Paper-ID: VGI_190702

# Die Theorie des geoidischen Nivellierens

Siegmund Wellisch

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **5** (1–2, 3–4), S. 2–8, 29–35

1907

BibTEX:

```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_190702,
Title = {Die Theorie des geoidischen Nivellierens},
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {2--8, 29--35},
Number = {1--2, 3--4},
Year = {1907},
Volume = {5}
}
```

was wir tief beklagen müssen, denn es beschämt uns, gerade von jenen uns verlassen zu sehen, die unseren Herzen am nächsten stehen und auf die wir mit kollegialem Vertrauen gebaut haben!

Möge in dieser Hinsicht das neue Vereinsjahr die gewünschte einschneidende Besserung bringen.

Das wichtigste Moment unseres Vereinslebens bildete im verflossenen Jahre unstreitig die Überreichung unserer Petitionen an die vorgesetzte Behörde; wir erachten es als Ehrenpflicht, allen denen, die um das Zustandekommen der Denkschriften sich verdient gemacht haben, insbesondere aber dem emsigen Vereinsobmanne Herrn Zeno von Dankiewicz für seine unermüdliche Tätigkeit unseren herzlichsten Dank zu sagen. Von dem Wohlwollen des jetzigen Leiters des Finanzministeriums, der aus eigener Erfahrung die Verhältnisse unseres Standes und unsere berechtigten Wünsche wie kein zweiter kennt, erhoffen wir die endliche Fleischwerdung, zum mindesten des wesentlichsten Teiles jener Forderungen, die wir wiederholt in unseren Memoranden zum Ausdrucke gebracht haben; erwarten wir die Emporhebung unserer Körperschaft in jene Stellung, die wir infolge unserer für den Staat so ausgiebigen, unsere Kräfte aber erschöpfenden Leistungen schon längst hätten besitzen sollen.

Im Interesse des Fortschrittes der heimischen Wissenschaft bitten wir unsere verehrten Herren Mitarbeiter, uns auch im Lustrumsjahre kräftigst fördern zu wollen und sprechen ihnen für das bisherige Mühewalten unseren wärmsten Dank aus.

Von der Kollegenschaft aber erwarten wir, daß jeder einzelne für das Standesbewußtsein doch das erbringe, was wir zum besten der Gesamtheit geopfert zu sehen wünschen: einen engeren Zusammenschluß, eine freudigere, ergiebigere Erfüllung der freiwillig übernommenen Mitgliedspflichten.

Eine lange Zeitstrecke erfolgreicher, nicht umsonst getaner Arbeit liegt hinter uns, in Eueren Händen aber, Kollegen, ruht, was uns die Zukunft bringen wird!

# Die Theorie des geoidischen Nivellierens.

Von **S. Wellisch,** Oberingenieur der Stadt Wien.

«Das Problem der wissenschaftlichen Geodäsie ist die Ermittlung der Kräftefunktion der Erde».
(Bruns: «Die Figur der Erde».)

## Vorbereitende Erklärungen.

Inmitten der Erde ist der Sitz der Schwerkraft, welche von da aus alle Körper an sich zu ziehen strebt. Sie bewirkt auf jeden materiellen Punkt einen Druck gegen seine Unterlage oder veranlaßt, wenn er seiner Unterstützung beraubt wird, ein Fallen auf die Erdoberfläche gegen die Erdmitte hin.

Die Richtung eines auf die Erdoberfläche fallenden materiellen Punktes ist aber im allgemeinen keine mathematische Gerade, sondern infolge der kugelabweichenden Gestalt der Erde eine schwach gekrümmte Linie, welche die Kraft-linie oder Lotlinie genannt wird. Die Lotlinien verschiedener Punkte der Erdoberfläche schneiden sich in dem Erdschwerpunkte, aber die Lotrichtungen, das sind die Tangenten in jedem Punkte der Lotlinie, konvergieren nur annähernd nach diesem Punkte.

Eine krumme Fläche, welche sämtliche Lotlinien normal schneidet, heißt eine Gleichgewichts- oder Niveaufläche. Infolge der Krümmung der Lotlinien sind die Niveauflächen untereinander nicht parallel; aber ihre Abweichung vom Parallelismus ist nirgends groß. Bei einem kleinen Teile der Erdoberfläche macht sich auch die Krümmung der Niveauflächen nicht bemerkbar; aber die großen Flächen der Weltmeere bilden in ihrem Gleichheitszustande bereits einen sichtbaren Teil jener kugelartigen Begrenzungsfläche der Erde, welche — unterhalb der Kontinente als eine geschlossene Fläche im Gedanken fortführt — die mathematische Erdoberfläche oder das Geoid genannt wird. Wie alle Niveauflächen ist auch das Geoid eine geschlossene, stetig gekrümmte Fläche, welche in ihrer Figur sich nur wenig von einem an den Polen schwach abgeplatteten Rotationsellipsoid unterscheidet.

Je nach der Ausdehnung und Bedeutung der terrestrischen Vermessungen kann man die Erde als Ebene, als Kugel oder Sphäre, als Umdrehungsellipsoid oder Sphäroid oder schließlich als Geoid auffassen und diese Formen den Untersuchungen und Berechnungen zu Grunde legen. Sieht man die Erde als Ebene oder Kugel an, so sind die Niveauflächen als parallele oder Äquidistantenflächen zu behandeln; wird sie als Sphäroid betrachtet, so bilden die Niveauflächen gleichfalls Sphäroide, deren Abplattung aber mit der Erhebung der Niveauflächen über dem Meeresniveau stets abnimmt. Sie weichen dann notwendig vom Parallelismus ab und es erscheinen die zu den Niveausphäroiden normal gerichteten Lotlinien als in der Meridianebene gelegene, gegen den Pol hin konkav gebogene Kurven. Bei Betrachtung des Geoides stellen hingegen die Lotlinien räumlich sanft gekrümmte Kurven und die Niveauflächen mehr oder weniger unregelmäßige, mit lokalen Ein- und Ausbiegungen oder Deformationen versehene Flächen dar, für welche nur annäherungsweise die Gestalt eines Rotationsellipsoides substituiert werden kann.

