Paper-ID: VGI_190627

Mathematische Kleinigkeiten

Karl Fuchs [1]

[1] *Preßburg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **4** (17–18), S. 272–275

1906

BibTeX:

```
@ARTICLE{Fuchs_VGI_190627,
Title = {Mathematische Kleinigkeiten},
Author = {Fuchs, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {272--275},
Number = {17--18},
Year = {1906},
Volume = {4}
}
```

Mathematische Kleinigkeiten.

Von Professor **Karl Fuchs** (Preßburg).

I.

Die logarithmischen Formeln der Trigonometrie kann man auf sehr einheitliche und übersichtliche Art aus dem Sinussatz ableiten. Zunächst stellen wir den Apparat zusammen, mit dem wir arbeiten werden.

Wir werden folgenden bekannten Satz anwenden:

$$q = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

d. h. wenn zwei Brüche a_1/b_1 und a_2/b_2 denselben Wert q haben, dann erhält man neue Brüche von demselben Wert q, wenn man sowohl die Zähler als auch die Nenner addiert oder subtrahiert.

Sodann werden wir die folgenden geometrischen Gleichungen benutzen, von denen die ersten drei allgemein, die letzten aber speziell für das ebene Dreieck $(\alpha + \beta + \gamma = 2\,R)$ giltig sind. Wir bezeichnen dabei die halben Winkel $\alpha\,\beta\,\gamma$ mit $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$:

$$\sin\alpha = 2\sin\alpha'\cos\alpha' \quad \ldots \quad 2)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\alpha' + \beta')\cos(\alpha' - \beta') \quad \ldots \quad 3)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos(\alpha' + \beta')\sin(\alpha' - \beta') \quad \ldots \quad 4)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\alpha'\cos\beta'\cos\gamma' \quad \ldots \quad 5)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\alpha'\sin\beta'\cos\gamma' \quad \ldots \quad 6)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma \quad \ldots \quad 7)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma \quad \ldots \quad 8)$$

$$\sin(\alpha' + \beta') = \cos\gamma' \quad \ldots \quad 9)$$

$$\cos(\alpha' + \beta') = \sin\gamma' \quad \ldots \quad 10)$$

Erste Stufe.

Den Sinussatz können wir so schreiben, wenn wir den Radius des um das Dreieck geschriebenen Kreises mit ς bezeichnen:

$$2\varsigma = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \ldots \ldots \quad 11)$$

Unter Anwendung von 2) finden wir daraus die folgenden Einzelgleichungen, die wir zu Substitutionen brauchen werden:

$$a = 2\varsigma\sin\alpha \quad \text{oder:} \quad a = 4\varsigma\sin\alpha'\cos\alpha' \quad \ldots \quad 12)$$

$$b = 2\varsigma\sin\beta \qquad\qquad b = 4\varsigma\sin\beta'\cos\beta' \quad \ldots \quad 13)$$

$$c = 2\varsigma\sin\gamma \qquad\qquad c = 4\varsigma\sin\gamma'\cos\gamma' \quad \ldots \quad 14)$$

Zweite Stufe.

Unter Anwendung der Formel 1) gewinnen wir aus dem Sinussatz 11) die folgenden Gleichungen:

$$2\varsigma = \frac{a + b}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{a - b}{\sin\alpha - \sin\beta} \quad \ldots \ldots \quad 15)$$

Unter Anwendung von 3) und 4) werden daraus die folgenden Einzelgleichungen:

$$a + b = 4\varsigma\sin(\alpha' + \beta')\cos(\alpha' - \beta') \quad \ldots \quad 16)$$

$$a - b = 4\varsigma\cos(\alpha' + \beta')\sin(\alpha' - \beta') \quad \ldots \quad 17)$$

Unter Anwendung von 9) und 10) wird daraus:

$$a + b = 4\varsigma \cos\gamma' \cos(\alpha' - \beta') \quad \ldots \quad 18)$$

$$a - b = 4\varsigma \sin\gamma' \sin(\alpha' - \beta') \quad \ldots \quad 19)$$

Durch Dividieren geben diese beiden Gleichungen den Tangentensatz:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha' + \beta')}{\operatorname{tg}(\alpha' - \beta')} \quad \ldots \quad 20)$$

Wenn wir aber 18) und 19) durch 14) dividieren, finden wir die Mollweidischen Gleichungen:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos(\alpha' - \beta')}{\sin\gamma'} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin(\alpha' - \beta')}{\cos\gamma'} \quad \ldots \quad 21)$$

Dritte Stufe.

