Über die Differentialformel der Azimute

W. Láska [1]

[1] *o. ö. Professor an der k. k. techn. Hochschnle in Lemberg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **3** (1–2), S. 4–6

1905

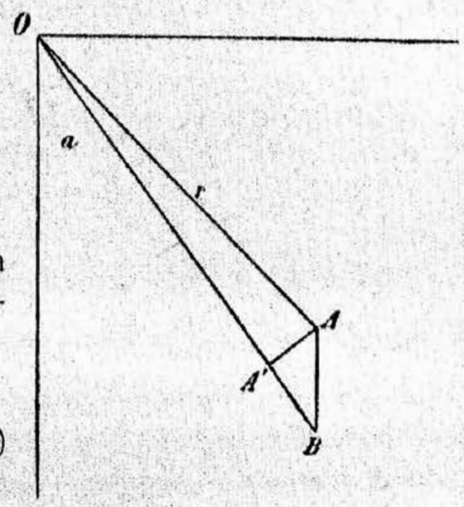
Insolange indeß nur eine verschwindend kleine Anzahl der Kollegen zur Feder zu greifen sich bequemt, sind wir auf das Dargebotene dankbarst angewiesen, müssen in den vorgetretenen Fußstapfen weiter wandeln in der Beherzigung Trost suchend, daß schlechte Früchte Wespen nie benagen.

Das Redaktionskomitee:

Ladislaus v. Klatecki. **Friedrich Goethe.** **Gustav Polzer.**

Über die Differentialformel der Azimute.

Von Prof. **Dr. W. Láska** in Lemberg.



Es seien

$$\begin{array}{cc} x & y \\ x + \Delta x & y + \Delta y \end{array}$$

die Koordinaten zweier Punkte A, B, bezogen auf den Koordinatenursprung O, so ist der Inhalt des Dreieckes AOB gleich

$$i = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x & x + \Delta x \\ y & y + \Delta y \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

Das Azimut der Geraden OA sei a, jenes von OB, $a + \Delta a$, so daß der Winkel

$$AOB = \Delta a,$$

wird noch

$$OA = r$$

gesetzt und beachtet, daß näherungsweise

$$i = \tfrac{1}{2}\, r^2 . \Delta a \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

ist, so folgt hieraus

$$r^2 . \Delta a = \begin{vmatrix} x & x + \Delta x \\ y & y + \Delta y \end{vmatrix}$$

oder

$$\Delta a = \frac{x}{r^2} . \Delta y - \frac{y}{r^2} . \Delta x$$

Setzt man noch

$$\Delta a = \Delta a'' \sin 1''$$

so ergibt sich die bekannte Formel:

$$\Delta a'' = 206265 \left(\frac{x}{r^2} . \Delta y - \frac{y}{r^2} . \Delta x \right) \quad \ldots\ldots\ (3)$$

welche hiemit in einfachster und anschaulichster Weise bewiesen erscheint. Bei der Anwendung vernachlässigt man offenbar das kleine Dreieck AA'B.

Offenbar gilt die Formel (3) nur dann, wenn die Fläche des kleinen Restdreieckes $AA'B$ klein ist im Verhältnis zum Dreiecke OAB.

Wir wollen nun dieses Restdreieck etwas näher ins Auge fassen.

Seien

$$x + \Delta x' \qquad y + \Delta y'$$

die Koordinaten von A', so wird der Inhalt dieses Dreieckes offenbar gleich

$$\Delta i = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y \\ \Delta x' & \Delta y' \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\Delta x \,.\, \Delta y' - \Delta y \,.\, \Delta x')$$

Man hat aber genügend nahe

$$\Delta x' = AA' \,.\, \sin a = y \,.\, \Delta a$$
$$-\Delta y' = AA' \,.\, \cos a = x \,.\, \Delta a$$

woraus

$$\Delta i = \frac{1}{2}\Delta a\,(x \,.\, \Delta x + y \,.\, \Delta y) \quad \dots\dots \quad (4)$$

folgt, welche Formel auch unmittelbar erhalten werden kann. Es ist nämlich

$$\Delta i = \frac{1}{2} AA' \,.\, A'B = \frac{1}{2} r \Delta a \,.\, \Delta r$$

da aber

$$r^2 = x^2 + y^2$$

so ergibt sich $r \Delta r = x \Delta x + y \Delta y$. Man hat also bis auf Größen zweiter Ordnung

$$i + \Delta i = \frac{1}{2}(x \Delta y - y \Delta x) \text{ oder}$$

nach Einsetzung der Formeln (2) und (4)

$$\Delta a \left\{ r^2 + x \Delta x + y \Delta y \right\} = x \Delta y - y \Delta x,$$

so daß

$$\Delta a = \frac{x \Delta y}{r^2 + x \Delta x + y \Delta y} - \frac{y \Delta x}{r^2 + x \Delta x + y \Delta y} \quad \dots\dots \quad (5)$$

Die Formel (3) hat demnach nur dann ihre Berechtigung, wenn $x \Delta x + y \Delta y$ gegenüber r^2 vernachlässigt werden kann.

