Die "gemeinschaftliche Tangente an zwei Kreise" für die Absteckung von Eisenbahntrassen mit besonderer Berücksichtigung der Übergangskurven

Ernst Neumann, Karl P. Vajkai

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **4** (11–12, 13–14), S. 175–178, 198–203

1906

$$(x_0 - y_0 \cos\gamma)\,\triangle x + (y_0 - x_0 \cos\gamma)\,\triangle y + \tfrac{1}{2}\triangle c = 0$$
$$(y_0 - z_0 \cos\alpha)\,\triangle y + (z_0 - y_0 \cos\alpha)\,\triangle z + \tfrac{1}{2}\triangle a = 0$$
$$(z_0 - x_0 \cos\beta)\,\triangle z + (x_0 - z_0 \cos\gamma)\,\triangle x + \tfrac{1}{2}\triangle b = 0$$

Hier sind $\triangle x$ $\triangle y$ $\triangle z$ die einzigen Unbekannten, die leicht berechnet werden können. Man kann die Gleichungen auch graphisch auflösen, denn es sind die Gleichungen von drei Ebenen, die den Koordinatenachsen parallel liegen, wobei $\triangle x$ $\triangle y$ $\triangle z$ die Variablen sind.

Die „gemeinschaftliche Tangente an zwei Kreise"

für die Absteckung von Eisenbahntrassen mit besonderer Berücksichtigung der Übergangskurven.

Von den Ingenieuren Ernst Neumann und Karl P. Vajkai.

Beim Abstecken von Eisenbahntrassen ist oft die Aufgabe zu lösen, «eine gemeinschaftliche Tangente an zwei Kreise zu legen». Besonders bei Trassenverlegungen bestehender Geleise, wie solche jetzt öfter beim Baue der zweiten Geleise vorgenommen werden, können derartige Aufgaben leicht an den Ingenieur herantreten. Aber auch bei Neubauten, wie z. B. bei Gebirgsbahnen, wird der Trasseur durch Terrainschwierigkeiten manchmal genötigt, erst die Bögen abzustecken, um diese nachher durch Tangenten zu verbinden.

Die erwähnte Aufgabe wurde bisher größtenteils versuchsweise gelöst und hatte man als Folge dieser langwierigen Methode ein bloß angenähertes Resultat, bei welchem sogar größere als zulässige Fehler geduldet wurden. Knoll gibt in seinem «Taschenbuch zum Abstecken von Kurven an Eisenbahnen und Straßen»*) zwar eine geometrisch richtige Lösung obiger Aufgabe, welche aber dem Ingenieur nicht weniger Mühe verursacht als das Versuchsverfahren und auch in der Art der Lösung vieles an Genauigkeit einbüßt. So ist erforderlich, 3 Längen auf dem Gelände zu messen; selbstverständlich leidet unter dieser dreifachen Längenmessung die Genauigkeit, da dem Praktiker für gewöhnlich die Zeit zu einer sorgfältigeren Längenmessung mangelt, die ihm zu Gebote stehenden Längenmeßwerkzeuge im allgemeinen nur ein rohes Resultat zu erreichen gestatten, und endlich die heute erreichbare Genauigkeit der Winkelmessungen in keinem Verhältnisse zu jener der so gelösten Aufgabe steht.

Der nachstehender Lösung**) zugrunde liegende Gedanke basiert auf der Verwandtschaft zweier Kreise. Es ist allgemein bekannt, daß zwei Kreisen zwei Punkte — die Ähnlichkeitspunkte — eigen sind, die Schnittpunkte aller jener Sekanten,

*) Karl Knoll. Taschenbuch zum Abstecken von Kurven an Eisenbahnen und Straßen. Stuttgart 1873. Außerdem wurde benützt: R. v. Lichtenfels. Der Korbbogen und die Übergangskurve im Eisenbahngeleise. Wien 1903. Das Verlagsjahr des Knoll'schen Taschenbuches erscheint deshalb besonders hervorgehoben, da in den späteren Auflagen dieses Werkes die Lösung der Aufgabe nicht mehr aufgenommen wurde.

**) Der leider allzufrüh verewigte Prof. Ruth (Prag) hat die vorliegende Arbeit der Verfasser als anerkennenswert befunden, umsomehr, da die einzige theoretische Lösung dieser Aufgabe, welche in einer alten Knoll-Auflage sich vorfindet, nicht besonders anzuempfehlen wäre. Die Redaktion.

die Endpunkte paralleler entweder gleich- oder entgegengesetzt gerichteter Halbmesser verbinden. Als besonders hervorzuhebende Linien dieser Sekantenbüschel wären die Zentrale und die gemeinschaftlichen Tangenten zu erwähnen. Betrachten wir die Ähnlichkeitspunkte näher, so schneiden sich die Sekanten gleichgerichteter Halbmesser in dem äußeren, jene entgegengesetzt gerichteter im inneren Ähnlichkeitspunkte. Ebenso gehen die beide Kreise außen berührenden Tangenten durch den äußeren, die innen berührenden durch den inneren Ähnlichkeitspunkt. Man wird also zwei Fälle der Aufgabe zu unterscheiden haben, je nachdem es sich um eine die Bögen außen oder innen berührende Tangente handeln wird. Der bequemeren Ausdrucksweise halber wollen wir fürs Folgende solche Bögen, welche eine außen berührende Tangente bedingen, als «gleichlaufende», die eine innen berührende erfordern als «entgegengesetzt laufende» — oder Kontra-Bögen — wie sie seit jeher in der Eisenbahnpraxis bezeichnet wurden, benennen.