Aus dem Sinussatze 11) gewinnen wir unter Anwendung von 1) die folgenden Gleichheiten:

$$2\varsigma = \frac{a+b+c}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \quad \ldots \quad 22)$$

$$= \frac{-a+b+c}{-\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{a-b+c}{\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{a+b-c}{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma}$$

Der Kürze wegen führen wir folgende Zeichen ein:

$$s_0 = a + b + c$$

$$s_1 = -a + b + c \qquad s_2 = a - b + c \qquad s_3 = a + b - c$$

Unter Anwendung von 5) und 6) gibt 22) dann folgende Einzelgleichungen:

$$s_0 = 8\varsigma \cos\alpha' \cos\beta' \cos\gamma' \quad \ldots \quad 23)$$

$$s_1 = 8\varsigma \cos\alpha' \sin\beta' \sin\gamma' \quad \ldots \quad 24)$$

$$s_2 = 8\varsigma \sin\alpha' \cos\beta' \sin\gamma' \quad \ldots \quad 25)$$

$$s_3 = 8\varsigma \sin\alpha' \sin\beta' \cos\gamma' \quad \ldots \quad 26)$$

Aus dieser Gruppe von Gleichungen können wir sowohl durch Divisionen als auch durch Multiplikationen eine Menge Formeln ableiten; z. B.

$$\frac{s_1}{s_0} = \operatorname{tg}\beta' \operatorname{tg}\gamma' \qquad \frac{s_2}{s_3} = \frac{\operatorname{tg}\gamma'}{\operatorname{tg}\beta'} \quad \ldots \quad 27)$$

$$\frac{s_2}{s_0} = \operatorname{tg}\gamma' \operatorname{tg}\alpha' \qquad \frac{s_3}{s_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\gamma'} \quad \ldots \quad 28)$$

$$\frac{s_3}{s_0} = \operatorname{tg}\alpha' \operatorname{tg}\beta' \qquad \frac{s_1}{s_2} = \frac{\operatorname{tg}\beta'}{\operatorname{tg}\alpha'} \quad \ldots \quad 29)$$

Durch paarweise Multiplikation geben diese Gleichungen die Formeln:

$$\frac{s_1\, s_2}{s_3\, s_0} = \operatorname{tg}^2\gamma' \qquad \frac{s_2\, s_3}{s_1\, s_0} = \operatorname{tg}^2\alpha' \qquad \frac{s_3\, s_1}{s_2\, s_0} = \operatorname{tg}^2\beta' \quad \ldots \quad 30)$$

Wenn wir die Gleichungen 23) . . . paarweise miteinander multiplizieren, und die langen Produkte durch Anwendung der Gleichungen 12) 13) 14) vereinfachen, dann finden wir:

$$s_0\, s_1 = 4\,b\,c \cos^2\alpha' \qquad s_1\, s_2 = 4\,a\,b \sin^2\gamma'$$

$$s_0\, s_2 = 4\,c\,a \cos^2\beta' \qquad s_2\, s_3 = 4\,b\,c \sin^2\alpha' \quad \ldots \quad 31)$$

$$s_0\, s_3 = 4\,a\,b \cos^2\gamma' \qquad s_3\, s_1 = 4\,c\,a \sin^2\beta'$$

Das sind die bekannten und gebräuchlichen Formeln.

