Graphische Koordinatenausgleichung trigonometrisch bestimmter Punkte

M. Komel [1]

[1] *Neuvermessungs-Abteilung für das Küstenland*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **1** (11), S. 173–179

1903

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen.

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
DER VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III. Kübeckgasse 12.
K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.

Erscheint am 1. und 16. jeden Monats.
Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.

Expedition und Inseratenaufnahme durch
Ad. della Torre's Buch- & Kunstdruckerei
Wien, IX. Porzellangasse 28.

Nr. 11. Wien, am 16. Oktober 1903. I. Jahrgang.

Graphische Koordinatenausgleichung trigonometrisch bestimmter Punkte.

Von *M. Komel*, k. k. Geometer der Neuvermessungs-Abteilung für das Küstenland.

Die strenge Ausgleichung eines trigonometrischen Netzes nach der „Methode der kleinsten Quadrate" ist der Umständlichkeit und der vielen Rechnerei wegen sehr zeitraubend, und man ist daher im Zeitalter der Schnellmesserei darauf bedacht, unter möglichster Beibehaltung der wertvollen Grundsätze jener Methode, praktischere und rascher zum Ziele führende Ausgleichsmethoden ausfindig zu machen, welche besonders bei Ausführung von sogenannten Kleintriangulierungen Anwendung finden sollen.

Sowie in der Statik das graphische Rechnen grosse Vorteile bietet und das numerische Rechnen zum grossen Teile ersetzt, so gibt es auch für die Fehlerausgleichung bei Triangulierungen mehrere graphische Methoden, deren Resultate sich den Ergebnissen der strengen Ausgleichung mehr oder weniger genügend nähern.

Viele Aufgaben der Fehlerausgleichung lassen sich aber ganz gut auf Aufgaben aus der Lehre vom Gleichgewichte der Kräfte zurückführen, so dass man auf jene auch die Lehrsätze der graphischen Statik anzuwenden berechtigt ist. Wenn man nämlich annimmt, die einzelnen auszugleichenden Fehler seien Kräfte, welche den betreffenden Punkt nach verschiedenen Richtungen zu verschieben trachten, so ergibt sich für uns die Aufgabe, jene

Lage des Punktes ausfindig zu machen, für welche alle auf ihn wirkenden Kräfte sich im Gleichgewichte befinden.

Da man weiters bei der nachfolgend gezeigten graphischen Ausgleichung durch die Fehlerfigur den ganzen Vorgang klar vor Augen hat, so glaube ich, dass es auf graphischem Wege viel leichter und besser möglich ist, die Gewichte der einzelnen Beobachtungen zu berücksichtigen und dass auch die sogenannten Widersprüche sinngemässer gedeutet werden können als durch reine Rechnung.

Im nachfolgenden soll der Versuch einer graphischen Koordinatenausgleichung als Erweiterung der in der österreichischen Instruktion für Theodolitaufnahmen angedeuteten Methode gezeigt werden. Vorher will ich jedoch auch die von mir angewendete Winkelausgleichung bei Richtungsbeobachtungen angeben.

Gehen wir von der Voraussetzung aus, dass zum Zwecke der Triangulierung eines Netzes IV. Ordnung eine gewisse Anzahl bereits ausgeglichener Punkte höherer Ordnung gegeben sei.

Es ist von grossem Vorteile, und man erspart sich viel Rechnerei, wenn man bei der Winkelmessung nicht nur auf den gegebenen, sondern auch auf den erst zu bestimmenden Punkt das Instrument orientiert, und zwar auf den letzteren durch Umkehrung der auf einem gegebenen Punkte bereits ermittelten orientierten Richtung. Auf diese Weise erhält man sofort für alle Punkte genäherte orientierte Richtungen. Die Ermittlung der definitiven orientierten Richtungen geschieht in den gegebenen Punkten auf bekannte Weise, in den neuen Punkten aber folgendermassen:

Man beginnt mit jenem neuen Punkte, von welchem die meisten alten Punkte anvisiert wurden, und welcher auch von den meisten alten Punkten aus anvisiert wurde, und verfährt analog wie bei Ermittlung der definitiven orientierten Richtungen in den alten Punkten, d. h. die in den alten Punkten gefundenen orientierten Richtungen nach dem neuen Punkte werden um 180° geändert, den korrespondierenden vorläufig orientierten Richtungen gegenübergestellt und die Differenzen derselben gebildet. Das Mittel dieser Differenzen zu den gemessenen vorläufig orientierten Richtungen addiert oder subtrahiert gibt uns die definitiven orientierten Richtungen im neuen Punkte.