Diesen Unterscheidungen entsprechend wollen wir auch die Niveauflächen als ebene, sphärische, sphäroidische oder geoidische Niveauflächen bezeichnen und das geometrische Nivellement bei Zugrundelegung einer Ebene oder Kugel als technisches Nivellement, bei Zugrundelegung des Sphäroides oder Geoides aber als Präzisionsnivellement, und zwar als sphäroidisches beziehungsweise geoidisches Nivellement definiert haben.

Nach der die größte Strenge zulässigen Auffassung wird der kürzeste Abstand eines Punktes der physischen Erdoberfläche von dem als geodätische Grundfläche oder Null-Niveaufläche angenommenen und mit dem Meeresspiegel zusammenfallenden Geoide seine Meereshöhe genannt, die der Definition entsprechend in die Lotlinie dieses Punktes fällt. Punkte gleicher Meereshöhen liegen daher in einer Parallelen zur Geoidfläche, aber sie liegen nicht in demselben Niveau, da die Niveauflächen keine Parallelflächen sind.

Der Höhenunterschied zwischen zwei Punkten ist entsprechend dem Begriffe der Meereshöhe definiert als der kürzeste Abstand eines der beiden Punkte von der durch den anderen Punkt geführten Parallelfläche des Geoides. Der kürzeste Abstand eines Punktes von der Niveaufläche eines anderen Punktes wird als seine Niveaudifferenz bezeichnet. Da alle Punkte einer Niveaufläche das gleiche Niveau besitzen, so unterscheiden sich die Punkte einer Niveaufläche von den Punkten einer anderen Niveaufläche um dieselbe Niveaudifferenz.

Während den Höhenunterschieden mehr eine geometrische Bedeutung zukommt, lassen sich die Begriffe des Horizontalen, des Gefälles und der Steigung strenge nur mit den Niveaudifferenzen vereinbaren. Zur Frage, welche Höhenkoordinaten zur Fixierung der Höhenlage beliebiger Punkte geeigneter erscheinen, ob die Höhenunterschiede oder die Niveaudifferenzen, sei vorläufig bemerkt, daß eindeutige Höhenkoordinaten durch ein geometrisches Nivellement allein in aller Strenge überhaupt nicht erhalten werden können. Denn um den Höhenunterschied zwischen zwei Punkten durch Nivellierung allein zu finden, müßte es möglich sein, die Haupttangente der Libelle auf dem zu nivellierenden Wege stets parallel zur Geoidfläche zu erhalten, was jedoch kaum erreichbar ist, da sich ja die Libellentangente stets in die jeweilige Niveaufläche hineinlegt. Bei Ermittlung der Niveaudifferenz aber läßt die Unbestimmtheit des Höhenabstandes zweier nicht paralleler Flächen oder die Abhängigkeit der nivellierten Höhe von dem Profile des eingeschlagenen Weges eine Eindeutigkeit des Resultates gar nicht zu. Im Nachstehenden sei dies deutlicher auseinandergesetzt.

Das Prinzip des geometrischen Nivellierens zwischen zwei Punkten besteht darin, daß mit Hilfe einer Libelle eine horizontale Visur hergestellt und die Vertikalabstände der beiden Punkte von der Visierlinie mittelst vertikal gestellter Nivellierlatten abgelesen wird. Die Differenz der beiden, an den Latten abgelesenen Zielhöhen gibt dann die relative Höhe der beiden Punkte. Reicht zur Bestimmung dieser Höhe, sei es wegen zu großer Erhebung oder zu großer Entfernung, eine einmalige Instrumentenaufstellung nicht hin, so wird man ein zusammengesetztes Nivellement ausführen und dann die Summe aller Einzelergebnisse als resultierende Höhendifferenz betrachten.

Dieser Vorgang ist jedoch nur insoweit zulässig, als bei der geringen Höhen- und Längenausdehnung des Nivellementzuges die Niveauflächen praktisch noch als Parallelflächen angesehen werden können. Denn um den Höhenunterschied zwischen zwei Punkten zu messen, wird man das geometrische Nivellement staffelförmig entlang des Hanges von oben nach unten oder umgekehrt ausführen. Sind die Niveauflächen innerhalb des Nivellementgebietes zu einander parallel oder im Sinne der Praxis als parallel anzusehen, so wird der auf jedem beliebigen Wege stufenweise erhaltene Höhenunterschied sowohl der Erhebung des höheren Punktes über die Niveaufläche des tieferen Punktes, als auch der Erhebung der Niveaufläche des höheren Punktes über dem tieferen Punkte gleich kommen.

