Paper-ID: VGI_190626

Differentialgeometrische Konstruktionen beim Rückwärtseinschneiden

W. Láska [1]

[1] *o. ö. Professor an der k. k. techn. Hochschnle in Lemberg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **4** (17–18), S. 267–271

1906

BibTEX:

```
@ARTICLE{Laska_VGI_190626,
Title = {Differentialgeometrische Konstruktionen beim R{\"u}ckw{\"a}
   rtseinschneiden},
Author = {L{\'a}ska, W.},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {267--271},
Number = {17--18},
Year = {1906},
Volume = {4}
}
```

Differential-geometrische Konstruktionen
beim Rückwärtseinschneiden.

Von Prof. **W. Láska.**

Im Aufsatze des 5—6. Heftes dieser Zeitschrift blieb der Fall

$$d\alpha = d\beta = o$$

unerledigt. Hier wollen wir die Verschiebung eines Pothenot'schen Punktes untersuchen, welche von den Variationen des gegebenen Dreieckes ABC mit den Seiten $a = AB$, $b = BC$ und dem Winkel $\gamma = \sphericalangle ABC$ (gegen den Punkt hin) abhängt.

Es handelt sich also um geometrische Konstruktionen von

$$\frac{\partial P}{\partial a}, \quad \frac{\partial P}{\partial b}, \quad \frac{\partial P}{\partial \gamma}.$$

Dabei soll die Winkelvariation $d\gamma$ getrennt von den Seitenvariationen da, db in Betracht gezogen werden. Eine solche Trennung ist, wie bekannt, immer möglich, sobald nur die ersten Potenzen der Variationen zur Geltung kommen, wie dieses bei wirklichen Anwendungen wohl immer der Fall sein wird.

Werden statt der Dimensionsänderungen Koordinatenänderungen gewünscht, so erhält man diese in einfachster Weise aus der Differentiation der Gleichungen

$$x = l \cos A$$
$$y = l \sin A$$

welche liefert

$$dx = dl \cos A - l \sin A \, dA$$
$$dy = dl \sin A + l \cos A \, dA$$

oder durch Umkehrung

$$l dA = \frac{x}{l} dy - \frac{y}{l} dx$$

$$dl = \frac{x}{l} dx + \frac{y}{l} dy$$

welche Formeln in bekannter einfacher Weise konstruiert werden können

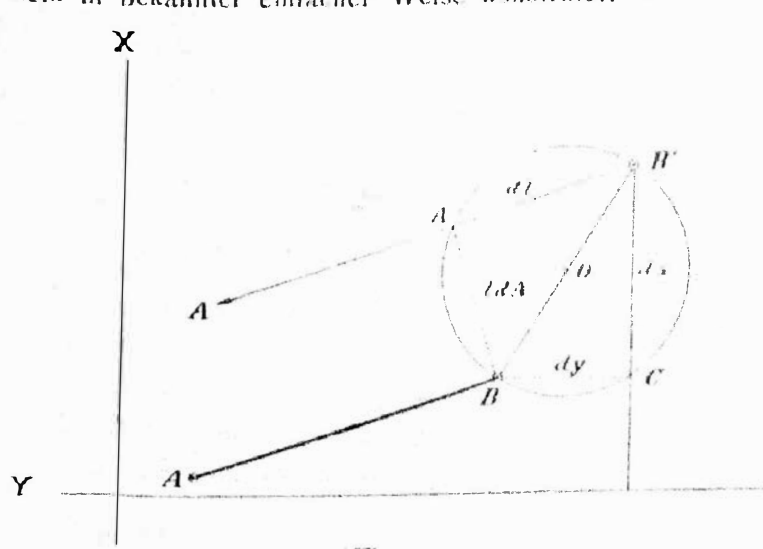

Fig. 1.

Wir führen der Vollständigkeit halber diese Konstruktion an. Es sei eine Länge $AB = l$ im Koordinatensystem XY gegeben. AB sei dabei im beliebigen Maßstab (z. B. 1 : 50.000) gezeichnet. Geht infolge einer Änderung B in B' über, wobei BB' in einem anderen Maßstab (z. B. 1 : 100) gezeichnet sein kann, so beschreibe man, um die Änderungen in diesem Maßstabe zu erhalten, mit (siehe Fig. 1)*)

$$OB = OB'$$

einen Kreis um den Mittelpunkt O der Strecke BB'. Wird hierauf

$$B'E \parallel BA$$

sowie von B' die Senkrechte auf die Y-Axe gefällt, so ergeben sich die Schnittpunkte E und D.