Schon bei in Rechnungstellung dieser Differenzen kann man eventuelle Gewichte der einzelnen Messungsdaten berücksichtigen.

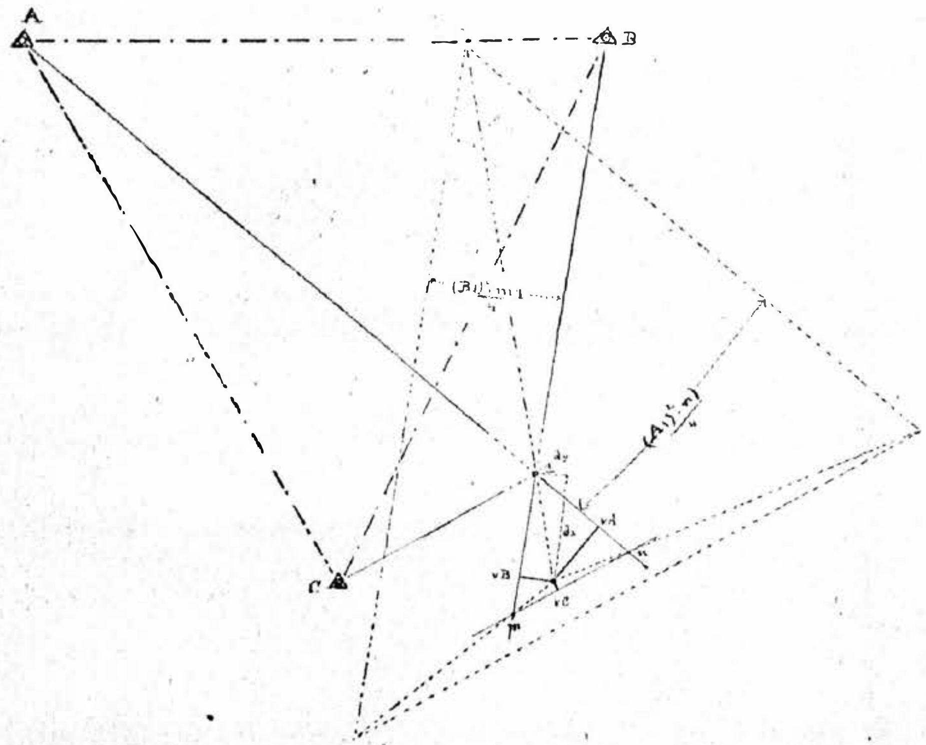
Durch fortgesetzte Gegenüberstellung aller äusseren definitiven und korrespondierenden inneren vorläufigen Richtungen werden für alle Punkte die definitiven orientierten Richtungen gefunden.

Nachdem dies für alle Punkte, auf welchen Winkelmessungen vorgenommen worden sind, geschehen ist, können durch nochmaliges Gegenüberstellen aller ermittelten definitiven Richtungen allenfalls noch kleine Verbesserungen platzgreifen, so dass sämtliche Messungsdaten zur Bildung der orientierten Richtungen verwertet worden sind.

Die äusseren Richtungen werden in der Regel von den entsprechenden inneren. Richtungen etwas abweichen. Bildet man nun die Mittel aus den beiden Werten und benützt diese Mittel zur Ausmittelung der Dreieckswinkel, so muss in jedem Dreiecke die Winkelsumme genau 180° ergeben; ebenso muss in jedem beliebigen Polygon die theoretische Winkelsumme resultieren, mit einem Worte, es sind sämtliche Winkel des Netzes ausgeglichen.

Bei Berechnung der vorläufigen Koordinaten der Netzpunkte kann man nun gleich aus dem Winkelmanuale die orientierten Richtungen, beziehungsweise die Mittel aus den äusseren und inneren orientierten Richtungen, falls beide gemessen wurden, entnehmen.

