

Paper-ID: VGI\_190541



## Über das natürliche Erhaltungsprinzip

Siegmund Wellisch

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **3** (19–20), S. 293–298

1905

BibTEX:

```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_190541,  
Title = {"\U}ber das nat{\\"u}rliche Erhaltungsprinzip},  
Author = {Wellisch, Siegmund},  
Journal = {"\O}sterreichische Zeitschrift f{\\"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {293--298},  
Number = {19--20},  
Year = {1905},  
Volume = {3}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE

# Zeitschrift für Vermessungswesen.

ORGAN DES VEREINES

DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger.

VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III <sup>1</sup> / <sub>2</sub> Kegelgasse 15, Parterre, T. 2. K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.	Erscheint am 1. jeden Monats. Jährlich 24 Nummern in 12 Doppelheften. Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.	Expedition und Inseratenaufnahme durch die Buchdruckerei J. Wladarz (vorm. Haase) Baden bei Wien, Pfarrgasse 5.
--	--	--

Nr. 19—20.

Wien, am 1. Oktober 1905.

III. Jahrgang.

Inhalt: Über das natürliche Erhaltungsprinzip. Von S. Wellisch, Oberingenieur der Stadt Wien. —  
Einiges über Vermarkungsmaterialie aus Kunststein. Von Ing. Frank. — Der Entwurf zum Ver-  
markungsgesetze. — Zur Grundbuchsquote. — Literarischer Monatsbericht. — Kleine Mitteilungen.  
— Patent-Liste. — Patent-Bericht. — Druckfehler-Berichtigung.

Nachdruck der Original Artikel nur mit Einverständnis  
der Redaktion gestattet.

## Über das natürliche Erhaltungsprinzip.\*)

Von S. Wellisch, Oberingenieur der Stadt Wien.

Die mechanische Begründung der Methode der kleinsten Quadrate hat so vielerlei Wege genommen, daß ein Rückblick auf die wichtigsten Entwicklungsstadien des mit dieser Methode verwandten mechanischen Prinzips der möglichen Erhaltung des Naturzustandes von einigem Interesse sein dürfte.

In Anlehnung an die von Galilei in seiner Hauptschrift: »Discorsi e dimostrazioni matematiche«, Leiden 1638, festgestellte Wirkungsweise der Schwere, wonach Hebungen und Senkungen durch die Quadrate der Geschwindigkeiten dargestellt werden, hat Huygens in dem Werke: »Horologium oscillatorium«, Paris 1673, für das Erhaltungsprinzip das erste Fundament gelegt, indem er der erste war, welcher erkannt hat, daß dasjenige, was in der Natur erhalten bleibt, durch die Summe der Produkte aus den Massen und den Quadraten der Geschwindigkeiten auszudrücken sei. Der mit diesem Produkte verbundene Begriff der »lebendigen Kraft«, welcher später von Cartesius (1686), Leibniz (1695) und den drei Bernoulli (1686—1748) eine bestimmtere Ausbildung und Aufklärung gefunden hat, wurde in dem Erhaltungsprinzip zum Gegenstand verschiedener Variationen gemacht.

\*) Nachgedruckt mit gütiger Erlaubnis des sehr geschätzten Verfassers, unseres fleißigsten Herrn Mitarbeiters, aus dem bei B. G. Teubner in Leipzig erscheinenden Organ für angewandte Mathematik »Zeitschrift für Mathematik und Physik« als erwünschter Beitrag zu seiner im II. Jahrgange dieser Zeitschrift trefflich ausgeführten »Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme«.

