Paper-ID: VGI_190534

Über die Auflösung einer Aufgabe durch kombiniertes Einschneiden

Wilhelm Psenner

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **3** (15–16, 17–18), S. 227–231, 261–266

1905

BibTEX:

```
@ARTICLE{Psenner_VGI_190534,
Title = {{\"U}ber die Aufl{\"o}sung einer Aufgabe durch kombiniertes
   Einschneiden},
Author = {Psenner, Wilhelm},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {227--231, 261--266},
Number = {15--16, 17--18},
Year = {1905},
Volume = {3}
}
```

Über die Auflösung einer Aufgabe
durch kombiniertes Einschneiden.

Bekanntlich wird nach Pothenot, wenn drei Punkte gegeben sind, ein vierter dadurch bestimmt, dass von diesem aus, durch Anvisieren der drei gegebenen Fixpunkte, zwei Winkel gemessen werden. Nach Hansen wird die Lage zweier Standpunkte ermittelt, indem von jedem dieser, zwei Winkelmessungen vorgenommen werden.

Zu diesen beiden Aufgaben gesellt sich noch eine dritte, ähnliche, deren Lösung ich nachstehend mitteilen will.

Aufgabe: Sind wie in Fig. 1, die Punkte A, C und B gegeben und werden die Winkel w und β oder α gemessen, so ist der Standpunkt D zu bestimmen.

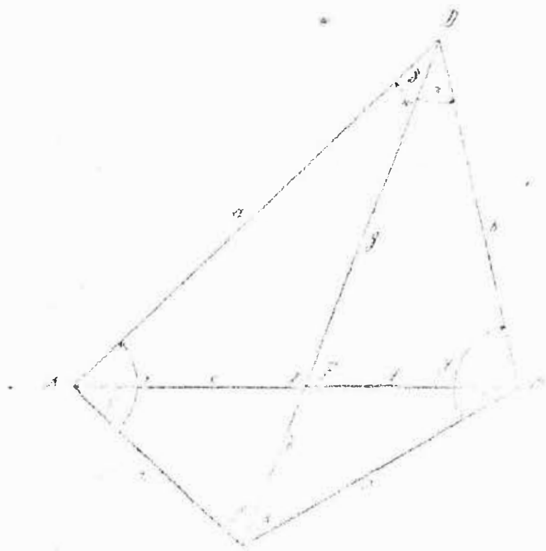

Fig. 1

Auflösung: Nach dem bekannten Sinussatze bestehen zwischen den Seiten und Winkeln in den Dreiecken ADE und EDC die Relationen:

$$\frac{c}{g} = \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)}$$

und

$$\frac{d}{g} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\gamma - \varepsilon)}$$

durch Division

$$\frac{d}{c} = \frac{\sin(\gamma + \delta)\sin \varepsilon}{\sin \delta \sin(\gamma - \varepsilon)}$$

oder, weil nach der goniometrischen Formel

$$\sin(\gamma + \delta)\sin \varepsilon = \frac{-\cos(\gamma + \delta + \varepsilon) + \cos(\gamma + \delta - \varepsilon)}{2}$$

und

$$\sin \delta \sin(\gamma - \varepsilon) = \frac{-\cos(\gamma + \delta - \varepsilon) + \cos(-\gamma + \delta + \varepsilon)}{2}$$

ist, so wird für

$$\delta - \varepsilon = \mu$$

und

$$\delta + \varepsilon = w$$

gesetzt

$$\frac{d}{c} = \frac{-\cos(w+\gamma) + \cos(\mu+\gamma)}{-\cos(\mu+\gamma) + \cos(w-\gamma)}$$

Diese Gleichung nach $\cos(\gamma + \mu)$ aufgelöst, gibt

$$\cos(\gamma+\mu)(c+d) = d\cos(w-\gamma) + c\cos(w+\gamma)$$
$$= d\cos w\cos\gamma + d\sin w\sin\gamma + c\cos w\cos\gamma - c\sin w\sin\gamma$$
$$= \cos w\cos\gamma(c+d) - \sin w\sin\gamma(c-d)$$

oder durch $(c + d)$ dividiert

$$\cos(\gamma+\mu) = \cos w\cos\gamma - \frac{c-d}{c+d}\sin w\sin\gamma \quad \dots \dots \quad 1$$