Auf Grund dieser einleitenden Worte läßt sich der Gedankengang der Aufgabe leicht analysieren: Da die gemeinschaftliche Tangente zweier Bögen durch ihren Ähnlichkeitspunkt hindurchgehen muß, so ergibt sich hieraus eine Teilung der Aufgabe, indem man zuerst an die Festlegung des Ähnlichkeitspunktes schreiten wird, um dann die besondere Aufgabe zu lösen: von einem außerhalb liegenden Punkte — dem Ähnlichkeitspunkte — an die Bögen die Tangente zu legen.

Der Ähnlichkeitspunkt ergibt sich geometrisch als Schnittpunkt einer Verbindungslinie der Endpunkte zweier paralleler Radien mit der Zentralen beider Kreise. Da aber die Mittelpunkte, somit auch die Zentrale im allgemeinen, im Felde nicht fixiert sein werden, so könnte er auch als Schnitt zweier beliebiger Sekanten des bereits früher erwähnten Büschels bestimmt werden. Doch wollen wir auch von dieser umständlichen Festsetzung absehen.

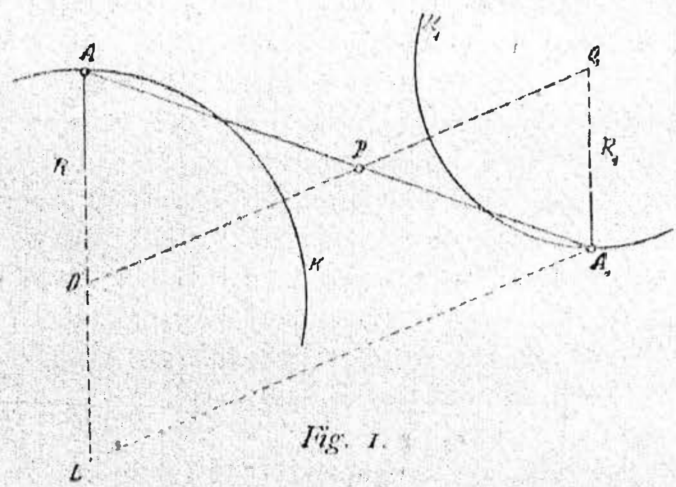

Fig. 1.

Wären in Fig. 1 R und R_1 zwei parallele Radien, P der den Bögen eigene innere Ähnlichkeitspunkt, und ziehen wir A_1L parallel mit OO_1, so ergibt sich aus den Dreiecken ALA_1 und AOP

$$AL : AO = AA_1 : AP$$

oder

$$R + R_1 : R = AA_1 : AP$$

und hieraus

$$AP = \frac{R}{R + R_1} \cdot AA_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I}$$

Mißt man daher die Länge der Verbindungslinie AA_1, so läßt sich aus Gleichung I AP rechnen und der Ähnlichkeitspunkt auf AA_1 festsetzen.

Analog ergibt sich der äußere Ähnlichkeitspunkt bei gleichlaufenden Bögen. Nach Fig. 2 verhält sich:

$$R : R_1 = AP : A_1P$$

oder

$$R - R_1 : R = AA_1 : AP$$

und

$$AP = \frac{R}{R - R_1} \cdot AA_1 \quad . \text{ II}$$

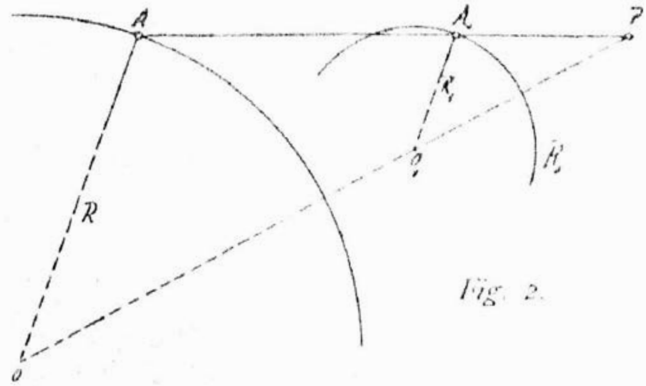

Fig. 2.

