Paper-ID: VGI_190502

Koordinaten des Union-Gedenkhügels in Lemberg

Agenor Lewicki [1]

[1] *k.k Geometer in Kalusz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **3** (1–2, 3–4), S. 6–10, 31–33

1905

BibTEX:

```
@ARTICLE{Lewicki_VGI_190502,
Title = {Koordinaten des Union-Gedenkh{\"u}gels in Lemberg},
Author = {Lewicki, Agenor},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {6--10, 31--33},
Number = {1--2, 3--4},
Year = {1905},
Volume = {3}
}
```

Daran anknüpfend möge eines Diagrammes gedacht werden, welches die Aufsuchung verloren gegangener Punkte sehr erleichtert, insoferne alle zur Aufsuchung des Punktes erforderlichen Rechnungen im voraus zu Hause erledigt werden können.

Vorausgesetzt wird die Möglichkeit der Anwendung des Rückwärtseinschneidens. Die wahren Winkel mögen α, β sein; die in der Nähe des aufzusuchenden Punktes beobachteten seien (α), (β).

Man kann dann mittels der Formel (3) leicht eine lineare Gleichung

$$\triangle \alpha = M \triangle x + N \triangle y$$

$$\triangle \beta = M' \triangle x + N' \triangle y$$ aufstellen.

Setzt man für $\triangle \alpha$ und $\triangle \beta$ der Reihe nach ± 0, $\pm 2'$, $\pm 4'$, $\pm 6'$ etc., so ergeben sich hieraus zwei Systeme von Geraden, bezogen auf den wahren Ort des gesuchten Punktes, welche zu Hause gezeichnet werden können. Die Feldbeobachtung gibt durch

$$(\alpha) - \alpha \qquad (\beta) - \beta$$

den relativen Ort des Standpunktes gegenüber dem gesuchten Punkte, der nun leicht durch direkte Abmessung zu finden ist.

Koordinaten des Union-Gedenkhügels in Lemberg.

Von Agenor Lewicki, k. k. Geometer in Kalusz.

Auf einer Anhöhe Lembergs, Löwenburg (Sandberg) genannt, befindet sich einer der wichtigsten trigonometrischen Punkte, der Nullpunkt des Koordinatensystemes für Galizien. Im Jahre 1887 wurde an dieser Stelle der «Union-Gedenkhügel» errichtet und der trigonometrische Punkt gänzlich verschüttet.

Vor der Errichtung des Hügels wurden über Auftrag des k. k. Finanz-Ministeriums vom Geometer Adolf Skoda die erforderlichen Vermessungen vorgenommen und an der Anhöhe fünf neue Punkte zur späteren Erneuerung des Nullpunktes festgelegt.

Die Herstellung des verschüttteten Punktes nach dem vollendeten Hügelbaue sollte der Stadtmagistrat Lemberg im Einvernehmen mit dem k. k. Finanzministerium durchführen — was jedoch aus unbekannten Gründen bis nun nicht geschehen ist.