Aus den Dreiecken AEB und ECB folgt

$$\frac{c}{h} = \frac{\sin\beta}{\sin\varphi}$$

und

$$\frac{d}{h} = \frac{\sin\alpha}{\sin\eta}$$

oder

$$\frac{c}{d} = \frac{\sin\beta\sin\eta}{\sin\varphi\sin\alpha} = \cot z \quad \dots \dots \dots \dots \quad 2$$

Weil im späteren Verlaufe der numerischen Rechnung die Größen p und n, beziehungsweise deren Logarithmen, doch eingeführt werden müssen und weil sich aus dem Dreiecke ACB

$$\frac{\sin\eta}{\sin\varphi} = \frac{n}{p}$$

ergibt, so wird durch Einsetzung dieses Wertes in Gleichung 2

$$\cot z = \frac{n\sin\beta}{p\sin\alpha} \quad \dots \dots \dots \dots \quad 3$$

Aus Gleichung 2 folgt noch

$$\frac{c-d}{d} = \cot z - 1$$

und

$$\frac{c+d}{d} = \cot z + 1$$

oder durch Division

$$\frac{c-d}{c+d} = \frac{\cot z - 1}{\cot z + 1} = \cot(45^0 + z)$$

Dieser Wert in Gleichung 1 eingesetzt, gibt

$$\cos(\gamma+\mu) = \cos w\cos\gamma - \cot(45^0 + z)\sin w\sin\gamma \quad \dots \quad 4$$

woraus, weil z durch Formel 3 gegeben ist, die Größe μ schon bestimmt werden kann.

Diese Gleichung jedoch, welche für die logarithmische Rechnung nicht sehr geeignet ist, muß noch entsprechend umgeformt werden.

Um dieses zu erreichen, wird

$$\cot(45^0 + z)\sin\gamma = \operatorname{tang} v \cos\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5$$

in Gleichung 4 eingesetzt; also

$$\cos(\gamma + \mu) = \cos w \cos\gamma - \operatorname{tang} v \cos\gamma \sin w$$

$$= \frac{\cos\gamma}{\cos v}(\cos w \cos v - \sin w \sin v)$$

oder

$$\cos(\gamma + \mu) = \frac{\cos\gamma}{\cos v}\cos(w + v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6$$

Der Hilfswinkel v wird aus Gleichung 5 bestimmt.

$$\operatorname{tang} v = \operatorname{tang}\gamma \cot(45^0 + z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7$$

Mit Hilfe der Formeln 3, 7 und 6 und weil

$$\gamma = \varphi + \beta = \overset{*}{180} - (\alpha + \delta)$$

ist, wird μ berechnet.

Schließlich folgt aus den Dreiecken ABD und CDB

$$a = \frac{\sin\beta}{\sin\delta}\, n$$

$$b = \frac{\sin\alpha}{\sin\varepsilon}\, p$$

und

$$f = g + h = \frac{\mathrm{sing}(\beta + \delta)}{\sin\delta}\, n = \frac{\sin(\alpha + \varepsilon)}{\sin\varepsilon}\, p$$

Daß eine solche Aufgabe in der Praxis vorkommen kann, will ich hier noch durch einen Fall erwähnen, welcher mich eigentlich auf obige Lösung führte.

Mit der Überzeugung, auf dem einen oder anderen Weg einen Ausgangspunkt zur Vornahme einer Vermessung zu finden, begab ich mich, gelegentlich der Bereisung einer Gemeinde, ins Gebirge. Alles Suchen eines Anhaltspunktes war umsonst; ja selbst durch Rückwärtseinschneiden einen solchen zu bestimmen war unmöglich, weil ich nur auf zwei Fixpunkte einen günstigen Ausblick hatte. Denselben von der Talsohle aus zu bestimmen, erachtete ich für zeitraubend, weil wegen der großen Entfernung eine lange Basis genommen werden mußte. Nach kurzer Überlegung kam ich auf den Gedanken obiger Aufgabe, deren Lösung mir, wenigstens graphisch, sofort klar wurde.

Ich visierte auf zwei Kirchtürme A und C und bestimmte dadurch den Winkel w. - Hierauf ließ ich auf dem Standpunkte D ein Signal zurück und begab mich auf den Punkt B und maß den Winkel β.