Fig. 1



Zur Vornahme der graphischen Ausgleichung rechnet man sich nun sämtliche vorläufigen Südwinkel, stellt sich dieselben der leichteren Uebersicht wegen in die Anmerkungskolonne des Winkelmanuales neben die betreffende orientierte Richtung ein und bildet gleichzeitig auch die Abweichungen zwischen den orientierten Richtungen und den zugehörigen Südwinkeln.

Mit Hilfe des in der österreichischen Instruktion für Polygonalvermessung angegebenen Diagrammes trägt man sich nun auf einer gut gezeichneten Triangulierungskarte die den Abweichungen entsprechenden Abstände in dem auszugleichenden Punkte auf und zieht gleichzeitig in diesen Abständen zu den betreffenden Visierstrahlen parallele Linien. Diese Linien stellen die aufzulösende Fehlerfigur dar.

Nehmen wir zuerst den einfachsten Fall her: es sei nämlich die Fehlerfigur ein Dreieck, d. h. der zu bestimmende Punkt sei von drei gegebenen Punkten aus vorwärts eingeschnitten worden.

In Abbildung 1 sind A, B, C die drei gegebenen Punkte und 1 der aus den Richtungen A, B, gerechnete neue Punkt. Die vorläufigen Südwinkel A—1 und B—1 braucht man sich nicht erst zu nehmen, da dieselben mit den betreffenden orientierten Richtungen übereinstimmen müssen, dagegen ergibt sich eine Abweichung zwischen dem vorläufigen Südwinkel C—1 und der korrespondierenden orientierten Richtung. Zieht man in dem dieser Abweichung entsprechenden Abstande zu C—1 eine parallele Gerade und verlängert auf entsprechende Weise die Geraden A—1 und B—1, so erhält man das Fehlerdreieck (1 m n).

Dieses Fehlerdreieck ist nun derart aufzulösen, es ist beziehungsweise die Lage des Punktes so festzustellen, dass die Summe der Quadrate der Verbesserungen v A″, v B″, v C″ ein Minimum werde.

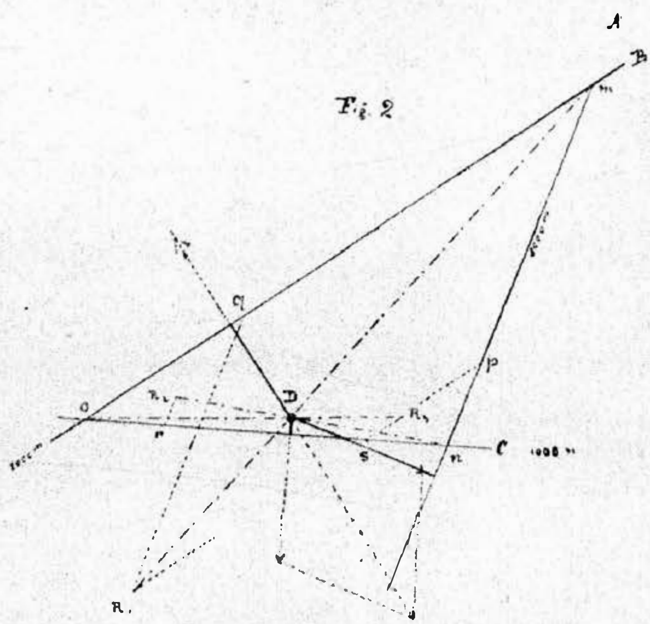


Fig. 2

Nach der von *Jordan* angegebenen und der hier gezeigten Auflösung auch von beliebigen Fehlerfiguren zugrunde gelegten Formel wäre der Punkt so anzunehmen, dass sich die Verbesserungen v A″, v B″, v C″ zu einander verhalten wie $A1^2 s_a : B1^2 s_b : C1^2 s_c$, wobei A1, B1 und C1 die Entfernung des Punktes 1 von A, B und C und s_a, s_b, s_c die korrespondierenden Seiten des Fehlerdreieckes bedeuten. Die Werte von $A1^2 s_a$ u. s. w. lassen sich rechnen, nachdem A1, B1 und C1 bekannt sind und s_a, s_b und s_c aus der Zeichnung entnommen werden können. Durch eine einfache Konstruktion findet man dann die Lage des ausgeglichenen Punktes.