Wenn man alle vier Gleichungen 23) . . . miteinander multipliziert, etwa indem man die dritte und vierte Gleichung 32) miteinander multipliziert, dann findet man:

$$s_0\, s_1\, s_2\, s_3 = 4^2\, a^2\, b^2 \sin^2\gamma' \cos^2\gamma'$$

oder:

$$\sqrt{s_0\, s_1\, s_2\, s_3} = 2\,a\,b \sin\gamma = 4f$$
$$= 2\,b\,c \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad 32)$$
$$= 2\,c\,a \sin\beta$$

Wir können auch die Gleichungen 23) ... mit 12) 13) 14) dividieren und finden wir dann beispielsweise:

$$\frac{s_1}{a} = \frac{2\sin\beta\ \sin\gamma'}{\sin\alpha'} \qquad \frac{s_0}{a} = \frac{2\cos\beta\ \cos\gamma'}{\sin\alpha'}$$
$$\frac{s_2}{b} = \frac{2\sin\gamma\ \sin\alpha'}{\sin\beta'} \qquad \frac{s_0}{b} = \frac{2\cos\gamma'\ \cos\alpha}{\sin\beta} \quad \ldots\ldots \quad 33)$$
$$\frac{s_3}{c} = \frac{2\sin\alpha\ \sin\beta}{\sin\gamma} \qquad \frac{s_0}{c} = \frac{2\cos\alpha\ \cos\beta}{\sin\gamma'}$$

Wenn wir die Gleichungen der ersten Kolumne paarweise miteinander multiplizieren, finden wir schon bekannte Formeln:

$$\frac{s_1\, s_2}{a\, b} = 4\sin^2\gamma' \qquad \frac{s_2\, s_3}{b\, c} = 4\sin^2\alpha' \qquad \frac{s_3\, s_1}{c\, a} = 4\sin^2\beta' \quad \ldots \quad 34)$$

So kann man noch mancherlei F. rmeln gewinnen. Ein Beispiel möge genügen. Wir können 11) so schreiben, indem wir erweitern:

$$2\varsigma = \frac{a\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta} = \frac{b\cos\alpha}{\cos\alpha\ \sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \ldots\ldots \quad 35)$$

Aus den ersten zwei Brüchen aber finden wir auch durch Addition:

$$2\varsigma = \frac{a\cos\beta + b\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\cos\beta + b\cos\alpha}{\sin\gamma} \quad \ldots\ldots \quad 36)$$

Aus 36) in 37) folgt also:

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

Mit dieser Gleichung ist aber bekanntlich auch der Carnot'sche Satz gegeben.

II.

Bis in die jüngste Zeit habe ich junge Techniker klagen hören, die Formel der Tangentialebene wäre ihnen nicht klar. Vielleicht ist die folgende Ableitung einleuchtend. Es sei die Gleichung irgend einer Fläche gegeben:

$$F\,(x\,y\,z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Ein Raumpunkt p_0 von den Koordinaten $x_0\, y_0\, z_0$ soll dieser Fläche angehören, d. h. wenn wir in F die Werte $x_0\, y_0\, z_0$ einsetzen, soll die Funktion F identisch Null sein:

$$F\,(x_0\, y_0\, z_0) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Irgendein anderer Raumpunkt p von den Koordinaten $x\,y\,z$ wird im allgemeinen nicht der Fläche F angehören. Er hat in Bezug auf p_0 als Ursprung die Koordinaten:

$$\triangle x = x - x_0 \qquad \triangle y = y - y_0 \qquad \triangle z = z - z \quad \ldots \quad 3)$$

wo $\triangle x\ \triangle y\ \triangle z$ irgendwelche endliche Größen sind. Wenn wir aber annehmen, daß p sehr nahe zu p_0 liegt, dann sind die Koordinatendifferenzen sehr klein, und man pflegt sie so zu bezeichnen:

$$dx = x - x_0 \qquad dy = y - y_0 \qquad dz = z - z_0 \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

Hier sind also dx, dy, dz die auf p_0 als Ursprung bezogenen Koordinaten irgend eines Raumpunktes p, der sehr nahe zu p_0 liegt.