Nun können in Gleichung 6 anstatt der Größen δ und ε die Größen y und x leicht eingeführt werden

$$\begin{array}{l} \delta = 180 - x - \beta \\ \varepsilon = 180 - y - \alpha \\ \underline{\;-\quad\;\; -\qquad\; +\quad +\;} \\ \delta - \varepsilon = y - x + \alpha - \beta = \mu \end{array}$$

Hiezu noch

$$\gamma = \varphi + \beta$$

gibt

$$\mu + \gamma = y - x + \alpha + \varphi$$

Durch Einsetzung dieser Summen in Gleichung 6 folgt:

$$\cos(y - x + \alpha + \varphi) = \frac{\cos\gamma}{\cos v} \cos(w + v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8$$

und aus der Figur

$$y + x = 360 - (w + \beta + \alpha)$$

Die Größen a, b und f ergeben sich ohne Weiteres

$$a = \frac{\sin\beta}{\sin(x + \beta)} n$$

$$b = \frac{\sin\alpha}{\sin(y + \alpha)} p$$

und

$$f = \frac{\sin x}{\sin(x + \beta)} n = \frac{\sin y}{\sin(y + \alpha)} p$$

Noch einfacher gestaltet sich die graphische Auflösung dieser Aufgabe.

Mit den drei auf dem Meßtische aufgetragenen Punkten A, B und C wird nach Erreichung des Standpunktes D die Tischplatte über demselben derart aufgestellt, daß die erhaltenen Schnitte so scharf als möglich ausfallen

Durch Anlegen der Kippregel zuerst an A und dann an C und, ohne die Lage des Meßtisches zu ändern, auf beide Punkte visierend, wird durch Rückwärtseinschneiden der Schnitt D' (Fig. 2) bestimmt.

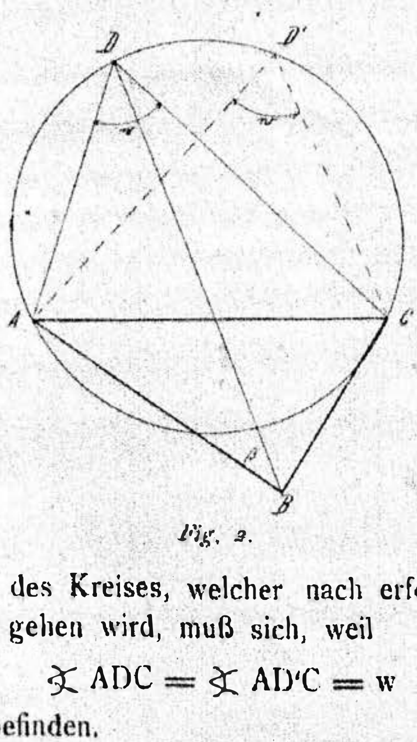

Fig. 2.

Auf der Peripherie des Kreises, welcher nach erfolgter Konstruktion durch die Punkte A, C und D' gehen wird, muß sich, weil

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle AD'C = w$$

ist, der Standpunkt D befinden.

Um die Lage von D zu bestimmen, wird vom Punkte B, nach Orientierung des Meßtisches, durch Anvisieren des Signales auf dem soeben verlassenen Standpunkte der Rayon BD gezogen, welcher die Peripherie des Kreises in D schneidet.

Bei Anwendung dieser Aufgabe sind drei Hauptfälle zu unterscheiden:

1. Wenn Punkt B außerhalb des Dreieckes ABC und die Gerade, welche B mit D verbindet, zwischen den Punkten A und C zu liegen kommt.

2. Wenn Punkt B außerhalb des Dreieckes und die Gerade BD entweder rechts von C oder links von A fällt.

3. Wenn Punkt B sich innerhalb des Dreieckes befindet.

(Schluß folgt.)

Wilhelm Psenner
k. k. Ober-Geometer.

Bemerkungen über die Alterierung
der durch die Mitte der Flüsse gebildeten Reichsgrenzen

Die Flüsse als Reichsgrenzen veranlassen bei der Durchführung ihrer Darstellung in den Katastral-Operaten oft Schwierigkeiten, gegen welche auch mit dem k. k. Finanzministerial-Erlasse vom 6. Februar 1895, Z. 57.095/1894 nicht immer auszukommen ist. Wir wollen einen Fall erörtern, welcher uns zufälligerweise zur Erledigung zugewiesen wurde.