Die Endpunkte zweier entsprechender Radien müssen aber im allgemeinen erst im Felde aufgesucht werden. Es erübrigt daher ein möglichst einfaches Verfahren zum Bestimmen solcher konjungierter Peripheriepunkte zu geben. Es sei in Fig. 3 zu dem auf den Bogen K gegebenen Punkte A der Endpunkt des parallelen Halbmessers des Bogens K_1 zu suchen. Aus der Figur ist zu entnehmen, daß die Bogenmitte der Bögen über allen zur Tangente in A parallelen Sekanten des Bogens K_1 der gesuchte Punkt sein wird. Hieraus ergibt sich folgende Bestimmung.

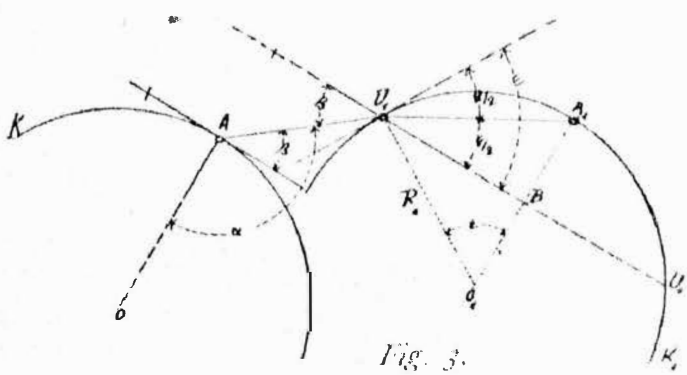

Fig. 3.

Man gebe die Tangente in A, stelle das Instrument über einen beliebigen Punkt U_1 des Bogens K_1, gebe in U_1 eine Parallele zur Tangente in A, so ist die Bogenmitte A_1 von $\overparen{U_1U_1'}$ der A konjugierte Bogenpunkt. Man könnte nun den zweiten Bogenpunkt U_1' aufsuchen und aus der gemessenen Länge $\overline{U_1U_1'}$ A_1 bestimmen. Man wird jedoch, da das Aufsuchen von U_1' Schwierigkeiten bereitet, von dieser Weise absehen und trachten A_1 unmittelbar von U_1 durch eine Winkelmessung zu fixieren. Der Winkel ε (Fig. 3) kann gemessen werden und es ergibt sich so A_1 entweder aus den Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} U_1B &= R_1 \sin \varepsilon \\ BA_1 &= R_1 (1 - \cos \varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{III}$$

oder nach der Sehnenmethode über dem Peripheriewinkel $\frac{\varepsilon}{2}$ aus

$$U_1A_1 = \sqrt{\overline{U_1B}^2 + \overline{BA_1}^2} = 2R_1 \sin \frac{\varepsilon}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{IV}$$

Ist der Ähnlichkeitspunkt festgesetzt, so ist nun die Aufgabe zu lösen: Vom Ähnlichkeitspunkte an die Bögen die Tangente zu legen:

Wäre in Fig. 4 A ein ausgesteckter Bogenpunkt und sollte von dem ebenfalls gegebenen Punkte P an K die Tangente gelegt werden, so zeigt die Figur, daß jene durch Drehen der Sekante AP um den Winkel ψ erhalten werden kann. Man braucht also einem über P aufgestellten, nach A weisenden Instrumente — der Annahme unserer Figur entsprechend — bloß ψ hinzuzufügen, um die Richtung der Tangente zu fixieren. ψ kann nachfolgend berechnet werden. Die Strecke AP ist ohnedies bei Bestimmung von P gerechnet worden (siehe Gleichung I oder II) und Winkel α wird gemessen, dann ist aus dem Dreiecke OAP

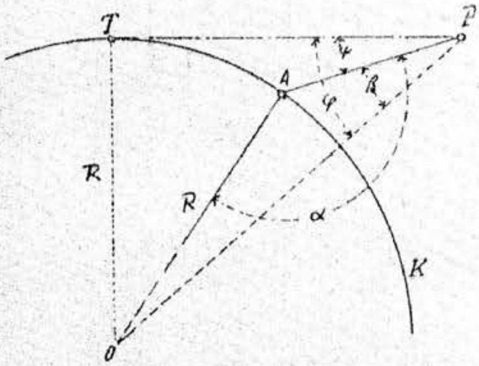

Fig. 4.

$$OP = \sqrt{(AP + R)^2 - 2 \,.\, AP \,.\, R\,(1 - \cos\alpha)} \quad \ldots\ldots \quad V$$

$$\sin\beta = \frac{R}{OP} \,.\, \sin\alpha \quad \ldots\ldots \quad VI$$

und dem jetzt bestimmten Dreiecke OTP

$$\sin\varphi = \frac{R}{OP} \quad \ldots\ldots \quad VII$$

$$PT = \sqrt{\overline{OP}^2 - R^2} \quad \ldots\ldots \quad VIII$$

Es ergibt sich nun der Winkel

$$\psi = \varphi - \beta \text{ und allgemein } \psi = \varphi \mp \beta \quad \ldots\ldots \quad IX$$

wobei das Pluszeichen in Geltung tritt, wenn A außerhalb des zwischen dem Berührungspunkte und OP gelegenen Bogen liegt. Mißt man nun auf der erhaltenen Tangentenvisur PT (Gleichung VIII) ein, so erhält man den Berührungspunkt T der Tangente.