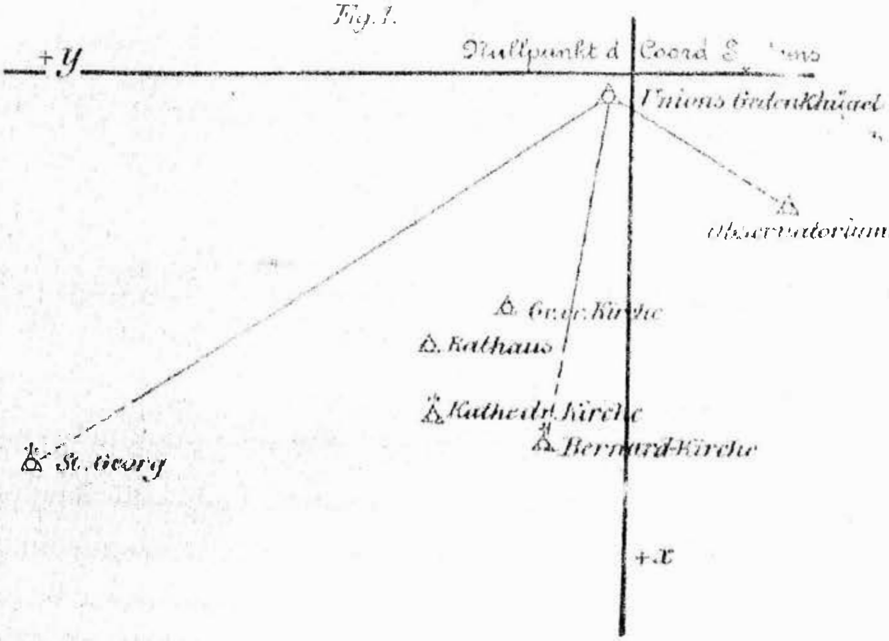
Bei der Vornahme gewisser Vermessungen im Jahre 1899 habe ich mich überzeugt, daß die Entfernung des an der Hügelspitze angebrachten Mastbaumes von dem ursprünglichen Nullpunkte eine so bedeutende ist, daß man die Hügelspitze als Nullpunkt des Koordinaten-Systems nicht annehmen kann. Nach dieser Überzeugung bin ich zur nachstehend bezeichneten Koordinaten-Berechnung geschritten.

Nach Berechnung der Koordinaten des Union-Gedenkhügels kann man sodann den ehemaligen Nullpunkt bestimmen, da er aber ungefähr 10 *m* unterhalb der Hügelspitze auf das Glacis fallen würde und deshalb nicht gut sichtbar wäre, erscheint es besser, die Erneuerung des Nullpunktes aufzugeben und künftighin bei Vermessungen den neu bestimmten Punkt «Union-Gedenkhügel» zu benützen.

Koordinaten-Berechnung

In einer Entfernung von 0·73 *m* von dem an der Hügelspize angebrachten Mastbaume habe ich folgende trigonometrische Punkte beobachtet: Observatorium (**y = — 523·68, x = + 358·24**), Bernardinerkirche (y = + 313·56, x = + 959·72), Griechisch-orient. Kirche (y = + 339·42, x = + 666·98), Rathaus (y = + 573·13, x = + 707·69), Kathedralkirche (y = + 654·92, x = + 826·84) und St. Georgskirche (y = + 1893·23, x = + 1060·31).

Fig. 1.

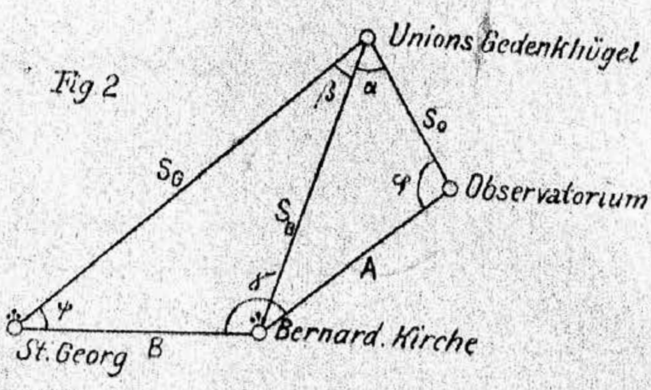


Reduktion der exzentrisch gemessenen Richtungen auf das Zentrum (Mastbaum)

Tab. I.

Beobachtete Punkte	Re auf dem exzentr. Stande beob. Richtungen			Rz auf Nullrichtung E.C reduz. Richt.			δ''	Rc = Rz + δ auf das Zentrum reduz. Richt.			Bemerkungen
1	2			3			4	5			6
	°	'	"	°	'	"	"	°	'	"	
Observatorium	0	0	0	173	10	22	+28"	0	0	28	für Re von 0°—180° + von 180°—360° —
Bernardinerkirche	78	51	40	247	2	2	—2' 18"	78	49	22	
Griech.-orient. Kirche . .	82	42	3	255	52	25	—3' 17"	82	38	46	
Kathedralkirche	94	13	41	267	24	3	—2' 23"	94	11	18	
Rathaus	94	50	4	268	0	26	—2' 38"	94	47	26	
St. Georg	116	42	50	289	53	12	—1' 5"	116	41	45	
Unionshügel (Mastbaum) .	186	49	38	0	0	0	—	—	—	—	

Fig 2



In Tabelle II ist die Detail-Berechnung dargestellt.