Sobald jedoch die Abweichung der Niveauflächen vom Parallelismus in Berücksichtigung zu ziehen sind, wie dies bei Präzisionsnivellements im Dienste der


Gradmessung der Fall ist, steht die Sache nicht mehr so einfach. Um die relative Höhe zweier Punkte A und B zu erhalten, wird man einen geeigneten Weg zwischen diesen beiden Punkten zur Ausführung des geometrischen Nivellements auswählen. Verläuft dieser Weg anfangs sehr steil und nachher ziemlich flach, so wird man ein anderes Resultat erhalten, als bei Einschlagung eines Weges, der in der ersten Hälfte fast horizontal verläuft und erst am Schlusse steil endet. Denn um sogleich die Grenzfälle ins Auge zu fassen, würde man auf dem möglichen Wege AA' B, wobei man zuerst lotrecht um AA' ansteigt und hierauf horizontal von A' nach B fortschreitet, einen Höhenunterschied von der Größe AA' finden. Es wäre aber auch der Weg denkbar, der von A entlang der Niveaufläche bis B' führt und dann von hier nach A senkrecht in die Höhe geht. In diesem Falle würde der Höhenunterschied offenbar den Betrag BB' erlangen. Da nun wegen der Abweichung vom Parallelismus im allgemeinen AA' und BB' nicht gleich sein können, so sieht man, daß ein geometrisches Nivellement auf verschiedenen Wegen ausgeführt, streng genommen stets auch zu verschiedenen Resultaten führen muß, selbst wenn von den Instrumentenfehlern und den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern abgesehen wird.

Um diesen Unbestimmtheiten aus dem Wege zu gehen, wird in der wissenschaftlichen Geodäsie die Potential-Theorie herangezogen, wonach die Niveaudifferenzen durch Potentialdifferenzen gemessen werden. Hiedurch verliert aber das Präzisionsnivellement seinen rein geometrischen Charakter, indem es im Gegensatze zu den technischen oder rein geometrischen Nivellement zu einer geometrisch-physikalischen Operation erhoben wird.

Während nun ein technisches Nivellement Höhenunterschiede von Punkten liefert, werden durch Präzisionsnivellements Niveaudifferenzen erhalten, und zwar durch ein sphäroidisches Nivellement mit Zuhilfenahme theoretischer Erwägungen, durch ein geoidisches Nivellement mittels Heranziehung von Schweremessungen unter Benützung von Pendelbeobachtungen. Um dies in recht klarer Weise einzusehen, ist jedoch die Kenntnis des Potentials, welches eine volle Einsicht in die Wirkungsweise der Schwere gewährt, erforderlich.

### Das Potential.

Seitdem Legendre den Begriff des Potentials, ohne hiefür einen besonderen Namen zu gebrauchen, im Jahre 1789 zum erstenmale in der Mechanik der Himmelskörper mit Erfolg eingeführt hatte, ist das Potential allmählich auch auf weitere Wissensgebiete übergegangen und hat sich überall, wo die Lehre von den Kräften zur Anwendung kam, von großer Nützlichkeit erwiesen. Insbesondere erscheint es dazu berufen, die Untersuchung über die Beziehung der Schwerkraft zur Erdgestalt wesentlich zu erleichtern. Die nun folgenden Ausführungen sind diesem Gegenstande gewidmet. Bevor jedoch in denselben näher eingegangen werden soll, scheint es geboten, einige von hervorragenden Vertretern der wissenschaftlichen Mechanik gegebene Definitionen des Potentials voranzuschicken.

Dr. Wilhelm Schell, Professor der theoretischen Mathematik in Karlsruhe, hat seinen in Otto Luegers Lexikon der gesamten Technik gegebenen Erläuterungen folgende Erklärung an die Spitze gestellt: Das Potential ist die Kräftefunktion der nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernungen wirkenden Attraktions- oder Repulsionskräfte.

Dr. Josef Finger, Professor der reinen Mechanik in Wien, bezeichnet diejenige Funktion als das Potential einer auf einen materiellen Punkt wirkenden Kraft, deren Differentialquotient — genommen nach dem als positiv angenommenen Kurvenelemente jenes Kurventeiles, längs welchem die Kraft wirkt — die in der Richtung des positiven Kurvenelementes wirkende Komponente der Kraft ausdrückt.

Dr. August Ritter, Professor der analytischen Mechanik in Aachen, definiert das Potential in Anwendung auf Gravitationskräfte als diejenige mechanische Arbeit, welche die Anziehungskraft bei dem Übergange eines materiellen Punktes aus unendlich großer Entfernung in die gegebene Lage verrichten würde.

Dr. August Föppl, Professor der technischen Mechanik in München, definiert das Potential an irgend einer Stelle im Raume durch das dem Werte nach beliebig angenommene Potential an einer anderen Stelle, vermindert um den Arbeitsbetrag, der aufgewendet werden muß, um einen materiellen Punkt von der einen Stelle nach der anderen Stelle zu verschieben. Der aufgewendete Arbeitsbetrag wird sohin als Potentialunterschied gekennzeichnet.

Indem wir es auf diese charakteristischen Zitate beruhen lassen, sei nun der Versuch gewagt, das Potential, wie es für die Zwecke der höheren Geodäsie am geeignetsten dargestellt erscheint, in leicht faßlicher und einfacher Weise vorzuführen.