(Schluß folgt.)

Mathematische Kleinigkeiten.

Von Professor **Karl Fuchs** (Preßburg).

1. Mittelwert und Abweichung.

Zwei beliebige Zahlen a und b haben von ihrem Mittelwert m (= halbe Summe) gleiche Abstände oder Abweichungen n (= halbe Differenz), so daß gilt:

$$a = m + n \qquad b = m - n \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Daraus folgt:

$$ab = m^2 - n^2 \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

2. Pythagoräische Zahlen.

Das sind ganze Zahlen, die den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks entsprechen, wie 3, 4, 5. Wenn in 2) das Produkt ab ein Quadrat wäre, dann wären $\sqrt{ab}$, m, n drei pythagoräische Zahlen, und m wäre die Hypotenuse. Wenn wir aber a und b durch a^2 und b^2 ersetzen, dann steht links tatsächlich ein Quadrat $(ab)^2$, und 2) nimmt die Form an:

$$(ab)^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

so ist die Anziehungskraft der Erde auf den Punkt A:

$$k\frac{mE}{r^2} = mg,$$

die Anziehungskraft des Mondes auf denselben Punkt:

$$k\frac{mM}{(d-r)^2},$$

die Anziehungskraft des Mondes für die im Mittelpunkt der Erde gelagerte Masse m:

$$k\frac{mM}{d^2},$$

sohin ist jene Kraft, womit der Punkt A von dem Monde stärker angezogen wird, als der Erdmittelpunkt, jene «fluterzeugende Kraft» also, welche die Erhebung des Punktes A um die Höhe h' bewirkt, gleich dem Unterschied:

$$k\frac{mM}{(d-r)^2} - k\frac{mM}{d^2} = mp.$$

(Schluß folgt.)

Die „gemeinschaftliche Tangente an zwei Kreise"

für die Absteckung von Eisenbahntrassen mit besonderer Berücksichtigung der Übergangskurven.

Von den Ingenieuren Ernst Neumann und Karl P. Vajkai.

(Schluß).

Fassen wir nun auf Grund des Vorausgeschickten den Gang der Aufgabe zusammen, so ergibt sich folgende geodätische Lösung: Seien in Fig. 5 K und K_1 zwei durch eine Tangente zu verbindende Kreisbögen, so sucht man nach Gleichung III oder IV erst die Endpunkte paralleler Halbmesser, mißt die Länge

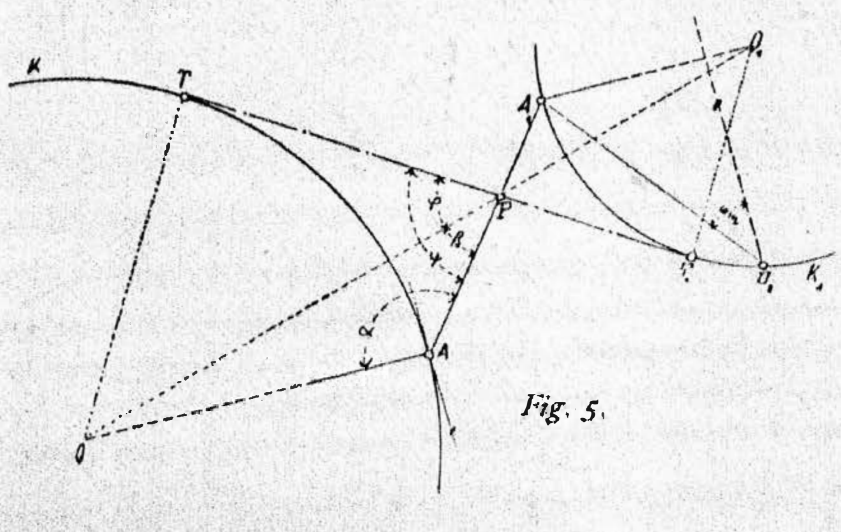

Fig. 5.

AA_1 und den Winkel α in A, berechnet nach Gleichung I*) AP und vermag auf AA_1 den Ähnlichkeitspunkt P zu fixieren. Stellt man nun das Instrument über P auf und fügt zur Visur PA den Winkel ψ nach Gleichung IX hinzu, so erhält man durch Absetzen von $\overline{PT}$ (Gleichung VIII) auf dieser Tangentenrichtung den Berührungspunkt T. Schlägt man das Fernrohr durch, so braucht man bloß das analog gerechnete $\overline{PT_1}$ einzumessen, um T_1 auszustecken.

