverzeichnisses». (Mitt. des math.-naturw. Ver. in Württemberg. II. Ser. 1899—1901.)

Ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, führen wir an, daß in der Zeit von der Mitte des XVII. bis zum Ende des XIX. Jahrhunderts über die Wahrscheinlichkeitsrechnung einschließlich der Methode der kleinsten Quadrate von 688 Autoren gegen anderthalb Tausend Abhandlungen geschrieben worden sind, welche sich auf die einzelnen Halbjahrhunderte wie folgt verteilen:

Von 1650	bis 1700	. . .	13	Abhandlungen
» 1700	» 1750	. . .	27	»
» 1750	» 1800	. . .	85	»
» 1800	» 1850	. . .	256	»
» 1850	» 1900	. . .	1112	«
	zusammen	.	1493	

Hievon haben 346 Autoren mit 794 Schriften über die Methode der kleinsten Quadrate sich befaßt, und zwar erschienen in der Zeit von

1800	bis 1825	. . .	32	Abhandlungen
1825	» 1850	. . .	103	»
1850	» 1875	. .	262	»
1875	» 1900	. .	397	»

zusammen . . 794 Abhandlungen über die Methode der kleinsten Quadrate.

Von dieser Autoren-Legion seien hier besonders nur die Vorläufer der Methode der kleinsten Quadrate und deren Begründer, sowie von den Forschern nur diejenigen angeführt, welche bis zum Erscheinen des ersten grundlegenden Werkes von J. F. Encke im Jahre 1834 an dem Ausbau der Fehlertheorie und deren Anwendung mitgewirkt oder an deren Verbreitung Anteil genommen haben.

Vorläufer:

1748. Euler L. Sur les inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter.

1750. Mayer T. Über die Umwälzung des Mondes um seine Achse. (Kosmogr. Nachr. u. Samml. auf das Jahr 1748, Nürnberg.)

1755. Simpson Th. On the Advantage of taking the Mean of a Number of Observations in Practical Astronomy. (Phil. Trans.)

1755. Boscovich R. G. De litteraria expeditione per pontificium diditonem ad dimitiendos duos meridiani Gradus. Romae. (Französ. Paris 1770.)

1760. Lambert J. H. Photometria. Augustae Vindelicorum.

1765. Lambert J. H. Die Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche. (Beiträge zum Gebrauch der Math. u. deren Anwendung, Berlin.)

1773. Lagrange J. L. Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations. (Miscellanea Tauriniensia, V. 1770—1773.)

1877. Bernouilli D. Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanta. (Acta Acad. Petropolit. 1778.)

1802. Laplace P. S. Traité de mécanique céleste. Paris.

Begründer:

1805. Legendre A. M. Nouvelles méthodes pour la determination des orbites des comètes. Paris, 1806.

1807. Adrain R. Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations. (The Analyste or mathematical Museum. Vol. I. Philadelphia, 1808.)

1809. Gauss C. F. Theoria motus corporum coelestium. Hamburg.

1810. Gauss C. F. Disquisitio de elementis ellipticis Palladis. (Comm. Goetting. I.)

1812. Laplace P. S. Théorie analytique des probabilités. Paris. (Livre II, Chap. IV. — 1. Suppl. 1814; 2. Suppl. 1818; 3. Suppl. 1820.)

1812. Bessel F. W. Untersuchungen über die Bahn des Olbers'schen Kometen. (Abh. d. Berliner Akad. d. Wissensch. Math. Kl. 1812—1813.)

1814. Legendre A. M. Méthode des moindres quarrés, pour trouver le milieu le plus probable entre les résultats de différentes observations. (Mém. de l'Inst. de France. Paris.)

1814. Laplace P. S. Essai philosophique des probabilités. Paris. (5 éd. 1825; 6 éd. 1840. Deutsch von F. W. Tönnies, Heidelberg, 1819 und von N. Schwaiger, Leipzig, 1886.)

1816. Gauss C. F. Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. (Zeitschrift f. Astron. u. verwandte Wissensch., herausgeg. v. Lindenau u. Bohnenberger. Bd. I. Tübingen.)

1817. Adrain R. A Research concerning the mean diameter of the Earth. (Trans. of the Amer. Phil. Soc. I. Vol. 1818.)

1818. Bessel F. W. Fundamenta astronomiae.

1821 und 1823. Gauss C. F. Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. (Comm. Goetting. Pars prior 1821; Pars posterior 1822.)