Tab. II.

$$\text{tang (BO)} = \frac{yO - yB}{xO - xB} \qquad a = \frac{yO - yB}{\sin (BO)} \qquad \text{cotg}\ \mu = \frac{B \sin\alpha}{A \sin\beta} \qquad SO = \frac{a . \sin (180 - \alpha + \varphi)}{\sin \alpha}$$

$$\text{tang (BG)} = \frac{yG - yB}{xG - xB} \qquad b = \frac{yG - yB}{\sin (BG)} \qquad SG = \frac{B . \sin 180 - (\beta + \psi)}{\sin \beta} \qquad SB = \frac{A . \sin \varphi}{\sin \alpha}$$

yO — yB	−837·24	α	73° 48′ 54″
xO — xB	−601·48	β	42° 52′ 23″
yG — yB	+1579·67	γ	147° 56′ 59″
xG — xB	+100·59	Südw. (BO)	234° 18′ 22″
log (yO — yB)	2·9228500	Südw. (BG)	86° 21′ 23″
log (xO — xB)	2·7792212	$\alpha + \beta + \gamma$	264° 38′ 16″
log tang (BO)	10·1436288	μ	24° 46′ 8″
log (yG — yB)	3·1985664	$\varphi + \psi$	95° 21′ 44″
log (xG — xB)	2·0025548	$\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$	47° 40′ 52″
log tang (BG)	11·1960116	$\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$	22° 2′ 9″
log sin (BO)	9·9096339	φ	69° 43′ 1″
log A	3·0132161	ψ	25° 38′ 43″
log sin (BG)	9·9991212	α	73° 48′ 54″
log B	3·1994452	β	42° 52′ 23″
log sin α	9·9824371	$\alpha + \varphi$	143° 31′ 55″
log sin β	9·8327491	$\beta + \psi$	68° 31′ 6″
log cotg μ	10·3359171	Südw. (BO)	234° 18′ 22″
log tang $\frac{\varphi + \psi}{2}$	10·0407044	Südw. (OB)	54° 18′ 22″
log cotg $(45 + \mu)$	9·5664905	φ	69° 43′ 1″
log tang $\frac{\varphi - \psi}{2}$	9·6071949	Südw. (OU)	124° 1′ 23″
log sin $(\alpha + \varphi)$	9·7740601		
log SO	2·8048391		
log sin $(\beta + \psi)$	9·9687326		
log SG	3·3354287		
log sin φ	9·9721988		
log SB	3·0029778		

Jetzt werden die vorläufigen Koordinaten nach den bekannten Formeln berechnet.

$$y_U = y_0 + dy = y_0 + S_0 \sin(OU)$$
$$x_U = x_0 + dx = x_0 + S_0 \cos(OU)$$

$\log S_0 = 2{\cdot}8048391$	$\log S_0 = 2{\cdot}8048391$
$\log \sin(OU) = 9{\cdot}9184563$	$\log \cos(OU) = 9{\cdot}7478206$
$\log dy = 2{\cdot}7232954$	$\log dx = 2{\cdot}5526597$
$dy = +\ 528{\cdot}80$	$dx = -\ 356{\cdot}98$
$y_0 = -\ 523{\cdot}68$	$x_0 = +\ 358{\cdot}24$
$y_U = +\ \ 5{\cdot}12$	$x_U = +\ \ 1{\cdot}24$

Zur Kontrolle können die vorläufigen Koordinaten aus den zwei übrigen Richtungen ermittelt werden.

