# Zur Dreiecksausgleichung nach der Methode der kleinsten Produkte

A. Härpfer [1]

[1] *Prag*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **4** (23–24), S. 368–369

1906




```
@ARTICLE{Haerpfer_VGI_190631,
Title = {Zur Dreiecksausgleichung nach der Methode der kleinsten Produkte},
Author = {H{\"a}rpfer, A.},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {368--369},
Number = {23--24},
Year = {1906},
Volume = {4}
}
```

# Zur Dreiecksausgleichung
## nach der Methode der kleinsten Produkte.

Von Dr. techn. **A. Haerpfer** (Prag).

Die Frage nach einer gerechten Aufteilung des Dreiecksschlußfehlers hat bekanntlich durch Wellisch's verdienstvolle Untersuchungen im zweiten Jahrgange dieser Zeitschrift, S. 203, insoferne eine befriedigende Lösung gefunden, als die Größe der zu berechnenden Winkelverbesserung durch die a.a.O. entwickelte Formel in Abhängigkeit von der jeweiligen Form des Dreieckes gebracht wird. Gegenüber der bisher ausschließlich gebrauchten starren Regel der Drittelung, welche die Dreiecke uniform behandelt, bedeutet Wellisch's Formel vermöge der ihr innewohnenden, durch die Formenmannigfaltigkeit der Dreiecke notwendig geforderten Beweglichkeit einen namhaften Fortschritt. Gleichwohl wird der Praktiker — durch den bis nun geübten, einfachen Vorgang verwöhnt — selbst die flüchtige Vorausberechnung der Seitenlängen als lästige Mehrarbeit empfinden. Diese letztere, die sich nun einmal nicht umgehen läßt, auf ein Minimum zu bringen, gelingt durch eine übrigens naheliegende, einfache Umformung der von Wellisch a.a.O und in Zeitschr. f. V. 1906, S. 295, angebenen Ausdrücke.

Bezeichnen wir mit $k$ das Korrelat,
mit $a, b, c$ die Dreiecksseiten,
mit $\alpha, \beta, \gamma$ die korrespondierenden Dreieckswinkel,
mit $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ deren Verbesserungen und
mit $l$ den Schlußfehler des Dreieckes,

so bestehen die Beziehungen:

$$k = \frac{l}{2} \frac{abc}{ab + ac + bc}$$

$$v_\alpha = k \frac{b + c}{bc} = \frac{l}{2} \frac{a(b + c)}{ab + ac + bc} = \frac{l}{2} \frac{1}{1 + \frac{bc}{a(b + c)}}$$

$$v_\beta = k \frac{c + a}{ca} = \frac{l}{2} \frac{b(c + a)}{ab + ac + bc} = \frac{l}{2} \frac{1}{1 + \frac{ca}{b(c + a)}}$$

$$v_\gamma = k \frac{a + b}{ab} = \frac{l}{2} \frac{c(a + b)}{ab + ac + bc} = \frac{l}{2} \frac{1}{1 + \frac{ab}{c(a + b)}}$$

Setzt man in dem Ausdrucke für $v_\alpha$

$$b = a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \text{ und } c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha},$$

so folgt nach einfacher Reduktion:

$$v_\alpha = \frac{l}{2} \frac{1}{1 + \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha (\sin \beta + \sin \gamma)}} = \frac{\sin \alpha (\sin \beta + \sin \gamma)}{2\{\sin \alpha (\sin \beta + \sin \gamma) + \sin \beta \sin \gamma\}} l$$

Man kann dem Nenner zweckmäßig die Form geben:

$$2\{\sin\alpha\,(\sin\beta+\sin\gamma)+\sin\beta\sin\gamma\}=\sin\alpha\,(\sin\beta+\sin\gamma)+$$
$$+\sin\beta\,(\sin\gamma+\sin\alpha)+$$
$$+\sin\gamma\,(\sin\alpha+\sin\beta)$$