Ist P irgend ein außerhalb oder innerhalb der Erde gelegener Punkt, in welchem die Masseneinheit lagert, dm ein anziehendes Massenelement des Erdkörpers selbst, r dessen Entfernung von dem materiellen Punkte P, k die Beschleunigung, welche die Masseneinheit einer anderen Masseneinheit im Abstande 1 infolge der Gravitation erteilt, so ist die Beschleunigung, welche die Anziehung des ruhenden Massenelementes dm auf die Masseneinheit in P ausübt, dem Newton'schen Gesetze zufolge bestimmt durch den Ausdruck

$$d\gamma_1 = k\frac{dm}{r^2}$$

woraus sich durch die über die gesamte Erdmasse ausgedehnte Integration die Totalbeschleunigung mit

$$\gamma_1 = k\int\frac{dm}{r^2}$$

ergibt, welche auch als die Anziehungskraft der ruhenden Erde auf die Masseneinheit aufgefaßt werden kann. Da man sich die gesamte Erdmasse bei Behandlung dieses und ähnlicher Probleme in dem Erdschwerpunkte vereinigt denken kann, so gehen hier die Entfernungen r in den Abstand von dem Erdschwerpunkte oder den Radiusvektor über.

Bezeichnet u den Abstand des Punktes P von der Rotationsachse der Erde und $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, so ist, wenn die Neigung des Radiusvektors r gegen die Rotationsachse $90^0 - \varphi$ beträgt, $\varphi$ somit die Polhöhe von P bedeutet, $u = r \cos \varphi$, und es ist $\omega^2 u = \omega^2 r \cos \varphi$ die von der Zentrifugalkraft herrührende Beschleunigung; ferner ist

$$\gamma_2 = \omega^2 r \cos^2 \varphi$$

die in entgegengesetzter Richtung der Anziehung wirkende Komponente der Zentrifugalbeschleunigung, sohin stellt die Resultante

$$g = \gamma_1 + \gamma_2$$

die Schwerebeschleunigung der rotierenden Erde oder die auf die Masseneinheit wirkende Schwerkraft dar, wenn unter der letzteren die Mittelkraft aus der Massenanziehung und der durch die Achsendrehung der Erde hervorgerufenen Fliehkraft begriffen wird, wie ja auch das Gewicht eines auf der Erdoberfläche befindlichen Körpers als die Resultierende der Erdanziehung und der Zentrifugalkraft aufgefaßt wird.

Man pflegt nun allgemein das nach der Kraftrichtung genommene Integral der Kraft das «Potential» zu nennen*) und bezeichnet demgemäß die Funktion

$$V = \int \gamma_1 \, dr = k \iint \frac{dm}{r^2} \, dr = k \int \frac{dm}{r}$$

als das Potential der Erdanziehung allein (ohne Berücksichtigung der Rotation) und die Funktion

$$W = \int \gamma_1 \, dr + \int \gamma_2 \, dr$$

oder

$$W = V + \tfrac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi$$

als die Kräftefunktion der Erde oder das Potential der Schwerkraft, d. i. das durch das Zusammenwirken von Anziehung und Schwungkraft erzeugte Potential der rotierenden Erde.

Die praktische Anwendung des Potentials zur Führung strenger Beweise und Erzielung klarer Vorstellungen beruht auf der aus der gegebenen Definition hervorgehenden Eigenschaft, daß es nach irgend einer von P ausgehenden Richtung x partiell differentiert die Komponente der Schwere nach dieser Richtung darstellt. Ist $x = h$ die Richtung der Schwere selbst, so muß der Differentialquotient des Potentials, genommen nach dieser Richtung, die Gesamtgröße der Schwere ergeben.

Differentiert man daher die Funktion W nach der Richtung der Schwerkraft, die mit dem Radiusvektor r zusammenfällt, so erhält man:

*) Green bezeichnet diese Funktion als «Potentialfunktion», Hamilton nennt sie «Kräftefunktion», Gauss gebraucht hiefür kurz die Bezeichnung «Potential».

$$-\frac{dW}{dh}=g,$$

worin dh, als die Änderung in der Länge des Radiusvektors, negativ oder positiv in Rechnung zu stellen ist, je nachdem W zu- oder abnimmt, so daß für einen Punkt der Erdoberfläche dh, als das von der Erdoberfläche aufwärts gerichtete Element der Lotrichtung, einen Höhenunterschied oder die Erhebung über den Meereshorizont bedeutet. Die Gleichung

$$-dW=g.dh$$

besagt daher, daß die Änderung des Potentials, welche bei einer Erhebung um dh eintritt, gleich ist dem Produkte aus der Schwerebeschleunigung g und dem Höhenunterschiede dh. Die Änderung des Potentials bei Erhebung von dem Punkte A mit dem Potentiale $W_A$ bis zu dem Punkte B mit dem Potentiale $W_B$ um die Höhe $AB=H$ ist sohin gegeben durch die Differenz

$$W_B-W_A=-\int_A^B g.dh$$

oder

$$W_A-W_B=\int_A^B g.dh=\Delta W.$$

(Schluß folgt.)

---

# Graphische Bestimmung

## der tachymetrischen Elemente D und H.

Von **A. Adler**, k. k. Professor an der Staatsrealschule im 6. Bezirke Wiens, Privatdozent an der technischen Hochschule.

Die Horizontaldistanz D und die Höhe H eines anvisierten Ortes werden bekanntlich aus den Gleichungen

$$D=CL\cos^2\varphi,$$
$$H=\frac{CL}{2}\sin\varphi$$

gefunden, wobei L die Lattenablesung, $\varphi$ der Vertikalwinkel und C die Konstante des Instrumentes sind; es wurden, wie man weiß, bereits eine große Anzahl von Methoden*) angegeben, D und H aus L und $\varphi$ auf möglichst bequemen Wege zu finden.