In seinem Werke: »*Varia opera mathematica*«, Tolosae 1679, hat Fermat zum erstenmale den Satz ausgesprochen, »daß die Natur immer auf den kürzesten Wegen tätig sei«, oder mit anderen Worten, daß die Natur mit dem »möglichst geringsten Kraftaufwand« auskomme, d. h. im Sinne des »geringsten Widerstandes« vorgehe. Diesen Gedanken hat im Jahre 1740 und einige Jahre später Maupertuis aufgegriffen, um in der Mechanik ein neues Gesetz aufzustellen, welches in seiner Abhandlung: »*Les lois du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique*« (Histoire de l'académie de Berlin, 1746) folgenden Wortlaut hat: »Wenn in der Natur eine Veränderung vorgeht, so ist die für diese Veränderung notwendige Tätigkeitsmenge die kleinstmögliche.« Die für die Veränderung eines Bewegungszustandes erforderliche Tätigkeitsmenge ist als Produkt von der Form

$$m \cdot v \cdot s$$

zu denken; worin  $m$  die Masse,  $v$  die Geschwindigkeit und  $s$  den zurückgelegten Weg bedeutet. Unter der Veränderung, die in der Natur vor sich geht und ein Minimum werden soll, wird die Differenz zwischen zwei Tätigkeitsmengen verstanden, deren eine dem Zustande vor dem Ereignis, die andere demjenigen nach dem Ereignis entspricht, gleichviel ob das letztere ein wirklicher oder nur ein denkbar möglicher, ein virtueller Vorgang sei.

Da diese Darstellung des Prinzips der möglichsten Erhaltung des Naturzustandes, welches man auch als das »Prinzip der kleinsten Wirkung« (*principium minimae actionis*) bezeichnet, nicht klar genug durchsehen läßt, wie im allgemeinen eine unendlich kleine oder doch eine sehr geringfügige Veränderung eines Systems in der Nähe des Gleichgewichtszustandes — worauf es am meisten ankommt — zu behandeln sei, so erscheint die von Euler gegebene Fassung in differentieller Form viel exacter und deutlicher. In seiner Schrift: »*Methodus inveniendi lineas curvas*«, Lausanne 1741, stellt er für die Formulierung des Prinzips der kleinsten Wirkung das Produkt

$$m \cdot v \cdot ds$$

auf. Dieses Produkt, worin die Bewegungsgröße  $mv$  mit dem differentiellen Weg-element  $ds$  multipliziert erscheint, bezeichnet er als die augenblickliche lebendige Kraft, und das Integral dieser augenblicklichen lebendigen Kräfte zwischen zwei entsprechenden Zeitgrenzen läßt er ein Minimum werden. Mit Bezug auf die Relation

$$v = \frac{ds}{dt}$$

könnte der Euler'sche Ausdruck auch geschrieben werden wie folgt:

$$m \cdot v^2 \cdot dt \text{ oder } m \frac{ds^2}{dt}$$

oder unter Zugrundelegung der Zeiteinheit:

$$m \cdot v^2 \text{ oder } m \cdot ds^2.$$

In der Schrift: »*Traité de dynamique*«, Paris 1743, gibt d'Alembert den elementaren Wirkungen die Form

$$m \cdot v \cdot dv.$$

Setzt man hierin  $m = \frac{p}{g}$ ,  $v = \frac{ds}{dt}$  und  $dv = g \cdot dt$ , wo  $p$  die Kraft und  $g$  die zugehörige Beschleunigung bedeutet, so hat man

$$m \cdot v \cdot dv = \frac{p}{g} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot g \cdot dt = p \cdot ds$$

d. i. das Element der Arbeit.

Nach Lagrange, welcher in seiner »Mécanique analytique« Paris 1788, die Eulersche Formel analytisch insofern ausdehnte, als er an die Stelle des eindeutigen Minimums die doppelte Möglichkeit von Maximum und Minimum einführte, könnte man dieses Prinzip als dasjenige »der größten und kleinsten lebendigen Kraft« bezeichnen, in welcher Ausdrucksweise es sich auch unmittelbar auf den Grenzfall des Gleichgewichtes anwenden läßt, indem Lagrange nachgewiesen hat, daß unter allen Lagen eines bewegten Systems die der größten und kleinsten lebendigen Kraft entsprechende auch diejenige sei, in welche man es bringen müßte, damit es sich im Zustande des Gleichgewichtes befände.

Laplace drückt sich in seinem Werke: »Exposition du système du monde« wie folgt aus: »Das Integral der mit dem Zeitelemente multiplizierten lebendigen Kraft eines Systems ist ein Minimum, sodaß also die wahrhafte Ökonomie der Natur diejenige der lebendigen Kraft ist.« Dieser Auffassung, welche der Eulerschen Formulierung vollkommen entspricht, schließen sich später auch Poisson (Traité de mécanique, 1833), Hamilton (Philosophical Transactions, 1834) und Jacobi (Vorlesungen, 1842) an, jedoch unter erweiterten Gesichtspunkten, die in der analytischen Bearbeitung des Prinzips zum Ausdruck gelangen.