Aus Figur 2 ist ersichtlich, daß für gleichlaufende Bögen das Aufsuchen des Ähnlichkeitspunktes Schwierigkeiten verursachen wird. Liegt er doch für solche Bögen außerhalb derselben und kann so leicht in koupiertes Terrain fallen, bei den vorkommenden kleinen Radiendifferenzen sogar meistens nicht erreichbar sein. Aber nicht nur das Festsetzen von P gestaltet diese unmittelbare Lösung der Aufgabe vom Ähnlichkeitspunkte so ungünstig, sondern auch der im allgemeinen klein sich ergebende Winkel ψ wird die Genauigkeit dieser Lösung benachteilen. Von diesen Gesichtszügen ausgehend, waren die Verfasser bestrebt, die gemeinschaftliche Tangente mit Umgehung der Festsetzung des Ähnlichkeitspunktes zu bestimmen und ist die folgende Methode in allen Fällen die zweckmäßigere.

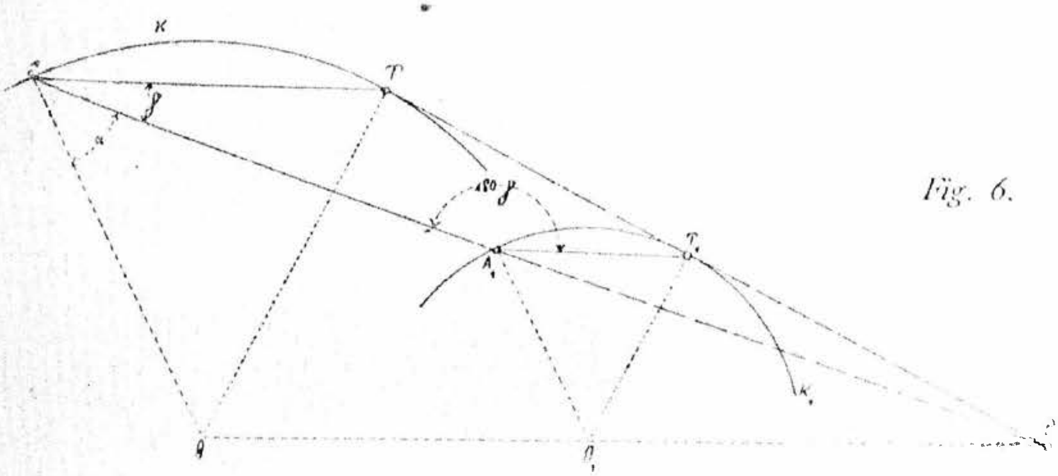

Fig. 6.

Wäre in Fig. 6 $\overline{PT_1T}$ die an die Bögen K und K_1 zu legende gemeinschaftliche Tangente, so läßt sich aus dem Dreiecke ATP, in welchem AP nach Gleichung II, PT nach Gleichung VIII und $\sphericalangle\, \psi$ nach Gleichung IX bekannt sind, die Länge AT und der Winkel γ rechnen. Man kann also direkt vom Standpunkte A den Berührungspunkt T festsetzen, indem man zur Visur AA_1 den Winkel γ hinzugibt und AT einmißt.

$$AT = \sqrt{(\overline{PT} + AP)^2 - 2\,PT \,.\, AP\,(1 - \cos\psi)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad X$$

und

$$\sin\gamma = \frac{PT}{AT} \,.\, \sin\psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad XI$$

Der Berührungspunkt T_1 wird von A_1 aus fixiert, indem zur Visur A_1A der zu γ supplementäre Winkel addiert wird und auf dieser Visur die im Verhältnis der Radien reduzierte Strecke A_1T_1 abgesetzt wird.

*) Für gleichlautende Bögen gilt zur Berechnung von AP Gleichung II.

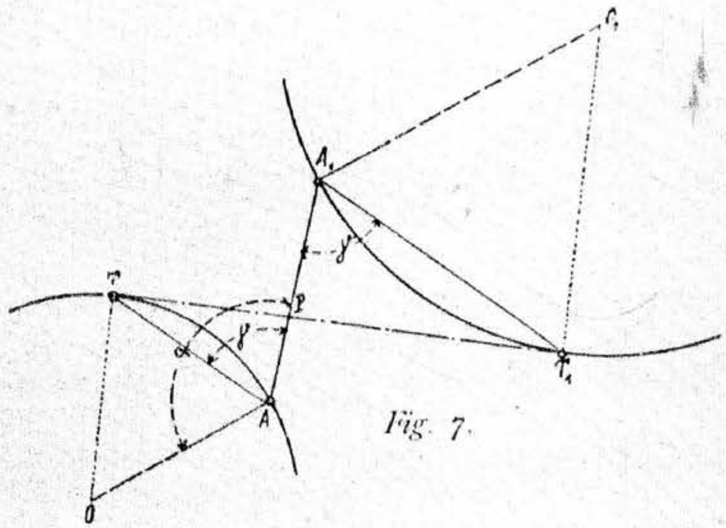

Fig. 7.