Im folgenden soll ein neuer, besonders einfacher Weg angegeben werden, auf welchem man dieses Ziel auch erreicht; ihm folgend, kann man nicht nur D und H graphisch bestimmen, graphische Tafeln anfertigen, sondern auch ein selbsttätiges Instrument konstruieren, welches einfacher zu sein scheint, als die bisher zu diesem Zwecke ausgeführten.*)

---

*) Siehe: Hartner-Doležal: Lehr- und Handbuch der niederen Geodäsie 2. Band, Wien 1905.

ÖSTERREICHISCHE

# Zeitschrift für Vermessungswesen

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
VERFIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III/3 Kegelgasse 29, Parterre, T. 2.
K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.

Erscheint am 1. jeden Monats. Jährlich 24 Nummern in 12 Doppelheften.
Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.

Expedition und Inseratenaufnahme durch die Buchdruckerei J. Wladarz (verm. Haase) Baden bei Wien, Pfarrgasse 3.

Nr. 3—4. Wien, am 1. Februar 1907. V. Jahrgang.

Inhalt: 



## Die Theorie des geoidischen Nivellierens.

Von S. Wellisch, Oberingenieur der Stadt Wien.

(Schluß).

### Die dynamische Korrektionsformel.

Da entlang einer Niveaufläche keine Niveaudifferenzen bestehen und die Beschleunigung in der Nähe der den geodätischen Messungen zugänglichen Punkte der Erdoberfläche unter allen Umständen eine endliche Größe hat, so folgt, daß für alle Punkte einer Niveaufläche die Änderung des Potentials gleich null, das Potential daher durchwegs konstant sein muß. Zwei verschiedene Niveauflächen unterscheiden sich aber untereinander durch die Verschiedenheit des Potentials. Da der Potentialunterschied zweier Niveauflächen durch die Summe der Produkte $g \cdot dh$ ausgedrückt erscheint, die Schwerebeschleunigung $g$ aber wegen der kugelabweichenden Gestalt der sphäroidischen und geoidischen Niveauflächen entlang einer solchen veränderlich ist, so kann im allgemeinen auch $dh$ nicht konstant sein, woraus hervorgeht, daß die sphäroidischen und geoidischen Niveauflächen keine Parallelflächen sind.

Infolge dessen werden die beim geometrischen Nivellieren horizontal gerichteten Visuren in Wirklichkeit keinen Parallelflächen angehören. Werden sie aber demungeachtet bei der Zusammenstellung der Summe aller Gefälle und Steigungen einer in sich geschlossenen Nivellementschleife zu einander parallel vorausgesetzt, so muß sich trotz aller Sorgfalt ein von Null verschiedener Schlußfehler herausstellen, als dessen Ursache der Nichtparallelismus der Niveauflächen oder die durch die Krümmung der Lotlinien hervorgerufene Lotabweichung anzusehen ist. Um diese Lotabweichung in aller Strenge zu ermitteln, wollen wir uns wieder der Potential-Theorie zuwenden.

Bezeichnet man die einer einzelnen Instrumentenaufstellung zukommenden Zielhöhen für den Rück- und Vorblick mit $h_1$ und $h_2$ und die Schwerebeschleunigung am Instrumentenstandorte mit g, so kann wegen der geringen Größe der Zielhöhen im Vergleiche zu den Erddimensionen die Differenz der Potentiale an den beiden Lattenaufstellungsorten durch das Produkt $g\,(h_2 - h_1)$ ausgedrückt werden, so daß, wenn $h_1 - h_2 = dh$ gesetzt wird, die Gleichung besteht:

$$dW = -g \,.\, dh.$$

Für ein zusammengesetztes Nivellement von A bis B ist demnach

$$W_B - W_A = \int_A^B dW = -\int_A^B g \,.\, dh,$$

oder wenn man von den Differentialen zu den Differenzen übergeht:

$$-\Delta W = [g \,.\, \Delta h]_A^B ,$$

worin jetzt das Gaußsche Symbol als Summenzeichen angewendet erscheint.

Dividiert man diese Potentialdifferenz durch einen vorläufig noch willkürlich angenommenen, aber konstanten Mittelwert der Erdbeschleunigung G, so stellt der Ausdruck

$$-\frac{\Delta W}{G} = \frac{[g \,.\, \Delta h]}{G} = H$$

das Äquivalent der auf ein mittleres Niveau reduzierten Niveaudifferenz zwischen den Punkten A und B dar, welche als die «dynamische Niveaudifferenz» oder die «Arbeitshöhe» bezeichnet wird. Zerlegt man den obigen Ausdruck mit Bezug auf die identische Gleichung

$$g = G + (g - G)$$

in die Teile

$$H = [\Delta h] + \frac{1}{G}\Big[(g - G)\,\Delta h\Big],$$

so erkennt man, daß das erste Glied, als die Summe aller unmittelbar beobachteten Zielhöhendifferenzen, den «rohen Höhenunterschied» darstellt, während das zweite Glied die wegen der Lotabweichung bedingte «dynamische Verbesserung» bedeutet.

Bildet das Nivellement eine geschlossene Schleife, so besteht notwendig die Bedingung

$$-\Delta W = [g \,.\, \Delta h] = 0,$$

sohin ist auch

$$[\Delta h] + \frac{1}{G}\Big[(g - G)\,\Delta h\Big] = 0$$

und es stellt der Ausdruck

$$[\triangle h] = -\frac{1}{G}\left[(g - G)\triangle h\right]$$

den »theoretischen Schlußfehler« einer geschlossenen Nivellementschleife dar.

