Beitrag zum Pothenot'schen Problem

Karl Beredick [1]

[1] *Geometer im k.k. Triangulierungs- und Kalkül-Bureau*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **3** (7–8), S. 83–85

1905

BibTEX:

```
@ARTICLE{Beredick_VGI_190513,
Title =  {Beitrag zum Pothenot'schen Problem},
Author =  {Beredick, Karl},
Journal =  {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages =  {83--85},
Number =  {7--8},
Year =  {1905},
Volume =  {3}
}
```

Schon Gauß sagt irgendwo, daß es in der Mathematik keine wahren Kontroversen gibt — daher haben wir beide Recht, ich und der Herr Wellisch, freilich jeder in seiner Weise.

Die von mir angegebenen Formeln richtig angewendet sind demnach nicht »haltlos«, sondern richtig und der »Ausnahmsfall« bildet eben den Kern der Sache.

Das Prinzip, welches hier angewendet wurde, ist ja sehr alt und basiert auf der Newton'schen Formel

$$f(x_0 + \triangle x) = f(x_0) + \triangle x \, f'(x_0)$$

es wird tagtäglich in mannigfachster Weise verwendet; ich glaubte daher es voraussetzen zu müssen, umsomehr, als im gegebenen Falle die Monstruosität einer beim Wörtchen »und« möglichen Gleichung

$$(\varphi + \infty) + (\psi - \infty) = \triangle B = o$$

sofort in die Augen springt.

Lemberg, am 3. März 1905.

Beitrag zum Pothenot'schen Problem.

Von **Karl Beredick,** Geometer im k. k. Triangulierungs- und Kalkül-Bureau.

Die Berechnung der Koordinaten von Punkten, welche durch Rückwärtseinschneiden bestimmt wurden, erfolgt bekanntlich mit Hilfe der der Mittelvisur gegenüberliegenden Winkeln φ und ψ, deren Werte aber erst durch eine längere Rechnungsoperation ermittelt werden können.

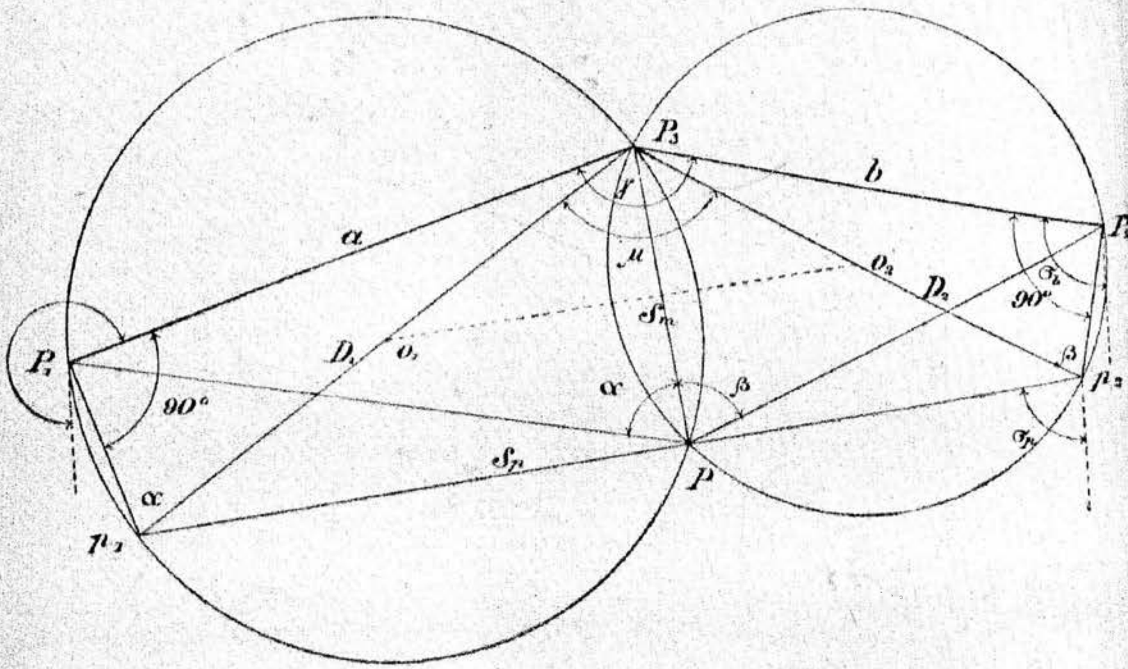
Im nachfolgenden soll ein Verfahren, welches bei der graphischen Lösung des Pothenot'schen Problemes bereits seine Anwendung gefunden hat, verwertet werden, um ohne Bestimmung der Winkel φ und ψ die Koordinaten solcher Punkte zu berechnen.

In Figur 1 sei P der zu suchende Punkt, auf welchem durch die Visuren nach den gegebenen Punkten P_1 P_2 P_3 die $\sphericalangle\, \alpha$ und $\sphericalangle\, \beta$ erhalten wurden. D_1 und D_2 seien die Durchmesser der durch a und $\sphericalangle\, \alpha$, bezw. durch b und $\sphericalangle\, \beta$ bestimmten Kreise, deren Mittelpunkte O_1 und O_2 sind.

Errichtet man in dem Punkte P_1 eine Senkrechte auf a und in P_2 eine Senkrechte auf b, so schneiden diese ihren zugehörigen Kreis in p_1, bezw. p_2.

Die Gerade $p_1 p_2$ muß durch den Punkt P gehen und die Mittelvisur PP_3 auf ihr senkrecht stehen, was aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $O_1 P_3 O_2$ und $p_1 P_3 p_2$ und aus der Eigenschaft der Zentrale mit der gemeinschaftlichen Sehne sich ergibt.