Wenn wir wollen, daß der Punkt p ebenfalls in der Fläche F liege, dann müssen seine Koordinaten ebenfalls die Funktion 1) identisch gleich Null machen:

$$F(x_0 + dx, \quad y_0 + dy, \quad z_0 + dz) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Diesen Ausdruck 5) können wir aber immer so entwickeln, daß er unter Vernachlässigung höherer Glieder die Form annimmt:

$$F(x_0\, y_0\, z_0) + F_x'(x_0\, y_0\, z_0)\, dx + F_y'(x_0\, y_0\, z_0)\, dy + F_z'(x_0\, y_0\, z_0)\, dz = 0 \qquad 6)$$

Hier ist das erste Glied laut 2) jedenfalls identisch Null. Die drei abgeleiteten Funktionen aber haben irgendwelche bestimmte numerische Werte, die von den numerischen Werten $x_0\, y_0\, z_0$ abhängen, und die wir mit $f_x\, f_y\, f_z$ bezeichnen wollen. Da das erste Glied überflüssig ist, bleibt nur der Ausdruck übrig:

$$f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

wo $f_x\, f_y\, f_z$ gewisse konstante Zahlen sind, während dx, dy, dz irgendwelche sehr kleine Größen sind, die nur an die Bedingung 7) gebunden sind. Jeder Raumpunkt, dessen auf p_0 bezogene Koordinaten $dx\, dy\, dz$ diese Bedingung 7) erfüllen, ist ein Punkt der Fläche F. Nun ist 7) aber offenbar die Gleichung einer Ebene, die durch den Koordinatenursprung p_0 geht; die Variablen dieser Ebenengleichung sind dx, dy, dz; ihre Konstanten sind f_x, f_y, f_z und ihre Stellwinkel $\alpha\, \beta\, \gamma$ sind bestimmt durch:

$$\cos\alpha = \frac{f_x}{f_0} \quad \cos\beta = \frac{f_y}{f_0} \quad \cos\gamma = \frac{f_z}{f_0} \qquad f_0^2 = f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Diese Ebene ist **sehr klein**, da die Gleichung 7) nur für sehr kleine Koordinaten $dx\, dy\, dz$ abgeleitet ist; jeder Punkt dieser Ebene ist auch ein Punkt der Fläche F, und in der Mitte dieser kleinen Ebene liegt der Punkt p_0. Diese Ebene ist also nichts anderes, als das um p_0 herumgelegene Tangentialelement der Fläche F. Wir können die Fläche auch wachsen lassen und den Koordinaten endliche Werte zuschreiben, so daß 7) dann lautet:

$$f_x \,.\, x' + f_y \,.\, y' + f_z \,.\, z' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

Die Ebene ändert dadurch ihre Lage nicht, nur gehören ihre von p_0 entfernteren Punkte nicht mehr der Fläche F an. Die Gleichung 9) ist dann die Gleichung der Tangentialebene ε der Fläche F im Punkte p_0, und $x'\, y'\, z'$ sind die auf den Punkt p_0 bezogenen Koordinaten irgendwelchen Ebenenpunktes. Wenn wir die Koordinaten der Ebene ε auf den Ursprung 0 der Fläche 1) umschreiben wollen, dann müssen wir setzen:

$$x = x_0 + x' \qquad y = y_0 + y' \qquad z = z_0 + z'$$

und so ergibt sich für die Tangentialebene der Fläche F im Punkte p_0 die auf den Ursprung 0 bezogene Gleichung:

$$f_x \,.\, (x - x_0) + f_y \,.\, (y - y_0) + f_z \,.\, (z - z_0) = 0$$

Die Stellwinkel dieser Ebene aber sind die alten; sie sind durch 8) gegeben.

Diese Ableitung ist in erster Linie darum klar, weil darin kein Wort von Differentialquotienten vorkommt. Den Anfängern würde das Studium der Mathematik außerordentlich erleichtert, wenn man es nach Möglichkeit vermiede, von Differentialquotienten zu sprechen; der Kopf des Anfängers hat reichlich genug zu tun, sich in den Differentialen zurecht zu finden.