Man hat alsdann $EB' = dl, \quad EB = l dA$
$BD = dy, \quad DB' = dx$

Auf analoge Art könnte man eine etwaige Änderung des Punktes A konstruiv verfolgen. Für die Gesamtänderung hat man zu merken, daß diese gleich ist der a l g e b r a i s c h e n S u m m e b e i d e r L ä n g e und der a l g e b r a i s c h e n D i f f e r e n z b e i d e n A z i m u t e n.

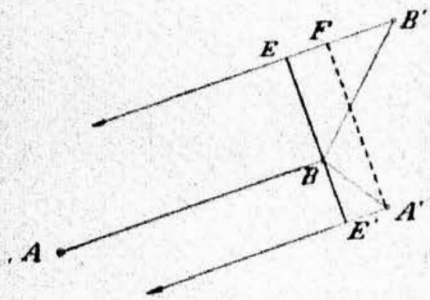

Fig. 2

Ändert sich auch der Punkt A, so empfiehlt es sich, die Strecke AA' von B aus aufzutragen. Die betreffende Konstruktion, wenn es sich um die Azimut- und Längenänderung handelt, wird sodann sehr einfach (siehe Fig. 2).

Es ist sodann die Gesamtänderung

$dl = FB', \quad l dA = EE'$

wobei

$AB \perp EE'$ und $EE' \parallel A'F$

ist.

Nach dieser Einleitung gehen wir zum Hauptproblem über.

Es sei (siehe Fig. 3) $d\gamma$ die Änderung des Winkels ABC, so geht dadurch der Punkt A in A' über und zu gleicher Zeit der Mittelpunkt O des den Punkten ABP umschriebenen Kreises in O'. Dabei ist $\sphericalangle ABA' = \sphericalangle OBO' = d\gamma$.

Der Punkt P gelangt infolge dessen nach P'. Verbindet man O

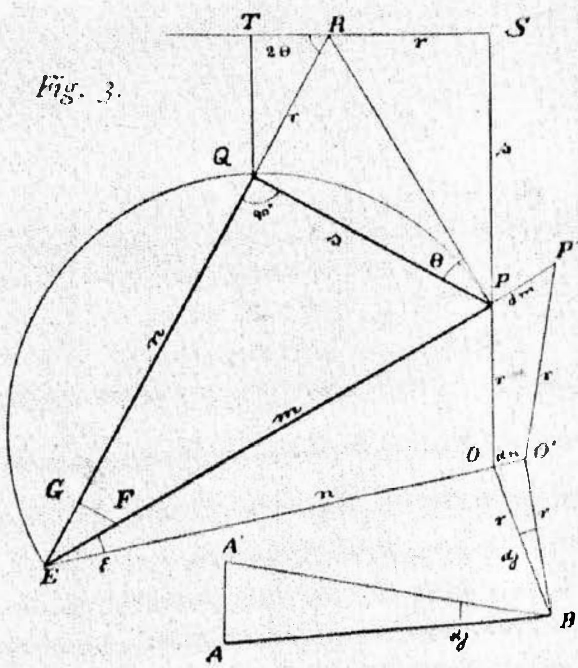

Fig. 3.

*) In Fig. 1 wolle im Bereiche des Konstruktionskreises statt A, E und statt C, D eingesetzt werden.
D. R.

mit O', sowie P mit P' und verlän-gert die Verbindungslinien bis zum Schnitte E, so ergibt sich das Dreieck OEP, in welchem

$$OE = n,\ PE = m,\ \sphericalangle PEO = \varepsilon$$

gesetzt werden soll. Da weder $AB = a$, noch der Winkel $APB = \alpha$ eine Änderung erfahren, so ist offenbar

$$OP = O'P' = r.$$

Wir haben somit im Dreiecke EOP

$$r^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \varepsilon \quad \ldots \quad 1)$$