Auf Grund einer Anzeige der Landesregierung wurde nämlich zur Kenntnis gebracht, daß in einer Katastralgemeinde die für Regulierungszwecke einzulösenden Grundstücke nicht endgiltig übernommen werden können, weil aus dem Katastral-Operate nicht zu ersehen ist, wem die angeschwemmten, durch bautechnische Organe der Flußregulierung aufgenommenen und auf einer Situationsskizze dargestellten Parzellen angehören. Es wurde angesucht, diese Grundstücke in einem Flächenausmaße von über 16 *ha* vom Vermessungsbeamten parzellieren zu lassen und dadurch die Möglichkeit zu schaffen, den Kaufpreis dem tatsächlichen Besitzer ausfolgen zu können, weil die Interessenten, infolge der schon über zwei Jahre sich hinziehenden Angelegenheit, ungeduldig wurden.

Nach der Einsichtnahme in die Originalmappe wurde festgestellt, daß die angeschwemmten Parzellen über die ursprüngliche in der Originalmappe dargestellte Mitte des Grenzflusses weit hinausgegangen sind, daß somit mit den Bestimmungen des Finanzministerial-Erlasses Z. 57.095/1904 nichts auszurichten sei, weil die Objektsänderungen in dem mit unserem Kronlande angrenzenden Territorium des Nachbarstaates sich gebildet haben.

Im vorliegenden Falle kann daher mit gewöhnlichen Maßregeln nicht abgeholfen werden. Zur Erledigung desselben wäre somit nach § 3 des Gesetzes vom 23. Mai 1883, Nr. 83 eine gemischte Grenzkommission zusammenzusetzen sein, welche mit einem fachtechnischen Elaborate in der Hand über die Angelegenheit zu entscheiden hätte.

Vor der endgiltigen Flußregulierung ist jedoch die Verfassung eines entsprechenden Situationsplanes nicht denkbar und man müßte sich auf eine gewöhnliche Aufnahme beschränken, in welche das Projekt der veranschlagten Regulierung einzutragen wäre. Es ist leicht einzusehen, daß eine Entscheidung,

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen.

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III/2 Kegelgasse 15, Parterre, T. 3.
K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.

Erscheint am 1. jeden Monats. Jährlich 24 Nummern in 12 Doppelheften.
Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.

Expedition und Inseratenaufnahme durch die Buchdruckerei J. Wladarz (vorm. Haase) Baden bei Wien, Pfarrgasse 3.

Nr. 17—18. **Wien, am 1. September 1905.** III. Jahrgang.

Über die Auflösung einer Aufgabe
durch kombiniertes Einschneiden.

(Schluß).

Nachdem der erste Hauptfall bereits besprochen wurde, wenden wir uns zu dem zweiten, Figur 3.

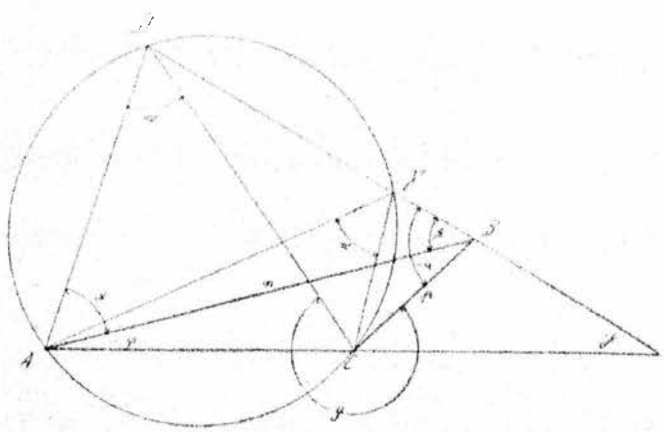

Fig. 3.

Es ergibt sich aus der Figur ohne weiteres, daß in diesem Falle sogar zwei Lösungen der Aufgabe möglich sind; denn sowohl Punkt D als auch F erfüllen dieselben Bedingungen.

Daraus folgt, daß die Lage des Standpunktes im vorninein beiläufig bekannt sein muß, um zwischen den beiden Auflösungen die richtige zu wählen Sind D und F zu nahe beieinander, so bleibt die Aufgabe unbestimmt.

Bei Anwendung der entwickelten Formeln sind ganz besonders die Vorzeichen der eingeführten Größen zu beachten.