Koordinaten-Ausgleichung.

Die vorläufigen Koordinaten werden jenen Richtungsbeobachtungen nicht entsprechen, welche bei ihrer Ermittlung nicht in Rechnung gezogen wurden.

Um die diesfalls sich ergebenden Widersprüche auszugleichen, sind den vorläufigen Koordinaten Verbesserungen δx und δy beizufügen, welche den Bedingungen der Methode der kleinsten Quadrate gemäß so zu bestimmen sind, daß die Summe der Quadrate der infolge der gedachten Koordinatenverbesserungen den Beobachtungsresultaten zukommenden Verbesserungen v, nämlich $v' v' + v'' v'' + \ldots = [v\,v]$ ein Minimum wird.

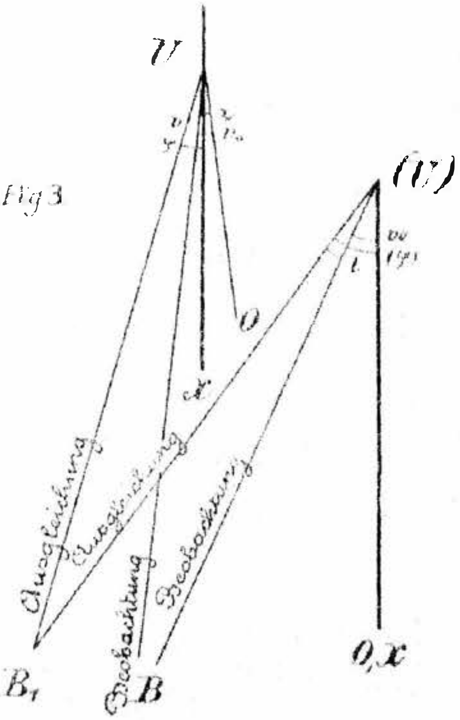


Fig 3

Die auf dem zu bestimmenden Punkte beobachteten Richtungen haben keine bestimmte Orientierung, z. B. die Richtung nach Observatorium ist als Nullrichtung angenommen. Sobald man aber die vorläufigen Koordinaten berechnet hat, oder man von anderwärts nur einen vorläufigen Südwinkel zur Verfügung hat, kann man auch den gemessenen Richtungssatz näherungsweise so drehen, daß alle Richtungen nahezu mit dem Südwinkel stimmen, z. B. der Strahl Unionshügel — Observatorium ungefähr den vorläufigen Südwinkel 304° 1' 26" erhalten wird; wir können also den ganzen Satz um 304° 0' 58" verdrehen. (Tab. III. Kol. 7 und 8). Die so ermittelten, vorläufig orientierten Richtungen " r_0 werden wie unmittelbar gemessene Größen behandelt, denn es übergeht der Fehler einer gemessenen Richtung auf r_0 über. Die vorläufig orientierten Richtungen r_0 werden von der endgültig orientierten R_0 um einen unbekannten Orientierungsfehler z abweichen

Es sei in Fig. 3 B_1 ein Zielpunkt, (Bernardinerkirche), (U) der Punkt, welcher den Näherungs-Koordinaten (x) (y) entspricht und U sei der endgültige ausgeglichene Punkt (Unionhügel) mit den Koordinaten $(x) + \delta x = x$ und $(y) + \delta y = y$.

In (U) ziehen wir die x-Richtung des Koordinatensystems, von welcher die vorläufigen Südwinkel (φ) gezählt werden, und da wir «vorläufig orientierte Richtungen» r_0 voraussetzen, nehmen wir die x-Richtung zugleich näherungsweise als Nullrichtung der r_0. In U ziehen wir auch die x-Richtung, aber davon abweichend die Nullrichtung 0 der gemessenen Richtungen, welche gegen x die kleine Verdrehung z besitzt. Der Beobachtungsstrahl (U) B oder U B wird im allgemeinen nicht durch den festen Zielpunkt B_1 gehen, und es ist $B U B_1$ der scheinbare Fehler v der Beobachtung r_0.