Etwas eleganter kann die Formel (5) geschrieben werden, wie folgt:

$$\Delta a = \frac{x}{r}\,\frac{\Delta y}{r + \Delta r} - \frac{y}{r}\,\frac{\Delta x}{r + \Delta r} \quad \dots\dots \quad (6)$$

Diese einfache Formel gibt einerseits ein Kriterium für die Anwendbarkeit der Formel (3), andererseits kann sie sogar der Praxis förderlich sein, in dem Falle nämlich, wo der auszugleichende Punkt sehr nahe an einen trigonometrischen gelegen ist.

Daran anknüpfend möge eines Diagrammes gedacht werden, welches die Aufsuchung verloren gegangener Punkte sehr erleichtert, insoferne alle zur Aufsuchung des Punktes erforderlichen Rechnungen im voraus zu Hause erledigt werden können.

Vorausgesetzt wird die Möglichkeit der Anwendung des Rückwärtseinschneidens. Die wahren Winkel mögen α, β sein; die in der Nähe des aufzusuchenden Punktes beobachteten seien (α), (β).

Man kann dann mittels der Formel (3) leicht eine lineare Gleichung

$$\Delta\alpha = M\,\Delta x + N\,\Delta y$$

$$\Delta\beta = M'\,\Delta x + N'\,\Delta y$$ aufstellen.

Setzt man für $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ der Reihe nach ± 0, $\pm 2'$, $\pm 4'$, $\pm 6'$ etc., so ergeben sich hieraus zwei Systeme von Geraden, bezogen auf den wahren Ort des gesuchten Punktes, welche zu Hause gezeichnet werden können. Die Feldbeobachtung gibt durch

$$(\alpha) - \alpha \qquad (\beta) - \beta$$

den relativen Ort des Standpunktes gegenüber dem gesuchten Punkte, der nun leicht durch direkte Abmessung zu finden ist.

Koordinaten des Union-Gedenkhügels in Lemberg.

Von Agenor Lewicki, k. k. Geometer in Kalusz.

Auf einer Anhöhe Lembergs, Löwenburg (Sandberg) genannt, befindet sich einer der wichtigsten trigonometrischen Punkte, der Nullpunkt des Koordinatensystemes für Galizien. Im Jahre 1887 wurde an dieser Stelle der «Union-Gedenkhügel» errichtet und der trigonometrische Punkt gänzlich verschüttet.

Vor der Errichtung des Hügels wurden über Auftrag des k. k. Finanz-Ministeriums vom Geometer Adolf Skoda die erforderlichen Vermessungen vorgenommen und an der Anhöhe fünf neue Punkte zur späteren Erneuerung des Nullpunktes festgelegt.

Die Herstellung des verschüttteten Punktes nach dem vollendeten Hügelbaue sollte der Stadtmagistrat Lemberg im Einvernehmen mit dem k. k. Finanzministerium durchführen — was jedoch aus unbekannten Gründen bis nun nicht geschehen ist.

Bei der Vornahme gewisser Vermessungen im Jahre 1899 habe ich mich überzeugt, daß die Entfernung des an der Hügelspitze angebrachten Mastbaumes von dem ursprünglichen Nullpunkte eine so bedeutende ist, daß man die Hügelspitze als Nullpunkt des Koordinaten-Systems nicht annehmen kann. Nach dieser Überzeugung bin ich zur nachstehend bezeichneten Koordinaten-Berechnung geschritten.

Nach Berechnung der Koordinaten des Union-Gedenkhügels kann man sodann den ehemaligen Nullpunkt bestimmen, da er aber ungefähr 10 *m* unterhalb der Hügelspitze auf das Glacis fallen würde und deshalb nicht gut sichtbar wäre, erscheint es besser, die Erneuerung des Nullpunktes aufzugeben und künftighin bei Vermessungen den neu bestimmten Punkt «Union-Gedenkhügel» zu benützen.