Durch Differentiation dieser Gleichung ergibt sich weiters

$$r\,dr = m\,dm + n\,dn - dm \cdot n \cos \varepsilon - dn \cdot m \cos \varepsilon$$

oder da

$$dr = o$$

und

$$dm = PP',\quad dn = r \cdot d\gamma$$

nach leichter Umgestaltung:

$$PP' = -r \frac{m \cos \varepsilon - n}{n \cos \varepsilon - m} d\gamma \quad \ldots \quad 2)$$

Die Gleichung 1) gibt

$$\cos \varepsilon = \frac{m^2 + n^2 - r^2}{2mn}.$$

Wird dieses in die Gleichung 2) eingesetzt, so folgt:

$$PP' = -r \frac{m}{n} \cdot \frac{m^2 - n^2 - r^2}{n^2 - m^2 - r^2}$$

Wird hier *)

$$m > n$$

vorausgesetzt, und

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{r}{\sqrt{m^2 - n^2}} \quad \ldots \quad 3)$$

gemacht, so folgt weiters

$$PP' = +r \frac{m}{n} \cos 2\theta \cdot d\gamma \quad \ldots \quad 4)$$

Die Konstruktion von

$$r \frac{m}{n} \cos 2\theta$$

wird wie folgt gemacht:

Man beschreibe über $m = EP$ einen Halbkreis und mache

$$EQ = EO = n$$

sodann wird

$$QP = \sqrt{m^2 - n^2} = s$$

Wird nun EQ verlängert und $QR = r$ gemacht, so ist

$$\sphericalangle QPR = \theta.$$

Man mache nun

$$RS = r,\quad PS = s$$

und verlängere RS, so wird

$$\sphericalangle TRQ + 2\theta$$

*) Der Fall $m < n$ kann in analoger Weise erledigt werden und ändert am Wesen der Sache nichts. Der Übersichtlichkeit wegen wurde er hier nicht weiter ausgeführt.

Wird also von Q die Senkrechte auf RS gefällt, und ist T ihr Fußpunkt, so wird

$$RT = r \cos 2\theta.$$

Wird dann noch im Dreiecke EPQ.

$$EG = RT = r \cos 2\theta$$

gemacht und $GF \parallel PQ$ gezogen, so hat man offenbar

$$EF = \frac{m}{n} r \cos 2\theta.$$

Die Konstruktion dieser Größe bietet demnach keine Schwierigkeit, sobald nur das Dreieck PEO gegeben ist. Dieses wird in nachstehender Weise erhalten: Es seien A, B, C, P die gegebenen Punkte.

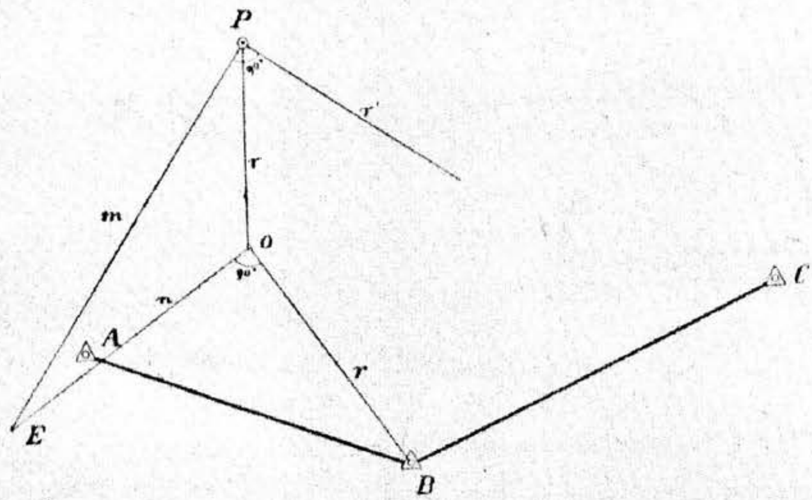

Fig. 4.