Da von (U) nach U die Koordinatenverschiebungen δx und δy betragen und einer Änderung der Koordinaten δx, δy der Übergang von (φ) auf φ entspricht so besteht die Gleichung $\varphi - (\varphi) = d\varphi = \frac{\sin\varphi}{S}\varrho\,\delta x - \frac{\cos\varphi}{S}\varrho\,\delta y$ oder $\varphi - (\varphi) = d\varphi = a\,\delta x + b\,\delta y$, wo $a = \frac{\varrho''\sin\varphi}{S}$, $b = \frac{\varrho''\cos\varphi}{S}$ dabei ist nach geometrischer Anschauung $r_0 + v = z + \varphi$ oder $v = z + \varphi - r_0$, was mit dem vorhergehenden gibt $v = z + d\varphi + (\varphi) - r_0$, wenn man $(\varphi) - r_0 = l$ setzt, so hat man $v = z + a\,\delta x + b\,\delta y + l$ als Fehlergleichung für die Richtung Unionshügel—Bernardinerkirche und für die, einzelnen Visierstrahlen als Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
z + a_1\,\delta x + b_1\,\delta y + l_1 &= o\\
z + a_2\,\delta x + b_2\,\delta y + l_2 &= o\\
z + a_3\,\delta x + b_3\,\delta y + l_3 &= o\\
z + a_4\,\delta x + b_4\,\delta y + l_4 &= o\\
z + a_5\,\delta x + b_5\,\delta y + l_5 &= o\\
z + a_6\,\delta x + b_6\,\delta y + l_6 &= o
\end{aligned}$$

Um die Unbekannte z zu eliminieren, werden die Gleichungen addiert, man erhält sodann: $[a]\,\delta x + [b]\,\delta y + [l] + n z = o$ $(n = 6)$ und hieraus

$$\frac{[a]}{n}\delta x + \frac{[b]}{n}\delta y + \frac{[l]}{n} + z = o.$$

Wird diese Gleichung von jeder der Bedingungsgleichungen subtrahiert, so erhält man die von dem Orientierungsfehler z befreiten reduzierten Bedingungsgleichungen

$$\left(a_1 - \frac{[a]}{n}\right)\delta x + \left(b_1 - \frac{[b]}{n}\right)\delta y + \left(l_1 - \frac{[l]}{n}\right) = o$$

$$\left(a_2 - \frac{[a]}{n}\right)\delta x + \left(b_2 - \frac{[b]}{n}\right)\delta y + \left(l_2 - \frac{[l]}{n}\right) = o \quad \text{u. s. w.}$$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben sich aus den Bedingungsgleichungen die wahrscheinlichsten Werte für die Verbesserungen v, wenn δx und δy aus den Normalgleichungen

$$[aa]\,\delta x + [ab]\,\delta y + [aw] = o$$
$$[ab]\,\delta x + [bb]\,\delta y + [bw] = o \quad \text{bestimmt werden.}$$

Hiebei sind $[aa] = a'\,a' + a''\,a'' + \ldots$, $[ab] = a'\,b' + a''\,b'' + \ldots$ u. s. w. a', b' sind Koeffizienten der redz. Bedgl.)

(Schluß folgt.)

Koordinaten des Union-Gedenkhügels in Lemberg.

Von Agenor Lewicki, k. k. Geometer in Kalusz.

(Schluß).