Carnot läßt in seinen »Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement«, Paris 1803, den Verlust an lebendiger Kraft zu einem Minimum werden und nähert sich damit wieder der d'Alembert'schen Form.

In dem Aufsätze »Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik«, (Crelle, Journal für Mathematik, Bd. IV., 1829) hat Gauß einen mit dem Prinzip der geringsten Wirkung verwandten Satz dahin formuliert: »Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äußere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblicke in möglich größter Übereinstimmung mit der freien Bewegung oder unter möglich kleinstem Zwange, indem man als Maß des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeitteilchen erleidet, die Summe der Produkte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punktes von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet«. Unter der Ablenkung  $da$ , welche ein materieller Punkt von der Masse  $m$  in jedem Zeitteilchen erleidet, wird jener Unterschied in der Bewegung verstanden, welcher eintreten würde, wenn die Bewegung anstatt unter dem Einflusse der vorgeschriebenen Bedingungen unter demjenigen der frei wirkenden Kräfte, also ohne das Vorhandensein dieser Bedingungen ausgeführt werden würde. Nach dem Gauß'schen Satze findet also die zwangloseste Bewegung unter der Bedingung statt, daß die sogenannte Ablenkungssumme

$$\sum m \cdot da^2$$



Einfluß der freiwirkenden Kräfte in Berücksichtigung ziehen, oder es müßte das Prinzip des kleinsten Zwanges, mit dem Trägheitsgesetze in Verbindung gebracht werden. (Mach: »Die Mechanik in ihrer Entwicklung«; Hertz: »Die Prinzipien der Mechanik«). In dieser Verbindung erscheint das Minimumsprinzip in der all-gemeinsten Form, und in dieser erhielt es die vollkommenste und verständlichste Fassung von Castigliano durch seinen »Lehrsatz von der kleinsten Arbeit«, welchen er zum erstenmale im Jahre 1873 in seiner Diplomarbeit als Ingenieur und später in seinem klassischen Werke: »Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications«, Turin 1879, gegeben hat. Begründet durch die Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme und als eine Folgerung seiner berühmten Sätze über den Differentialquotienten der Arbeit, lautet dieser Lehrsatz wie folgt: »Die elastischen Kräfte, welche nach der Deformation des Körpers oder des Systems zwischen den Molekülen auftreten, sind jene, welche die Deformationsarbeit zu einem Minimum machen, insofern man die Bedingungsgleichungen berücksichtigt, welche ausdrücken, daß zwischen diesen Kräften um jedes Molekül Gleichgewicht herrscht«.

Der Zusammenhang des mechanischen Minimumsprinzips mit dem geometrischen Minimumsprinzip wurde schon zur Zeit der Auffindung der methodischen Ausgleichung rechnerisch gehandhabt. Legendre, welcher die Methode der kleinsten Quadrate in einem Anhang zu seinem Werke: »Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes«, Paris 1805, zuerst öffentlich behandelt hat, findet die Analogie des Ausgleichungsproblems mit den Eigenschaften des Schwerpunktes bemerkenswert, indem er zeigt, daß der nach seiner Methode berechnete Mittelpunkt eines beliebigen Punktsystems mit dessen Schwerpunkt zusammenfällt. Berührungspunkte zwischen der Bestimmung des Minimumpunktes und den Gesetzen der Natur finden sich auch bei Laplace (Théorie analytique des probabilités, Paris 1812) und Gauß (Theoria combinationis, Göttingen 1821); Versuche zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate aus mechanischen Prinzipien hat die Literatur seit Ivory's Vergleich mit dem Hebelgesetze (Tilloch's Philosoph. Magaz. 1825 und 1826) nicht wenige aufzuweisen; in besonders zutreffender Weise hat Henke in seiner Inaugural-Dissertation: »Über die Methode der kleinsten Quadrate«, Dresden 1868 und 1894, die Meinung von der Möglichkeit, daß das Ausgleichungsproblem eine ganz allgemeine Bedeutung für die Auffassung von Naturvorgängen haben könne, mit den Worten zum Ausdrucke gebracht: Die durch äußere Einflüsse bewirkten Veränderungen geschehen stets so, daß die veränderten Zustände denjenigen, aus welchen sie hervorgegangen, immer möglichst nahe liegen — und daß man als mathematischen Ausdruck dieses Prinzips den Fundamentalsatz der Methode der kleinsten Quadrate zu betrachten habe.