So war z. B. im ersten Hauptfalle

$$\gamma = \beta + \varphi$$

während im zweiten

$$\gamma = \beta - \varphi$$

sein wird, was sich aus der Figur 3 ergibt, weil im ersten Hauptfalle sämtliche Größen positiv angenommen wurden.

Der dritte Hauptfall (Fig. 4) bietet, außer den Vorzeichen der Größen, nichts beachtenswertes

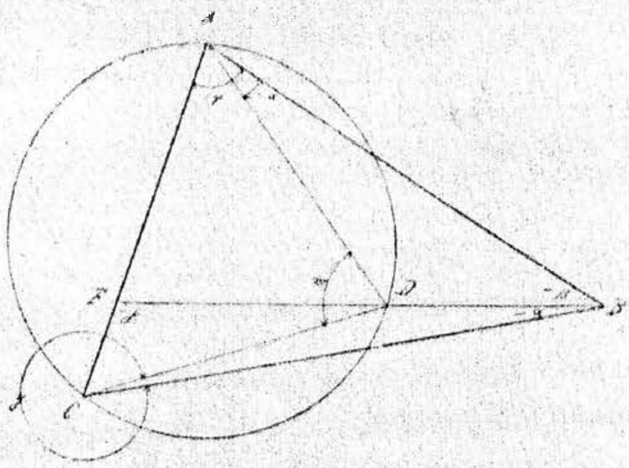

Fig. 4.

Wenden wir uns wieder zur Formel 8.

Diese, wie später noch gezeigt werden wird, kann sowohl positive als negative Werte annehmen.

Im ersten Falle also, wenn

$$y - x + \varphi + \alpha = \sigma$$

gesetzt wird, ist auch

$$\cos(y - x + \varphi + \alpha) = \cos\sigma = \cos(360 - \sigma)$$

und im zweiten

$$-\cos(y - x + \varphi + \alpha) = \cos(180 - \sigma) = \cos(180 + \sigma).$$

Somit, wenn

$$\cos\sigma > 0$$

ist

$$y_1 - x_1 + \varphi + \alpha = \sigma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots 9$$

und

$$y_2 - x_2 + \varphi + \alpha = 360 - \sigma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots 10$$

für

$$\cos\sigma < 0$$

wird

$$y_1 - x_1 + \varphi + \alpha = 180 - \sigma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots 11$$

und

$$y_2 - x_2 + \gamma + \alpha = 180 + \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12$$

in beiden Fällen eine doppelte Auflösung.

Im ersten und dritten Hauptfalle findet die zweifache Lösung keine praktische Anwendung, wohl aber, wie bereits erwähnt, im zweiten.

Um sich einigermaßen über die Funktion cos σ Rechenschaft abzulegen, ob sie positive oder negative Werte annimmt, wird nötig sein, die entwickelten Formeln etwas näher zu untersuchen.

Zu diesem Zwecke konstruieren wir den zweiten Hauptfall noch einmal (Fig. 5) und tragen die Größe

$$d = \overline{EK} = \overline{EC}$$

auf die Verlängerung der Geraden AE.

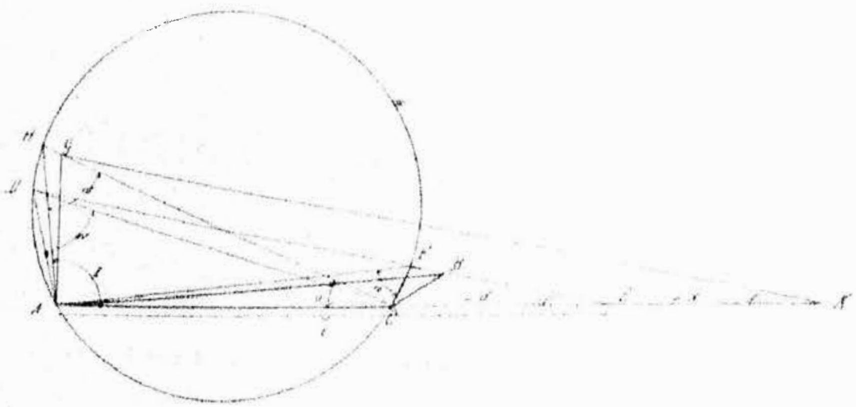

Fig. 5.