Setzt man in diese Formel für die einzelnen $g_1\ g_2\ g_3 \ldots$ die an Ort und Stelle durch Pendelbeobachtungen erhaltenen, also tatsächlich herrschenden Schwerebeschleunigungen, welche der geoidischen Figur der Niveauflächen entsprechen, so erhält man die an dem technischen Nivellement wegen der wirklich eintretenden Lotabweichungen anzubringenden wahren oder geoidischen Verbesserungen. Führt man jedoch für g die aus den geographischen Positionen der Instrumentenstandpunkte und deren Meereshöhen auf das normale, mathematische Erdsphäroid (Normalsphäroid) bezogenen, theoretisch ableitbaren Beschleunigungen $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3 \ldots$ ein, welche sich nach der von Helmert entwickelten Formel

$$\gamma_{H,\varphi} = g_{0,0}\,(1 + 0{\cdot}005310 \sin^2\varphi)\left(1 - \frac{2H}{R}\right) \text{Meter}$$

berechnen lassen, worin

$\varphi$ die Polhöhe der Instrumentenstation,

H die Meereshöhe derselben,

R der mittlere Erdhalbmesser und

$g_{0,0} = 9{\cdot}7800\,m$ die Schwerkraft am Meeresspiegel und Äquator bedeutet, so liefert die Gleichung für den theoretischen Schlußfehler auch nur die auf das Normalsphäroid bezogenen, theoretischen, normalen oder sphäroidischen Verbesserungen.

Solange nun die Verhältnisse der Schwerkraft als normale angesehen werden können, werden auch die normalen oder späroidischen Verbesserungen zur Tilgung des theoretischen Schlußfehlers vollkommen ausreichen; treten aber in der Nähe des Nivellementzuges lokale Störungen der Schwere durch ungleichmäßige Massenverteilungen, mächtige Gebirgserhebungen und unterirdische Massendefekte auf, wie dies allgemein der Fall sein wird, so werden auch die Lotlinien gestört und abnormal, und es werden die normalen Verbesserungen dann nur als Näherungswerte erscheinen. In dem Unterschiede zwischen der sphäroidischen und geoidischen Verbesserung drückt sich also jener Einfluß der Lotstörung aus, welcher zufolge der Ungleichmäßigkeit der ober- und unterirdischen Massenverteilung auf die unter normalen Umständen vollkommen sphäroidisch gestalteten Niveauflächen ausgeübt wird.

Wie aus der Zusammensetzung der Korrektionsformel erhellt, hängt die Größe der Verbesserung von der Änderung der Schwere längs des nivellierten Weges oder von der Form seines Profiles ab, da der Korrektionsausdruck die Beschleunigung aller Stationen enthält. Die strenge Auffassung dieser Formel würde auch mit jedem Instrumentenwechsel eine Schweremessung fordern. In Anwendung auf praktische Fälle wird man aber bei der Reduktion des geometrischen Nivellements eine Erleichterung und Vereinfachung insofern zulassen dürfen, als wegen der langsamen Änderung der Schwere nicht auf jeder Station, sondern nur an den charakteristischen Niveaubruchstellen des nivellierten Profiles

Schweremessungen angestellt zu werden brauchen. Die entsprechenden Formeln lauten dann, wenn $\Delta \mathfrak{H}$ die Summen der nivellierten Gefälle in den einzelnen Abteilungen des Nivellement-Polygones, $g_m$ die Mittelwerte der wahren Schwerebeschleunigungen innerhalb der Polygonteile, wie sie aus den Schweremessungen durch Pendelbeobachtungen hervorgehen, und $\gamma_m$ die Mittelwerte der normalen, berechneten Beschleunigungen innerhalb derselben Strecken bedeuten:

$$H_w = \frac{1}{G}[g_m \cdot \Delta\mathfrak{H}] = [\Delta\mathfrak{H}] + \frac{1}{G}\left[(g_m - G) \cdot \Delta\mathfrak{H}\right]$$

$$H_n = \frac{1}{\Gamma}[\gamma_m \cdot \Delta\mathfrak{H}] = [\Delta\mathfrak{H}] + \frac{1}{\Gamma}\left[(\gamma_m - \Gamma)\, \Delta\mathfrak{H}\right].$$

Wählt man für $G = \Gamma$ den aus der Gleichung

$$G = g_{0,0}\ (1 + 0{\cdot}005310 \sin^2 45^0) = 9{\cdot}8060$$

für das Meeresniveau unter $45^0$ geographischer Breite hervorgehenden Wert der normalen Erdbeschleunigung, so erhält man für eine geschlossene Schleife die endgiltigen Formeln, und zwar

für die wahre Verbesserung: $\quad v_w = -\frac{1}{G}\left[(g_m - G) \cdot \Delta\mathfrak{H}\right]$

für die normale Verbesserung: $\quad v_n = -\frac{1}{G}\left[(\gamma_m - G) \cdot \Delta\mathfrak{H}\right].$

Wird von der algebraischen Summe aller Zielhöhendifferenzen, d. i. dem «beobachteten Schlußfehler» der «theoretische Schlußfehler» v in Abzug gebracht, so bleibt jener Fehlbetrag übrig, welcher nur mehr von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern herrührend, als das Maß der Genauigkeit anzusehen ist.

## Praktische Anwendung.

Als Beispiel diene das von R. v. Sterneck für die Zwecke der internationalen Erdmessung nivellierte, in das österreichisch-ungarische Präzisionsnivellement einbezogene Polygon von München über die Alpen bis Mantua.