Nach den jüngsten Untersuchungen ist man im allgemeinen zu der Behauptung berechtigt, daß die Anwendung des natürlichen Erhaltungsprinzips auf die Ausgleichungsrechnung zu der allgemeinen Theorie der kleinsten Summen führt. Wird nun im besonderen ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht die Summe der von den Ablenkungskräften allein verrichteten Arbeiten, die »Ablenkungsarbeit« zu einem Minimum gemacht, dann ist auch der

mathematische Ausdruck dieses Prinzips das Fundamentalgesetz der kleinsten Quadratsummen, und es entspricht das hierbei in Anwendung kommende Rechenverfahren der Gauß'schen Methode der kleinsten Quadrate. Wird aber die Summe der zur Erlangung des Gleichgewichts notwendigen Arbeiten, die »Deformationsarbeit«, auf ein kleinstes Maß gebracht, so erweitert sich das Rechenverfahren zur Methode der kleinsten Produkte, wie sie zum erstenmale in der »Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen«, Wien 1904, unter dem Titel: »Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme« vom Verasser ausführlich behandelt worden ist.

Da diese erweiterte Methode durch Einführung entsprechender, von den vorgeschriebenen Gleichgewichtsbedingungen abhängender Gewichtszahlen immer auf die Gauß'sche Methode zurückgeführt werden kann, so findet die eine wie die andere — unabhängig von der Wahrscheinlichkeitstheorie — nach der strengen Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme oder allgemein durch das natürliche Erhaltungsprinzip ihre mechanische Begründung.

## Einiges über Vermarkungsmateriale aus Kunststein.

Die Erwirkung eines allgemeinen Vermarkungsgesetzes ist zur Sicherung des Grundeigentums unerlässlich, denn erst dann erhält der buchmäßige Nachweis jeder Parzelle im Grundbesitzbogen seine volle Berechtigung, wenn der örtliche Bestand dauernd in Übereinstimmung mit den Katastralmappen und den Urkundenoperaten des Grundbuches erhalten wird. Nachdem von Seite der hohen Regierung vorbereitende Studien zur Erlassung eines Vermarkungsgesetzes gemacht werden, so dürften hier auch einige Bemerkungen über das Vermarkungsmateriale nicht unerwünscht sein.

Bei den ersten Katastralaufnahmen wurden vorzugsweise unbehauene Grenzsteine, sogenannte Feldsteine zur Vermarkung verwendet, auf welche eine Kreuzmarke eingemeißelt wurde. In einigen Gegenden finden wir auch regelmäßig geformte Basaltsäulen als Grenzpunkte vor. Glatt behauene Sand- oder Granitsteine wurden erst bei Berainungen von Eisenbahnterritorien und Herrschaftsgütern allgemein eingeführt. Um Feldsteine mit Sicherheit als Grenzsteine zu erkennen, wurden diesen Steinen sogenannte Zeugen beigelegt, indem unverwesliche Sachen, wie Glas- und Tonscherben, Schlacken und Ziegelbrocken in das Lager des Steines gelegt wurden.

Dieser uralte Brauch bildet die ersten Anfänge einer unterirdischen Vermarkung. Mögen die nur oberirdisch versicherten Grenzpunkte noch so gut vermarktet sein, so sind sie mehr oder weniger der Gefahr einer Verschiebung ausgesetzt, welche sowohl durch Naturereignisse, als auch durch landwirtschaftliche Kulturarbeit herbeigeführt wird. Es ist daher diese Art der Berainung für eine dauernde Sicherung der Eigentumsgrenzen ungeeignet.

Um diesem Übelstande abzuhelfen, wurden in einigen Gegenden Deutschlands und Frankreichs unterirdische Vermarkungen durchgeführt. Es wurden Drain-