Bezeichnen wir ihn kurz mit N und behandeln die Werte von $v_\beta$ und $v_\gamma$ analog, so entstehen die Schlußformeln:

$$v_\alpha=\frac{\sin\alpha\,(\sin\beta+\sin\gamma)}{N}\,1$$

$$v_\beta=\frac{\sin\beta\,(\sin\gamma+\sin\alpha)}{N}\,1$$

$$v_\gamma=\frac{\sin\gamma\,(\sin\alpha+\sin\beta)}{N}\,1$$

Die Kenntnis der Dreieckswinkel und ihres Widerspruches genügt daher ohne jede weitere Vorbereitung zur Berechnung ihrer Verbesserungen. Wie die folgenden Beispiele ausführlich zeigen, werden den Tafeln der natürlichen goniometrischen Funktionen die den auf Zehner der Minuten abgerundeten Winkelwerten entsprechenden, numerischen Werte der Sinus (auf drei Dezimalstellen genau) entnommen. Das Rechnungsschema ist im übrigen analog jenem von Wellisch in Z. f. V. 1906.

I. Beispiel (s. «Österr. Z. f. V.» 1904, S. 203):

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha=73^0\ 10'$ | $\sin\alpha=0{\cdot}957$ | $\sin\alpha\,(\sin\beta+\sin\gamma)=$ | $1{\cdot}14$ |
| $\beta=95^0\ 20'$ | $\sin\beta=0{\cdot}996$ | $\sin\beta\,(\sin\gamma+\sin\alpha)=$ | $1{\cdot}15$ |
| $\gamma=11^0\ 30'$ | $\sin\gamma=0{\cdot}199$ | $\sin\gamma\,(\sin\alpha+\sin\beta)=$ | $0{\cdot}38$ |
| $1=30''$ | | | $30:2{\cdot}67=11{\cdot}24$ |

$$v_\alpha=1{\cdot}14\times11{\cdot}24=12{\cdot}81$$
$$v_\beta=1{\cdot}15\times11{\cdot}24=12{\cdot}92$$
$$v_\gamma=0{\cdot}38\times11{\cdot}24=\phantom{0}4{\cdot}27$$
$$30{\cdot}00$$

II. Beispiel (s. Z. f. V. 1906, S. 295):

$$\alpha=50^0\ 20',\quad \beta=95^0\ 30',\quad \gamma=34^0\ 10',\quad 1=10{\cdot}0''$$

| | | |
|---|---|---|
| $\sin\alpha=0{\cdot}770$ | $\sin\alpha\,(\sin\beta+\sin\gamma)=1{\cdot}20$ | $v_\alpha=1{\cdot}20\times2{\cdot}84=3{\cdot}41$ |
| $\sin\beta=0{\cdot}995$ | $\sin\beta\,(\sin\gamma+\sin\alpha)=1{\cdot}33$ | $v_\beta=1{\cdot}33\times2{\cdot}84=3{\cdot}77$ |
| $\sin\gamma=0{\cdot}562$ | $\sin\gamma\,(\sin\alpha+\sin\beta)=0{\cdot}99$ | $v_\gamma=0{\cdot}99\times2{\cdot}84=2{\cdot}82$ |
| | $10:3{\cdot}52=2{\cdot}84$ | $10{\cdot}00$ |

---

# Die älteste Katastral-Verordnung über Teilungspläne.

Die Vereinsbibliothek gelangte vor einiger Zeit in den Besitz dieser alten Verordnung, welche der Herr Obergeometer Friedrich Goethe, gegenwärtig in Melk, für unsere Sammlungen freundlichst gespendet hat. Wir lassen diese interessante Urkunde, in der wohl zum erstenmale die Beibringung von Teilungsplänen bei Grundzerstückelungen erwähnt wird, in verkleinerter Druckkopie hier einschalten und fühlen uns dem Drucker der Zeitschrift Herrn Johann Wladarz