Die Tabelle I enthält die in dieses Nivellementpolygon aufgenommenen Stationen, wobei nördlich von München und südlich von Mantua noch je eine in dem Niveau des Meeresspiegels angenommene, fingierte Station behufs Vervollständigung einer im Meeresniveau zurückkehrenden Nivellementschleife aufgeführt erscheinen. (v. Sterneck: «Die Schwerkraft in den Alpen und Bestimmung ihres Wertes für Wien», in den «Mitteilungen des k. u. k. milit.-geogr. Institutes in Wien», XI. Band 1891, Seite 207). Die zweite Spalte enthält die auf ganze Meter abgerundeten Höhen der Stationen $\mathfrak{H}$ nach dem Nivellement, in der dritten Spalte sind die normalen nach der Helmert'schen Formel mit Hilfe der geodätisch bestimmten Breiten $\varphi$ und der rohen Höhen $\mathfrak{H}$ berechneten Schwerebeschleunigungen $\gamma$ und in der vierten Spalte die durch Pendelbeobachtungen gemessenen Beschleunigungen g ausgewiesen.

Die Tabelle II bringt zunächst die Höhenunterschiede $\Delta \mathfrak{H}$ je zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Stationen, dann die Mittelwerte $\gamma_m$ und $g_m$, welche den Höhenunterschieden $\Delta \mathfrak{H}$ entsprechen, und schließlich die Produkte $(\gamma_m - 9{\cdot}8060)\, \Delta \mathfrak{H}$ und $(g_m - 9{\cdot}8060)\, \Delta \mathfrak{H}$ mit Berücksichtigung der Vorzeichen.

# Tabelle I.

| Post-Nr. | Name der Station | Höhe der Station $\mathfrak{H}$ | Normale Schwere $\gamma$ | Beobachtete Schwere $g$ |
|---|---|---|---|---|
| | Fingierte Station A | 0 | 9·80886 | 9·80886 |
| 1 | München | 529 | 718 | 735 |
| 2 | Grafing | 543 | 705 | 718 |
| 3 | Ostermünchen | 503 | 708 | 677 |
| 4 | Rosenheim | 449 | 731 | 677 |
| 5 | Fischbach | 469 | 697 | 691 |
| 6 | Kufstein | 484 | 681 | 643 |
| 7 | Wörgl | 508 | 665 | 605 |
| 8 | Jenbach | 532 | 649 | 585 |
| 9 | Fritzens | 558 | 633 | 606 |
| 10 | Innsbruck | 584 | 622 | 543 |
| 11 | Patsch | 785 | 553 | 514 |
| 12 | Matrei | 995 | 483 | 459 |
| 13 | Steinach | 1050 | 463 | 434 |
| 14 | Gries | 1257 | 395 | 421 |
| 15 | Brenner | 1372 | 355 | 369 |
| 16 | Schelleberg | 1243 | 390 | 397 |
| 17 | Gossensaß | 1067 | 443 | 420 |
| 18 | Sterzing | 950 | 476 | 449 |
| 19 | Freienfeld | 937 | 478 | 479 |
| 20 | Graßstein | 846 | 501 | 450 |
| 21 | Franzensfeste | 749 | 528 | 462 |
| 22 | Brixen | 573 | 575 | 530 |
| 23 | Klausen | 525 | 583 | 555 |
| 24 | Waidbruck | 473 | 596 | 555 |
| 25 | Atzwang | 376 | 620 | 550 |
| 26 | Blumau | 318 | 634 | 574 |
| 27 | Bozen | 268 | 650 | 549 |
| 28 | Branzoll | 230 | 653 | 581 |
| 29 | Neumarkt | 219 | 648 | 583 |
| 30 | Salurn | 214 | 644 | 558 |
| 31 | S. Michele | 212 | 641 | 563 |
| 32 | Lavis | 208 | 637 | 601 |
| 33 | Trient | 195 | 634 | 621 |
| 34 | Materello | 188 | 630 | 627 |
| 35 | Calliano | 185 | 624 | 640 |
| 36 | Mori | 176 | 621 | 621 |
| 37 | Ala | 150 | 620 | 687 |
| 38 | Avio | 139 | 620 | 688 |
| 39 | Peri | 126 | 617 | 692 |
| 40 | Ceraino | 108 | 616 | 701 |
| 41 | Pescantia | 78 | 617 | 651 |
| 42 | Dossobuono | 66 | 612 | 663 |
| 43 | Mozzecane | 47 | 609 | 655 |
| 44 | Mantua | 21 | 603 | 598 |
| | Fingierte Station B | 0 | 9·80579 | 9·80579 |