Wird ferner

$$GA \perp AE$$

und

$$GK \parallel DE$$

gemacht, so ist

$$\sphericalangle GKA = \sphericalangle DEA = \gamma$$

Die Gerade, welche C mit G verbindet, schneidet die Peripherie des Kreises in H. Wird dieser Punkt noch mit A verbunden, so erhalten wir das Dreieck AHC, dessen Winkel, wie nachstehend bezeichnet werden sollen.

$$\sphericalangle HCA = v$$
$$\sphericalangle HAC = l$$

und

$$\sphericalangle AHC = w = \sphericalangle ADC.$$

Gleichung 7 ist zusammengesetzt aus tang γ und cot $(45^0 + z)$. Ferner wurde gefunden, daß

$$\cot\,(45^0 + z) = \frac{c - d}{c + d}$$

ist. Weil aber im zweiten Hauptfalle d negativ wird, so ist

$$\cot\,(45^0 + z) = \frac{c + d}{c - d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13$$

Diese Größe bleibt positiv, solange

$$d < c > 0$$

ist. Setzen wir noch für

$$\overline{GA} = k$$

und

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{k}{c + d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14$$

was in Figur 5 bereits geschehen, so wird, sobald

$$k > 0$$

ist, auch

$$\operatorname{tang} \gamma > 0$$

mithin

$$\gamma < \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15$$

Werden nun in Gleichung 7 für tang γ und cot $(45^0 + z)$ die Werte der Gleichungen 13 und 14 eingesetzt, so erhalten wir

$$\operatorname{tang} v = \frac{k}{c + d} \, \frac{c + d}{c - d} = \frac{k}{c - d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16$$

und unseren Voraussetzungen nach, auch

$$v < \frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 17$$

Weil in Figur 5 für

$$\overline{GA} = k$$

und

$$\overline{AC} = c - d$$

angenommen wurde, so entspricht

$$\sphericalangle ACH = v$$

tatsächlich dem Winkel v in Gleichung 16

Nimmt der Standpunkt D die Lage in Figur 6 ein, so folgt, weil für die Größen c, d und k dieselben Voraussetzungen gelten wie im Falle Figur 5, daß auch

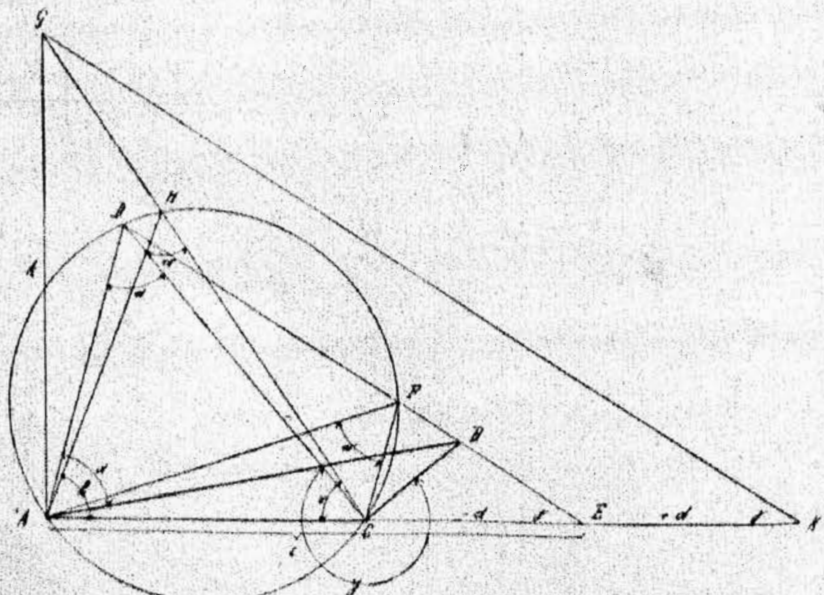

Fig. 6.

$$\gamma < \frac{\pi}{2}$$

und

$$v < \frac{\pi}{2}$$

ist.

Weil in beiden Fällen die Größen γ und v kleiner als 90^{0} sind, so werden

$$\cos \gamma > 0$$

und

$$\cos v > 0$$

sein, mithin auch

$$\frac{\cos \gamma}{\cos v} > 0$$

Das Vorzeichen von $\cos (y - x + \alpha + \varphi)$ in Gleichung 8 ist somit in beiden Fällen des zweiten Hauptfalles nur mehr von $\cos (w + v)$, beziehungsweise von den Summen $w + v$ abhängig.