Diese Betrachtungen führen nun zu folgendem Rechnungsgang: Man ermittle zunächst die Koordinaten der Punkte p_1 und p_2 aus Länge und Richtung der Lote $P_1 p_1$ und $P_2 p_2$.



Figur 1.

Ist der Südwinkel $P_1 P_3 = \sigma_a$, dann ergibt sich

für den Südwinkel der Seite $P_1 p_1 = \sigma_a \pm 90^0$, wenn $\alpha \gtrless 90^0$

für den Südwinkel der Seite $P_2 p_2 = \sigma_b \mp 90^0$ wenn $\beta \gtrless 90^0$

die Länge von $P_1 p_1 = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$ und jene von $P_2 p_2 = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta}$ und sind deren absolute Werte in die Rechnung einzustellen.

Sodann bestimme man aus den Koordinaten von p_1 und p_2 den Südwinkel σ_p und die Länge S_p der Geraden $p_2 p_1$. Der Südwinkel der Mittelvisur ist dann

$$\sigma P_3 P = \sigma_p + 270^0$$

zur Berechnung ihrer Länge S_m verwenden wir die Fläche des Dreieckes $p_1 P_3 p_2$;

es ist $D_1 = \frac{a}{\sin \alpha}$, $D_2 = \frac{b}{\sin \beta}$

$$2 f = S_p . S_m = D_1 D_2 \sin (\alpha + \beta + \gamma - 180) \text{ und daraus}$$

$$S_m = \frac{D_1 D_2 \sin \mu}{S_p}$$

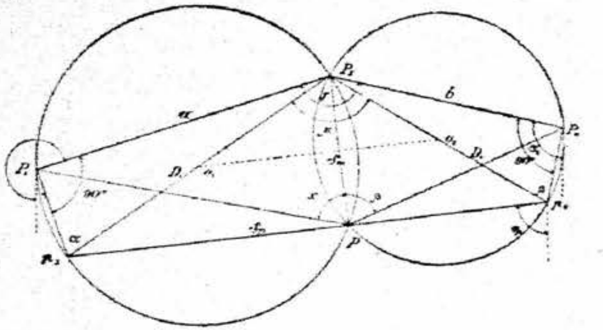
Die Koordinaten des Punktes P werden nun aus Südwinkel und Länge der Mittelvisur in bekannter Weise gerechnet.

Zur Kontrolle werden dann im Muster VIII die Südwinkel $\sigma P_1 P$ und $\sigma P_2 P$ bestimmt, welche mit den durch obige Rechnung erhaltenen übereinstimmen müssen.

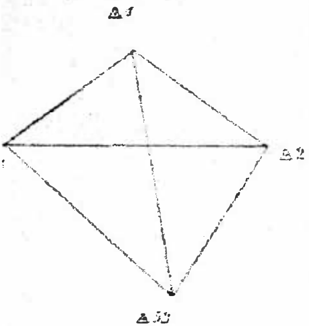
In der nachfolgenden Tabelle wurde zur Erläuterung dieser Methode dasselbe Beispiel gewählt, welches in der Instruktion für Polygonal-Vermessungen bei der Bestimmung eines Punktes durch innere Richtungen gerechnet wurde.

Zu bestimmender Punkt ⩓ 53

I. Berechnung der vorläufigen Koordinaten



	°	′	″										
σ_a	204	26	51	log a — log sin α = log D_1				log b — log sin β = log D_2				log S_m = log D_1 + log D_2 + log sin μ — log S_p	
σ_b	128	09	47	log a — log tg α = log $P_1 p_1$				log b — log tg β = log $P_2 p_2$				log D_1 + log D_2	6·57577
γ	76	17	04	—log sin α	9·91284	log D_1	3·25066	—log sin β	9·96035	log D_2	3·32511	+ log sin μ	9·84570
α	125	05	53	log a	3·16350			log b	3·28546				6·42147
β	114	06	42	—log tg α	0·15319	log $P_1 p_1$	3·01031	—log tg β	0·34914	log $P_2 p_2$	2·93632	— log S_p	3·55716
μ	315	29	39									log S_m	2·86431



σ $P_1 p_1$ = σ_a ± 90°, wenn α ≷ 90; σ $P_2 p_2$ = σ_b ∓ 90°, wenn β ≷ 90		log δy, log δx		y	x	Δy = y_{p_1} — y_{p_2}; Δx = x_{p_1} — x_{p_2}	log Δy; log Δx	3·55461; 2·59043
log sin σ $P_1 p_1$	9·95920		P_1	—18152·68	—111044·47			
log $P_1 p_1$	3·01031	2·96951		+932·20	—423·80	Δy = +3586·01	log tg φ	0·96418
log cos σ $P_1 p_1$	9·61685	2·62716	p_1	—17220·48	—111468·27	Δx = + 389·43	φ	83° 48′ 08″
log sin σ $P_2 p_2$	9·79092		P_2	—20272·86	—111178·68	σ_p = 83° 48′ 08″	log sin φ	9·99745
log $P_2 p_2$	2·93632	2·72724		—533·63	—679·02		log cos φ	9·03327
log cos σ $P_2 p_2$	9·89556	2·83188	p_2	—20806·49	—111857·70		log S_p	3·557 16 / 16

log δy_P = log S_m sin σ_m; log δx_P = log S_m cos σ_m				y	x
log sin σ_m	9·03327		P_3	—18755·73	—112370·96
log S_m	2·86431	1·89758		—78·99	—727·38
log cos σ_m	9·99745	2·86176	P	18834·72	—111643·58

$\sigma_m = \sigma_p - 270° = 353° 48′ 08″$

σ $P_1 P = \sigma_m - \alpha = 228° 42′ 15″$

σ $P_2 P = \sigma_m + \beta = 107° 54′ 50″$