## Tabelle II.

| $\Delta\mathfrak{H}$ | $\gamma_m$ | $g_m$ | $(\gamma_m - G)\,\Delta\mathfrak{H}$ | $(g_m - G)\,\Delta\mathfrak{H}$ |
|---|---|---|---|---|
| + 529 | 9·80802 | 9·80810 | + 1·0686 | + 1·1109 |
| + 14 | 712 | 727 | + 0·0157 | + 0·0178 |
| − 40 | 707 | 698 | − 428 | − 392 |
| − 54 | 720 | 677 | − 648 | − 416 |
| + 20 | 714 | 684 | + 228 | + 168 |
| + 15 | 689 | 667 | + 134 | + 101 |
| + 24 | 673 | 624 | + 175 | + 58 |
| + 24 | 657 | 595 | + 137 | − 12 |
| + 26 | 641 | 596 | + 107 | − 10 |
| + 26 | 628 | 575 | + 73 | − 65 |
| + 201 | 588 | 529 | − 241 | − 1427 |
| + 210 | 518 | 487 | − 1722 | − 2373 |
| + 55 | 473 | 447 | − 699 | − 842 |
| + 207 | 429 | 428 | − 3540 | − 3560 |
| + 115 | 375 | 395 | − 2588 | − 2358 |
| − 129 | 373 | 383 | + 2928 | + 2799 |
| − 176 | 417 | 409 | + 3221 | + 3362 |
| − 117 | 560 | 435 | + 1638 | + 1931 |
| − 13 | 477 | 464 | + 160 | + 177 |
| − 91 | 490 | 465 | + 1001 | + 1229 |
| − 97 | 515 | 456 | + 825 | + 1397 |
| − 176 | 552 | 496 | + 845 | + 1830 |
| − 48 | 579 | 543 | + 101 | + 274 |
| − 52 | 590 | 555 | + 52 | + 234 |
| − 97 | 608 | 553 | − 78 | + 456 |
| − 58 | 627 | 562 | − 157 | + 220 |
| − 50 | 642 | 562 | − 210 | + 190 |
| − 38 | 652 | 565 | − 198 | + 133 |
| − 11 | 651 | 582 | − 56 | + 20 |
| − 5 | 646 | 571 | − 23 | + 15 |
| − 2 | 643 | 561 | − 9 | + 8 |
| − 4 | 639 | 582 | − 16 | + 7 |
| − 13 | 636 | 611 | − 47 | − 14 |
| − 7 | 632 | 624 | − 22 | − 17 |
| − 3 | 627 | 634 | − 8 | − 10 |
| − 9 | 623 | 631 | − 21 | − 28 |
| − 26 | 621 | 654 | − 55 | − 140 |
| − 11 | 620 | 688 | − 22 | − 97 |
| − 13 | 619 | 690 | − 25 | − 117 |
| − 18 | 617 | 697 | − 31 | − 175 |
| − 30 | 617 | 676 | − 51 | − 228 |
| − 12 | 615 | 657 | − 18 | − 68 |
| − 19 | 611 | 659 | − 21 | − 112 |
| − 26 | 606 | 627 | − 16 | − 70 |
| − 21 | 9·80591 | 9·80589 | + 0·0019 | + 23 |

Die Summierung der beiden letzten Reihen ergibt:

$$[(\gamma_m - G)\,\Delta\mathfrak{H}] = +\,1{\cdot}1537\ \text{m}$$
$$[(g_m - G)\,\Delta\mathfrak{H}] = +\,1{\cdot}3388\ \text{m},$$

woraus durch Division mit $G = 9{\cdot}8060$ m und Zeichenwechsel

die sphäroidische Verbesserung mit $v_s = -\,0{\cdot}1176$ m

die geoidische Verbesserung mit $v_g = -\,0{\cdot}1365$ m,

als der von der Veränderung der Schwerkraft längs des die Tiroler Alpen durchquerenden Nivellements hervorgerufene Einfluß resultiert.

Der Einfluß der Schwerestörung auf das Nivellement infolge des Vorhandenseins der Alpen ist sohin

$$-\,0{\cdot}1365 + 0{\cdot}1176 = -\,0{\cdot}0189\ \text{m}$$

oder $-\,18{\cdot}9$ mm, d. i. nahezu übereinstimmend mit dem von Sterneck a. a. O. erhaltenen Ergebnisse.

Februar 1906.

* * *

Die im Jännerhefte stehen gebliebenen Druckfehler, u. zw.:

S. 3, Z. 10 v. o. Gleichgewichtszustand statt Gleichheitszustand
» 3, » 13 » » fortgeführt statt fortführt
» 5, » 11 » » B statt A
» 5, » 22 » » dem statt den
» 6, » 8 » » Mechanik statt Mathematik

bitte ich zu verbessern.

# Die Patent-Kippregel Láska—Rost.

Von Prof. W. Láska.

Auf demselben Prinzip, auf welchem meine Tachymeterkonstruktion beruht, ist auch die Patent-Kippregel basiert, welche überdies die Zeichnung in jedem beliebigen Maßstab von 1 : 1000 an direkt ohne jede Rechnung, und zwar nicht nur im ebenen, sondern in beliebig koupierten Terrain liefert. Zu diesem Zwecke ist die Kippdistanz veränderlich gemacht.

Das Prinzip der Bestimmung der Horizontaldistanz ist das denkbar einfachste.

Ist nämlich D die Horizontaldistanz (siehe Fig. 1) sowie l der Lattenabschnitt, welcher zu den zwei durch die Höhenwinkel $\alpha$ und $\beta$ bestimmten Lagen der Zielaxe gehört, so hat man augenscheinlich die Gleichung

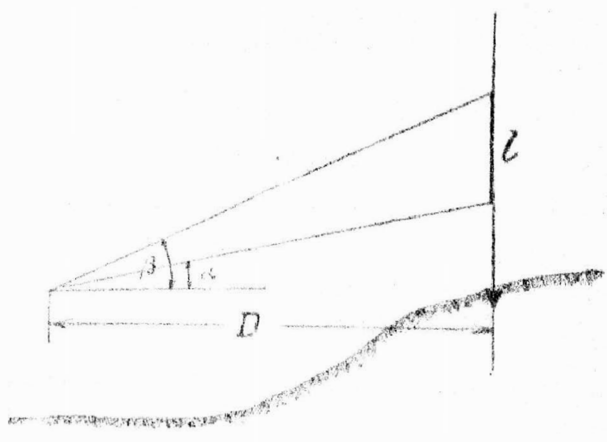


*Fig. 1*

$$D = \frac{l}{\tan \beta - \tan \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$