Nachdem

$$w + v = 180 - l$$

ist, so folgt für

$$l = \frac{\pi}{2}$$

daß

$$w + v = \frac{\pi}{2}$$

wird, somit

$$\cos (w + v) = 0$$

Damit ist der Beweis geliefert, daß die Größe $\cos (y - x + \alpha + \varphi)$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt.

Im ersten Falle werden, um die Lage der Punkte D und F bestimmen zu können, die Gleichungen 11 und 12, im zweiten die Gleichungen 9 und 10 angewendet.

Es dürfte sich empfehlen, vor Anwendung der rechnerischen Methode die Aufgabe zuerst graphisch, in verjüngtem Maßstabe nach der bereits angegebenen Methode für Meßtischoperationen, aufzulösen, um die erzielten Resultate sinngemäß anwenden zu können.

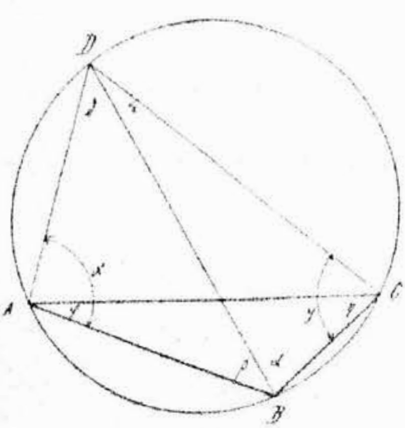

Fig. 7.

Für den Fall, daß sich alle vier Punkte auf der Peripherie eines Kreises befinden, ist eine Lösung auch möglich; sie gestaltet sich sogar sehr einfach.

Auch diese möge noch hier mitgeteilt werden. (Figur 7).

Es folgt ohne weiters

$$\varepsilon = \varphi$$

und

$$\delta = \eta$$

somit

$$x = 180 - (\delta + \beta) = 180 - (\eta + \beta)$$

und

$$y = 180 - (\varepsilon + \alpha) = 180 - (\varphi + \alpha).$$

Wilhelm Psenner
k. k. Ober-Geometer.

Tachymetrische Hilfstabelle.

Von Oberingenieur **S. Wellisch.**

Bedient man sich in der tachymetrischen Praxis zur Ermittlung der Höhenunterschiede

$$h = \tfrac{1}{2} D \sin 2\alpha$$

der «Hilfstafeln für Tachymetrie» von Dr. W Jordan, so erhält man die Werte dieses Ausdruckes direkt nur für die ganzen Meter der unreduzierten Distanzen D. Will man auch die Dezimeter von D berücksichtigen, so kann man wohl, wie Jordan meint, «nach dem Anblick der Nachbarzahlen flüchtig interpolieren», da aber die Berücksichtigung der einzelnen Minuten des Höhenwinkels α auch schon eine Okular-Interpolation erfordert, so wird dann die Benützung der genannten Tafeln nicht nur ziemlich umständlich, sondern entbehrt bei genaueren tachymetrischen Arbeiten auch der wünschenswerten Zuverlässigkeit.

Im nachstehenden sei nun eine kleine Tabelle mitgeteilt, welche die entsprechenden Korrektionen als Additamente zu den Jordan'schen Tafelwerten direkt liefert. Die allgemeine Anwendbarkeit dieser Tabelle beruht darauf, daß die einzelnen Tabellenwerte — entsprechend den Differenzen

$$\tfrac{1}{2}(D + n) \sin 2\alpha - \tfrac{1}{2} D \sin 2\alpha = \tfrac{1}{2} n \sin 2\alpha$$

berechnet — von den veränderlichen Argumenten D unabhängig sind.

Beispiele:

1. D = 182·8 und $\alpha = 5^0\ 23'$ gibt
   aus Jordan's Hilfstafel für D = 182, S. 175: . . 17·00
   aus der Hilfstabelle für n = 0·8 und $\alpha = 5^0$: . . 0·07
   h = 17·07 *m*

2. D = 56·6 und $\alpha = 24^0\ 10'$ gibt
   aus Jordan's Hilfstafel für D = 56, S. 47: . . . 20·92
   aus der Hilfstabelle für n = 0·6 und $\alpha = 24^0$: . . 0·22
   h = 21·14 *m*