Die Mittelpunkte der umschriebenen Kreise seien (siehe Fig. 4)

O für ABP

O" für BCP

Man verbinde O mit B und ziehe in O die Senkrechte. Analog verbinde man O" mit P und ziehe ebenfalls die Senkrechte in P, so daß also:

$$EO \perp OB \text{ und } PE \perp O''P$$

Diese zwei Senkrechten schneiden sich im Punkte E. Das Dreieck EPO ist das gesuchte und es ist

$$EO = n, \quad EP = m, \quad OP = r.$$

Wir übergehen nun zur Lösung des letzten Problems und setzen voraus, daß alle Winkel, somit α, β, γ, ungeändert bleiben. Nur die Geraden

$$AB = a \qquad BC = b$$

sollen Änderung um

$$da \text{ resp. } db$$

erfahren. Die hiebei zu Grunde gelegte Figur ist jene des III. Jahrg., Seite 225. Die Konstruktion bedarf keiner besonderen Erläuterung.

Man konstruiert, wie l. c. angegeben, den Punkt P (siehe Fig. 5). Sind d a und d b wie vorausgesetzt wird, dann fällt der Punkt P' in die Richtung BP. Man mache also AA'' = da, CC'' = db und suche analog den Punkt P'. Wird dann

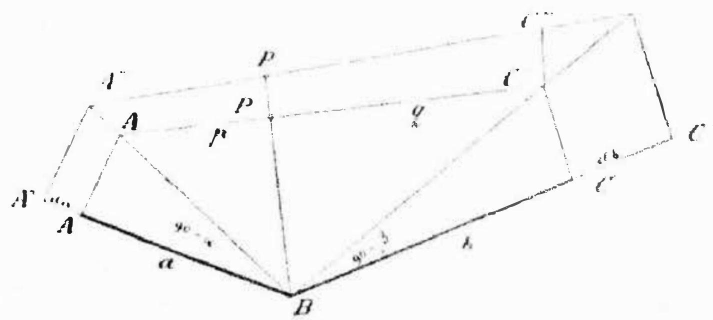

Fig. 5.

$$A'A''' \perp P'A''', \quad C'C''' \perp P'C'''$$

und setzt man

$$A'P = A'''P' = p$$
$$P C' = P'C''' = q$$

was innerhalb der hier innegehaltenen Grenzen möglich ist, so wird

$$PP' = \frac{q}{p+q} A'A''' + \frac{p}{p+q} C'C'''$$

Der Maßstab von p und q kann beliebig sein.

Durch diese Konstruktion ist unser Problem erschöpft. Wir können nunmehr die Variationen **aller** fünf Bestimmungselemente eines Pothenot'schen Punktes der Größe und Richtung nach geometrisch konstruieren. Betrachtet man diese Elemente als Kräfte, so kann durch die Konstruktion des Kräftepolygons leicht die Resultierende geometrisch bestimmt werden.

Solche geometrische Konstruktionen haben nicht nur einen theoretischen, sondern auch einen hohen pädagogischen und auch praktischen Wert. Man braucht sie nicht immer auszuführen, oft genügt ihre Kenntnis, um aus bloßem Anblicke einer Figur zu beurteilen, auf welches Element man ganz besonders zu achten hat. Die toten Formeln der Rechnungsschemen werden dadurch erst lebendig.

Wir übergehen nun zur Dimensionierung unserer Konstruktionen. Wir haben hier, indem wir auf die Figur Bezug nehmen, zu unterscheiden zwischen dem Maßstab

$1 : M_1$ der Grundzeichnung; z. B. : von AB

und

$1 : M_2$ der Variationszeichnung; z. B. : von BB'

Wir haben, wenn l die wirkliche Länge von AB, bezeichnet:

$$l = M_1 \,.\, AB$$

ferner

$$l\,dA = M_2 \,.\, BE$$

Daraus folgt, wenn dA in Sekunden ausgedrückt wird,

$$dA'' = \left(206265\,\frac{M_2}{M_1}\right)\frac{BE}{AB} = \mu\,\frac{BE}{AB}$$

wobei μ eine Konstante ist, welche man beliebig wählen kann. Diese Gleichung bildet die Grundlage des Horský'schen Diagramms. Paßt man die Zeichnung den Maßstäben des Diagramms an, so können Winkeländerungen in Sekunden direkt demselben entnommen werden, wodurch der letzte Rest von Rechnung fortfällt.