Analog ist die Lösung für Kontrabögen (Fig. 7). Man berechnet ebenso aus Dreieck APT die Länge AT und den Winkel γ und vermag so sinngemäß die Berührungspunkte T und T_1 von A bezw. von A_1 abzustecken.

Die Lösung hat außer einer Ersparnis an Feldarbeit noch den großen Vorteil, daß der Berührungspunkt unmittelbar von dem beliebig gewählten Bogenpunkte A bestimmt wird und nicht erst aus einer zweifachen Einmessung. Die Genauigkeit der Aufgabe hängt insbesondere von der zu messenden Länge AA_1 ab. Man wird daher trachten, diese möglichst kurz zu wählen. Das wird am besten erreicht, wenn man den beliebig zu wählenden Bogenpunkt auf den dem Ähnlichkeitspunkte zugewendeten Teile des Bogens annimmt, nur darf man wieder nicht allzu nahe an den Berührungspunkt herankommen, da sonst γ zu klein würde und auch eine allzu kurze Visur nach dem Berührungspunkt die Genauigkeit der Einmessung von T beeinflußt.

Die im Laufe der Zeit durch Erhöhung der Geschwindigkeit und Vergrößerung des Gewichtes der Fahrbetriebsmittel gesteigerten Ansprüche an die sorgfältigere Ausarbeitung des Oberbaues machen es für die Zukunft unerläßlich,

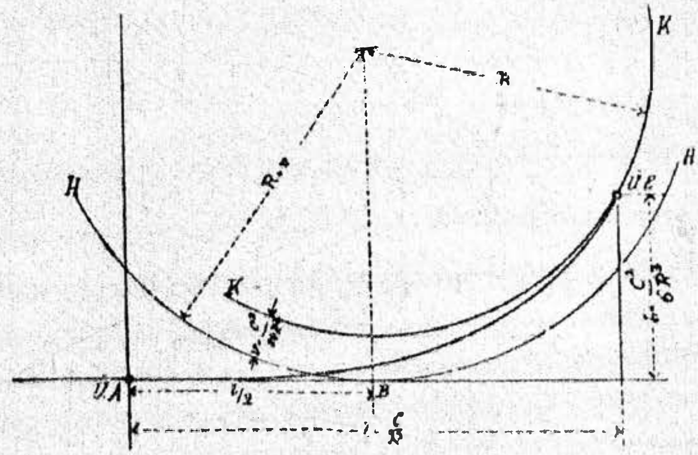

Fig. 8.

zwischen Bogen und Tangente behufs Ausgleichung der Richtungs- und Höhenverhältnisse des Geleises Übergangskurven einzuschalten. Eine einfache Art, dieser Forderung in der behandelten Aufgabe zu entsprechen, wäre das Einlegen solcher kubischer Parabeln, wie sie in bestehende Geleise eingelegt werden. Das Abstecken theoretisch richtiger Übergangskurven ist jedoch, ohne eine Mehrarbeit im Felde leisten zu müssen, auf sehr leichte Weise durchzuführen. Diese soll im folgenden besprochen werden.

Die Theorie der Übergangskurve als bekannt vorausgesetzt, sei hier bloß als besonders wesentlich für das Folgende, auf die Eigenschaft hingewiesen, daß ein dem gegebenen Bogen konzentrischer Hilfskreis vom Radius R + v (Fig. 8) die Übergangsbogentangente in der halben Übergangsbogenlänge $l/_2$ tangiert.

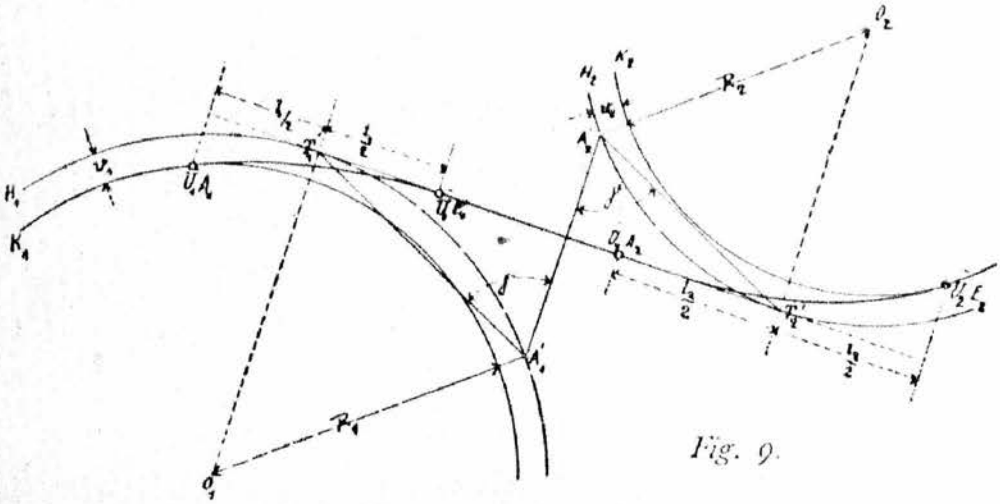

Fig. 9.