Nach dieser allgemeinen Darstellung übergehe ich somit zur folgenden Detailberechnung. Es werden also berechnet die vorläufigen Südwinkel, die Entfernungen vom «Unionshügel» nach den Festpunkten (Tab. III, Kol. 6, 7), dann die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen (Kol. 2, 3, 10) und die Koeffizienten der reduzierten Bedingungsgleichungen (Tab. III, Kol. 4, 5, 11).

nach inneren Richtungen. **Tab. III.**

vorläufige Südwinkel $(\varphi) = \frac{y_0 - y_n}{x_0 - x_n}$			Rm Gesamtmittel aus den Beobachtungen			$r_0 = Rm + O'$ vorläufig orientierte Richtungen			$l = (\varphi) - r_0$	red. l $= w = l - \frac{[l]}{n}$
°	'	"	°	'	"	°	'	"		
7			8			9			10	11
304	1	26	0	0	28	304	1	26	0	+3·7
17	50	17	73	49	22	17	50	20	−3	+0·7
26	39	48	82	38	46	26	39	44	+4	+7·7
38	12	18	94	11	18	38	12	16	+2	+5·7
38	48	02	94	47	26	38	48	24	−22	−18·3
60	42	40	116	41	45	60	42	43	−3	+0·7
									+6	+18·5
									−28	−18·3
									−22	

$O' = (\varphi) - Rm$ $\quad O' = 304^\circ\, 1'\, 26'' - 0^\circ\, 0'\, 28'' = 304^\circ\, 0'\, 58''$ $\quad \frac{[l]}{6} = -3{\cdot}7$

Jetzt werden die reduzierten Bedingungsgleichungen gebildet.

$$-312{\cdot}30\,\delta x \quad -13{\cdot}96\,\delta y \quad +3{\cdot}7 = 0$$
$$18{\cdot}39\,\delta x \quad -28{\cdot}08\,\delta y \quad -0{\cdot}7 = 0$$
$$79{\cdot}89\,\delta x \quad -80{\cdot}51\,\delta y \quad +7{\cdot}7 = 0$$
$$77{\cdot}07\,\delta x \quad -12{\cdot}64\,\delta y \quad +5{\cdot}7 = 0$$
$$98{\cdot}22\,\delta x \quad -10{\cdot}40\,\delta y \quad -18{\cdot}3 = 0$$
$$38{\cdot}74\,\delta x \quad -120{\cdot}32\,\delta y \quad +0{\cdot}7 = 0$$

In Tabelle IV. werden die Koeffizienten der Normalgleichungen berechnet.

Tab. IV.

Bezeichnung der Punkte	aa	ab	aw	bb	bw
Observatorium	+97531·00	4359·71	−1155·61	+194·88	−51·65
Bernardinerkirche . .	+338·19	−516·39	+12·87	+788·49	−19·65
Griech.-orient. Kirche	+6382·41	−6431·94	+615·15	+6481·86	−619·92
Kathedralkirche . .	+5939·78	+974·16	+439·30	+159·77	+72·05
Rathaus	+9647·17	−1021.49	−1797·42	+108·16	+190·32
St. Georg	+1500·79	+4661·19	+27·12	+14477·00	+84·22
	121339·34	+9995·06	+1094·44	+22210·16	+346·59
		− 7969·82	−2952·93		− 691·22
		+2025·24	−1858·49		− 344·63

Die Normalgleichungen lauten

$$121339{\cdot}34\,\delta x + 2025{\cdot}24\,\delta y - 1858{\cdot}49 = 0$$
$$2025{\cdot}24\,\delta x + 22210{\cdot}16\,\delta y - 344{\cdot}63 = 0$$

Bei der Auflösung dividiert man die erste Gleichung durch 121339·34, die zweite durch 2025·24, woraus man erhält

$$\delta x + \frac{2025{\cdot}24}{121339{\cdot}34}\,\delta y - \frac{1858{\cdot}49}{121339{\cdot}34} = 0$$
$$\delta x + \frac{22210{\cdot}16}{2025{\cdot}24}\,\delta y - \frac{344{\cdot}63}{2025{\cdot}24} = 0$$

Durch Subtrahierung wird δx eliminiert und es ergibt sich:

$$\delta y\left(\frac{22210{\cdot}16}{2025{\cdot}24} - \frac{2025{\cdot}24}{121339{\cdot}34}\right) + \left(\frac{1858{\cdot}49}{121339{\cdot}34} - \frac{344{\cdot}63}{2025{\cdot}24}\right) = 0$$
$$\delta y\,(10{\cdot}9667 - 0{\cdot}01669) + (0{\cdot}015316 - 0{\cdot}170167) = 0$$
$$= \delta y\ 10{\cdot}95001 = +\,0{\cdot}15485,\quad \delta y = +\,0{\cdot}01$$

Wird dieser Wert für δy oben substituiert, so erhält man $\delta x = +\,0{\cdot}02$.