1826. Gauss C. F. Sepplementum theoriae comb. Göttingen.

Forscher bis 1834.

1801. Trempley J. Sur la méthode de prendre les milieux entre des observations. (Acad. Berlin, 1804.)

1806. Lindenau B. A. Über den Gebrauch der Gradmessungen zur Bestimmung der Gestalt der Erde. (Corresp. de Zach. XIV.)

1811. Plana G. Mémoire sur divers problèmes de probabilité. (Mém. Acad. Turin, 1811—1812). — Zeitschr. Lindenau VI, 1818. — Mém. Soc. Ital. XVIII, 1820.

1816. Beek-Calkoen van. Over de Theorie der Genieddelde Waardij. (Mém. Inst. Néerl. I. Amsterdam.)

1819. Walbeck H. J. Dissertationem academicam de forma et magnitudine telluris, ex dimensis arcubus meridiani, definiendis. Abo.

1819. Paucker E. G. Uber die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf physikalische Beobachtungen. Mittau.

1819. Young Th. Remarks on the probability of error in physical observations and on the density of the Earth, especially with regard to the reduction of experiments of the Pendulum. (Phil. Trans. London.)

1820. Laplace P. S. Application du calcul des probabilités aux opérations géodésiques. (Connais. des Tems. 1820 et 1822.)

1821. Svanberg G. Dissertation sur la recherche du milieu le plus probable entre les résultats de plusieurs observations ou expériences. Gergonnes A. II.

1822. Gauss C. F. Pothenotische Ausgleichung. (Astr. Nachr. I.)

1824. Fourier J. B. J. Régle usuelle pour la précision des résultats moyens des observations. (Société Philomatique.)

1824. Fourier J. B. J. Sur les sciences d'observation. (Bull. sc. math. II).

1825. Muncke G. W. Über die Methode der kleinsten Quadratsumme. (Gehler's Phys. Wörterbuch. Art. «Beobachtung».)

1825. Ivory J. On the method of least squares (Phil. Magazine LXV—LXVI, 1825—1826.)

1826. Fourier J. B. J. Mémoire sur les résultats moyens deduits d'un grand nombre des observations. Paris.

1826. Gauss C. F. Chronometrische Längenbestimmmungen. (Astr. Nachr. V.)

1827. Rosenberger O. A. Über die auf Veranlassung der französischen Akademie während der Jahre 1736 und 1737 in Schweden vorgenommenen Gradmessungen. (Ast. Nachr. VI.)

1827. Poisson S. D. Mémoire sur la Probabilité des résultats moyens des Observations. (Additions à la Connaissance des Tems. Paris 1827 et 1832.)

1827. Galbraith W. On the method of least squares, as employed in determining the figure of the Earth from experiments with the pendulum, as well by measurements of arcs. (Phil. Mag. II.)

1828. Gauss C. F. Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona.

1828. Bessel F. W. Über die Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung. (Astr. Nachr. VI.)

1830. Poisson S. D. Note sur la probabilité du résultat moyen d'obs. (Bull. des Sciences math. de Ferrussac XIII.)

1830. Francoeur L. B. Astronomie pratique. Paris.

1830. Nürnberger J. C. Betrachtungen über die Methode der kleinsten Quadrate.

1830. Hansen P. A. Commentatio de gradus praecionis computatione. Gotha.

1830. Hauber C. F. Über die Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen (Zeitschr. f. Phys. u. Math., herausgeg. von Baumgartner u. Ettingshausen. 7. Bd. Wien.)

1830. Hauber C. F. Verallgemeinerung der Poisson'schen Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der mittleren Resultate der Beobachtungen. (Ibid. 7. Bd.)

1830. Hauber C. F. Theorie der mittleren Werte. (Ibid. 8., 9. u. 10. Bd. 1830—1831.)

1831. Littrow J. J. Bemerkungen zum praktischem Gebrauch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ibid. 9. Bd.)

1831. Hansen P. A. Neue Methode, bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate die Gewichte der Unbekannten zu berechnen. (Astr. Nachr. VIII.)

1831. Hansen P. A. Über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf geodätische Vermessungen im allgemeinen und über die Maupertuische Gradmessung. (Astr. Nachr. IX.)