Wäre an die Bögen K_1 und K_2 (Fig. 9) eine gemeinschaftliche Tangente mit ein-, bezw. auslaufender Übergangskurve zu legen, so ist zu berücksichtigen, daß diese von beiden Kreisen abhängig ist, vom Kreise K_1 die Entfernung v_1 und vom Kreise K_2 die dem Radius R_2 entsprechende Distanz v_2 haben muß, sich also als gemeinschaftliche Tangente der Hilfskreise H_1 vom Radius $R_1 + v_1$ und H_2 $(R_2 + v_2)$ ergibt. Die Übergangskurven werden nach der allgemein üblichen Koordinatenmethode abgesteckt, sind doch die Berührungspunkte die halbierenden Abszissenpunkte der kubischen Parabeln.

Die gemeinschaftliche Tangente der Hilfskreise könnte bestimmt werden, indem zu zwei koordinierten Punkten der Hauptbögen die entsprechenden der konzentrischen Hilfskreise abgesteckt werden und diese als Grundpunkte zur Bestimmung der gemeinschaftlichen Tangente nach Vorgang auf Seite 199 benützt werden. Die Verschiebungen v, welche behufs Festsetzen der Punkte der Hilfskreise radial von den Punkten der gegebenen Bögen aufzutragen wären, sind im allgemeinen kleine Größen, und wäre ein solches Absetzen ungenau. Man wird daher trachten, die gemeinschaftliche Tangente der Hilfskreise, bezw. die Berührungspunkte derselben unmittelbar von den Punkten der Hauptbögen abzustecken.

Der Vorgang ist folgender:

1. Für Kontrabögen:

Seien in Fig. 10 A_1 und A_2 zwei Endpunkte paralleler Halbmesser der Bögen K_1 und K_2, $T_1'T_2'$ die gemeinschaftliche Tangente der Hilfskreise H_1

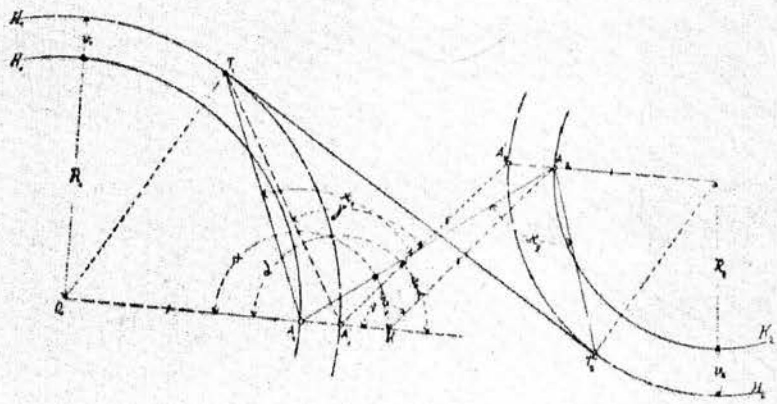

Fig. 10.

und H_2, so genügt es, um die Berührungspunkte T' von den Punkten A absetzen zu können, die Größen $\varkappa$ und $\overline{AT'}$ zu kennen. Aus dem Dreiecke A_1A_2K lassen sich, da in demselben $\overline{A_1A_2}$ und Winkel α als gemessen und $\overline{A_1K} = v_1 + v_2$ bekannt sind, $\overline{A_2K} = \overline{A_1'A_2'}$ und $\sphericalangle \nu = \sphericalangle \alpha'$ rechnen.

Es ist

$$\overline{A_2K} = \overline{A_1'A_2'} = \sqrt{(\overline{A_1A_2} + \overline{A_1K})^2 - 2\,\overline{A_1A_2}\,.\,\overline{A_1K}\,(1 + \cos\alpha)} \quad . \; . \; . \quad \text{XII a}$$

und

$$\sin\nu = \sin\alpha' = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2K}}\,.\,\sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{XIII a}$$

Die so gerechneten Größen $\overline{A_1'A_2'}$ und $\sphericalangle \alpha'$ genügen nun zur Berechnung von $\overline{A_1'T_1'}$ und $\sphericalangle \gamma$ nach den Gleichungen V—XI, so daß schließlich, um die verlangten Größen A_1T_1' und $\varkappa_1$ zu bestimmen, die Auflösung des jetzt bestimmten Dreieckes $A_1A_1'T_1'$ erübrigt. In diesem sind bekannt $A_1A_1' = v_1$, $A_1'T_1'$ und $\sphericalangle A_1' = \alpha' - \gamma$ und ist

$$A_1T_1' = \sqrt{(v_1 + \overline{A_1'T_1'})^2 - 2\,v_1\,.\,\overline{A_1'T_1'}\,[1 - \cos(\alpha' - \gamma)]}$$