Für die endgültigen Koordinaten ergibt sich sodann

$$x = 1{\cdot}24 + 0{\cdot}02 = 1{\cdot}26$$
$$y = 5{\cdot}12 + 0{\cdot}01 = 5{\cdot}13$$

In Tab. V folgt die Berechnung des mittleren Fehlers m, einer beobachteten Richtung und der mittleren Fehler My und Mx der Ordinate und Abscisse.

Tab. V.

Bestimmung des mittleren Fehlers einer beobachteten Richtung.

$a\delta x$	$b\delta y$	$\delta\varphi = a\delta x + b\delta y$	red $\delta\varphi$	w	$v = \delta\varphi + w$	p v v
1	2	3	4	5	6	7
−5·357	−1·809	−7·16	−6·38	+3·7	−2·7	7·29
+1·255	−1·950	−0·69	+0·09	+0·7	+0·8	0·64
+2·485	−2·474	+0·01	+0·79	+7·7	+8·5	72·25
+2·428	−1·543	+0·88	+1·66	+5·7	−7·4	54·76
+2·852	−1·773	+1·08	+1·86	−18·3	−16·4	268·96
+1·662	−0·466	+1·20	+1·98	+0·7	+2·7	7·29
		+3·17	+6·38	+18·5	+19·4	411·19
		−7·86	−6·38	−18·3	−19·1	
	$[\delta\varphi] =$	−4·69				
	$\frac{[\delta\varphi]}{6} =$	−0·78				

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{n-3}} = \sqrt{\frac{411 \cdot 19}{3}} = \pm 11''$$

Bestimmung der mittleren Fehler My und Mx.

(a_1, b_1, b_2 sind Koeffizienten der Normalgleichungen).

$$My = \pm m \sqrt{\frac{1}{b_1\left(\frac{b_2}{b_1} - \frac{b_1}{a_1}\right)}} = \pm m \sqrt{\frac{1}{b_1\,B}}$$

$$Mx = \pm My \sqrt{\frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{b_1}} = \pm My \sqrt{\frac{b_2}{a_1}}$$

$$\begin{aligned} \log m &= 1{\cdot}0413927 \\ -\tfrac{1}{2}\log b_1 &= 1{\cdot}6532387 \\ -\tfrac{1}{2}\log B &= 0{\cdot}5197070 \\ & \ 2{\cdot}1729457 \\ \log My &= 0{\cdot}8684470-2 \\ My &= \pm 0{\cdot}07 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log My &= 0{\cdot}8684470-2 \\ +\tfrac{1}{2}\log \frac{b_1}{a_1} &= 0{\cdot}1112374-1 \\ +\tfrac{1}{2}\log \frac{b_2}{a_1} &= 0{\cdot}5200376 \\ \log Mx &= 0{\cdot}4997220-2 \\ Mx &= \pm 0{\cdot}03 \end{aligned}$$

Aus den berechneten Koordinaten ergibt sich, daß der neu bestimmte Punkt «Unionshügel» von dem Nullpunkte des Koordinatensystemes um 5·28 m in südwestlicher Richtung verschoben ist.

Neu konstruierte Dosenlibellen nach Mollenkopf.

Die bisher gebräuchlichen Dosenlibellen hatten den Übelstand, daß die Luftblase durch Verdunsten der Flüßigkeit allmählig größer wurde und schließlich gar nicht mehr eingestellt werden konnte. Dieser Umstand wurde bei der bisherigen