1831. Hansen P. A. Sur une mémoire de Gauss relative aux moindres carrés. (Astr. Nachr. IX.)

1831. Grunert J. A. Berechnung der wahrscheinlichen Resultate aus gegebenen Beobachtungen. (Klügel's Mathem. Wörterbuch, V.)

1831. Cauchy A. Mémoire sur le système de valeurs qu'il faut attrubier a divers élemens determinés par un grand nombre d'observations pour que la plus grande de toutes les erreurs, abstraction faite du signe soit un minimum. (Journal de l'École polytec. XX.)

1831. Degen C. F. Récherches sur la parabole detérminée par la méthode des moindres carrés, etc. (Mém. Acad. S. Petersburg, I.)

1831. Encke J. F. Über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. (Berliner Akad.)

1832. Littrow J. J. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf das wissenschaftliche und praktische Leben. Wien, 1833.

Mit Encke's großem, in dem Berliner Astronomischen Jahrbuch von 1834 bis 1836 erschienenen Werke über die Methode der kleinsten Quadrate, das von den meisten seiner Nachfolger zur Grundlage genommen wurde, schließt die erste Entwicklungsperiode dieser Lehre. Die folgende Entwicklung könnte man in zwei weitere Perioden unterteilen: In die zweite Periode von Encke bis Helmert (1872) und in die dritte Periode von Helmert bis Czuber (1899), u. zw. mit

Gerling (1843), Hartner-Doležal (1850) und Hansen (1867), bezw. Jordan (1877), Herr-Tinter (1887) und Koll (1893) als Hauptförderer in Österreich und Deutschland.

Berichtigungen:

S. 101, Zeile 21 und 22 von oben ist zu setzen: 5) statt 4), bezw. 4) statt 5).
» 135, » 20 von oben ist zu setzen: «wahrscheinliche» statt «wahrscheinlichste».
» 218, » 18 » » ist einzuschalten: Newcomb (1886) und Lehmann-Filhès (1887).
» 286, » 1 » » ist zu setzen: «aber» statt «demnach».
» 286, » 3 » » » » » «dem geometrischen Mittelpunkte» statt «der Schwerpunktslage».

Über Tachymeter und ihre Geschichte.

Zusammengestellt von Statthalterei-Ingenieur **Dr. Hans Löschner.**

(Fortsetzung).

Die Schiebetachymeter bilden den Übergang in das Gebiet der Tachygraphometer, der sechsten Gruppe in unserer Tachymeter-Einteilung. Bei vielen Tachygraphometern verzichtet man von vorneherein auf die Möglichkeit der numerischen Bestimmung der tachymetrischen Elemente; man hat es dann lediglich mit einem Meßtisch zu tun, auf welchem sich eine Visiervorrichtung für Distanz- und Höhenmessung befindet.

Der Gedanke, das Vorwärtseinschneiden auf dem Meßtische durch einfaches Rayonieren in Verbindung mit optischer Distanzmessung zu ersetzen, findet sich erstmals in einer Abhandlung des Mechanikers Georg Friedrich Brander in Augsburg über den geometrischen Universal-Meßtisch vom Jahre 1772. Die Kippregel besaß die von Montanari erdachte Einrichtung des Okularfadendistanzmessers, nur in verfeinerter Ausführung: Das Mikrometer war in Form einer Meßleiter auf Glas eingeritzt (Glasskala). Auf diese Glasskalen wird auch hingewiesen in der «Beschreibung des neuen Meßtisches mit Distanzmeßtubus, der A. 1773 verfertigt worden», sowie in der «Beschreibung eines neuerfundenen Distanzenmessers aus einer Station, welcher von der königl. dänischen Akademie der Wissenschaften im Jahre 1778 den Preis erhalten».

Brander zeigte auch, wie man mit seinem Universalmeßtisch die Horizontalwinkel, sowie die Höhen der anvisierten Punkte bestimmen könne; er hat ein für die geometrische Planaufnahme in horizontalem und vertikalem Sinne geeignetes Instrument geschaffen und ist somit der Begründer der Meßtisch-Tachymetrie.

Durch die von Optiker Frauenhofer bewirkte Verbesserung der optischen Einrichtung gewann das distanzmessende Fernrohr an Bedeutung. Steppes hat aktenmäßig festgestellt, daß schon im Jahre 1813 zwölf nach den Angaben Georg