und

$$\sin A_1 = \sin(\alpha - \varkappa_1) = \frac{\overline{A_1'T_1'}}{A_1T_1'}\,\sin(\alpha' - \gamma)$$

oder allgemein

$$\overline{A_1T_1'} = \sqrt{(v_1 + \overline{A_1'T_1'})^2 - 2\,v_1\,.\,\overline{A_1'T_1'}\,[1 - \cos(\alpha \mp \gamma)]} \quad . \; . \; . \quad \text{XIV a}$$

und

$$\sin A_1 = \sin(\alpha \mp \varkappa_1) = \frac{\overline{A_1'T_1'}}{A_1T_1'}\,.\,\sin(\alpha' \mp \gamma) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{XV a}$$

je nachdem die beliebig gewählten Bogenpunkte A auf der der Tangente zu- oder abgewandten Bogenseite liegen. Die Feldarbeit beschränkt sich wieder auf das Hinzufügen des Winkels $\varkappa_1$ zur Visur A_1A_2 und Einmessen von $\overline{A_1T_1'}$ auf der erhaltenen Visur. Analog wird T_2' festgesetzt.

2. Für gleichlaufende Bögen:

Um auch hier die Größen zur unmittelbaren Ermittlung der Berührungspunkte T' und A zu bekommen, denkt man sich durch A_1 eine Parallele zu $A_1'A_2'$ und löst das Dreieck A_1A_2K. Es ist wieder

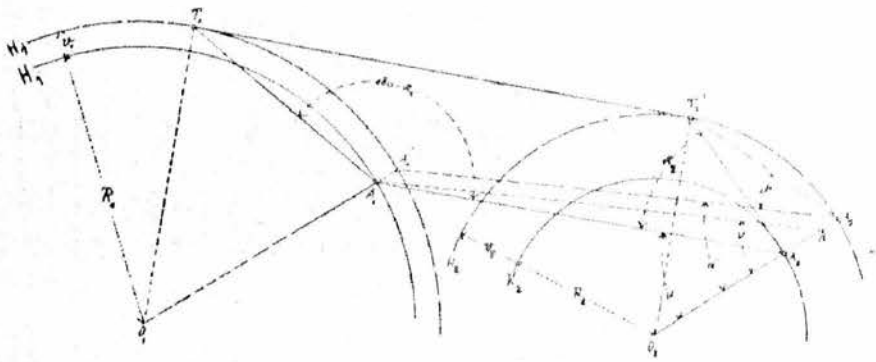

Fig. 11.

$$\overline{A_1K} = \overline{A_1'A_2'} = \sqrt{(\overline{A_2K} + \overline{A_1A_2})^2 - 2\,\overline{A_2K}\,.\,\overline{A_1A_2}\,(1 + \cos\alpha)} \quad \ldots \quad \text{XII b}$$

und

$$\sin \nu = \sin \alpha' = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1K}}\,.\,\sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{XIII b}$$

$\overline{A_1'A_2'}$ und $\sphericalangle\,\alpha'$ geben aus den Gleichungen V—XI $\overline{A_2'T_2'}$ und $\sphericalangle\,\gamma$; und nach analoger Ableitung dem Falle 1 ist aus dem Dreiecke $A_2A_2'T_2'$

$$\overline{A_2T_2'} = \sqrt{(\overline{A_2A_2'} + \overline{A_2'T_2'})^2 - 2\,\overline{A_2A_2'}\,.\,\overline{A_2'T_2'}\,[1 - \cos(\gamma \mp \alpha')]} \quad \ldots \quad \text{XIV b}$$

und

$$\sin(\varkappa_2 \mp \alpha) = \frac{\overline{A_2'T_2'}}{\overline{A_2T_2'}}\,.\,\sin(\gamma \mp \alpha') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XV b}$$

wobei die Zeichen im selben Sinne wie im Falle 1 Geltung haben.

Bei diesen Aufgaben gilt bezüglich der Genauigkeit des Resultats dasselbe wie bei Lösung der Aufgabe ohne Berücksichtigung der Übergangskurve.

Die im vorstehenden angeführte Lösung hat, wie dem Gange der Aufgabe zu entnehmen ist, den bis jetzt gebräuchlichen Methoden gegenüber den Vorteil einer verhältnismäßig geringen Feldarbeit und hauptsächlichst den einer bedeutenden Genauigkeit, ist doch das Resultat bloß von einer zu messenden Länge abhängig.

Grundeinlösung für Eisenbahnzwecke und Katastralmappe.

Die im Hefte 9—10 der «Ö. Z. f. V.» vom 1. Mai 1906 von Obergeometer Mielichhofer veröffentlichten «Kritischen Betrachtungen über die Mappen des Katasters und des Grundbuches» enthalten eine Fülle von Wahrheiten, für deren ungeschminkte Darstellung jeder Interessent dem Verfasser ehrlichen Dank sagen muß.