Bevor ich die Auflösung einer aus vier oder mehr Visierstrahlen bestehenden Fehlerfigur auseinandersetze, will ich noch zeigen, wie ein Fehlerdreieck mit Hilfe der graphischen Statik aufgelöst werden kann, wobei das gleiche Resultat wie bei Anwendung der *Jordan*'schen Formel erzielt wird.

In Abbildung 2 sind A, B, C die drei Visierstrahlen, welche das Fehlerdreieck mno ergeben. Die Entfernungen des auszugleichenden Punktes von den drei gegebenen bezeichnen wir ebenfalls mit A, B, C. Denken wir uns nun im Punkte m zwei Kräfte wirksam, welche diesen in der Richtung mn, beziehungsweise mo verschieben wollen. Die Grösse dieser Kräfte mp und mq ist durch folgende Formeln ausgedrückt, es ist:

$$mp = \frac{1}{B^2 . mn} \text{ und } mq = \frac{1}{A^2 . mo}.$$

Man rechnet sich nun mp und mq, trägt sich dieselben in irgend einem Masstabe auf den betreffenden Richtungen auf und findet deren Resultierende mR1. Analog findet man auch die in n und o angreifenden Resultierenden R2 und R3. Alle drei Resultierenden schneiden sich in dem gesuchten besten Punkte D. Haben die drei Visuren A, B und C verschiedene Gewichte, so ist: $mp = \frac{p_1}{B^2 mn}$, $mq = \frac{p_2}{A^2 mo}$ und $os = \frac{p^3}{C^2 no}$, wobei p_1, p_2 und p_3 die in Rechnung zu ziehenden Gewichte bedeuten.

Wenn man nun die senkrechten Abstände des Punktes D von den Seiten des fehlerzeigenden Dreieckes durch die Quadrate der Entfernungen des Punktes D von den gegebenen Punkten A, B und C dividiert, und die so gefundenen Werte in einem beliebigen Masstabe von D aus auf den entsprechenden Senkrechten De, Df und Dg aufträgt und sich als auf den Punkt D wirkende Kräfte denkt, so müssen diese drei Kräfte im Gleichgewichte sich befinden.

Diese Regel werden wir nun dazu benützen, die beste Lage des auszugleichenden Punktes zu finden, wenn derselbe von mehr als drei Punkten aus eingeschnitten wurde.

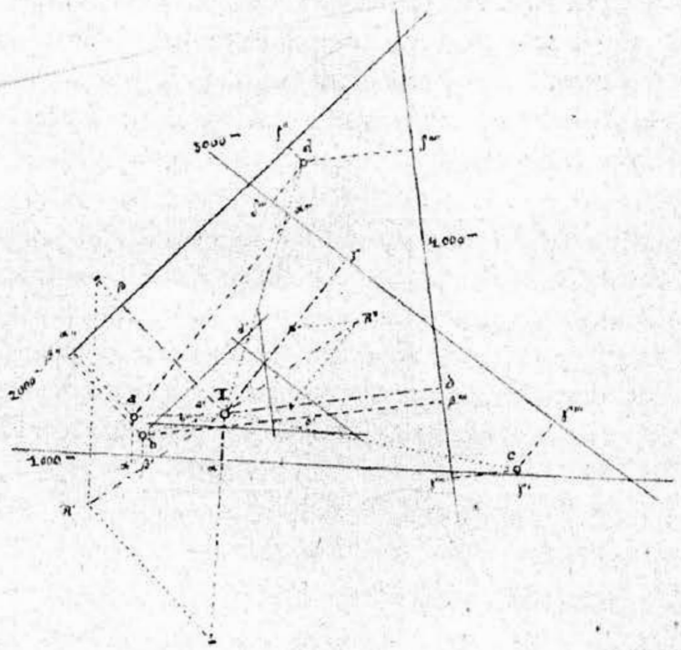
Durch Analogie ergibt sich nämlich auch für beliebig viele Visierstrahlen jene Gleichgewichtslage des ausgeglichenen Punktes.

Ich will hier auch noch die Formel angeben, durch welche die Anzahl x der durch n Visierstrahlen gebildeten Fehlerdreiecke gefunden wird. Es ist nämlich $x = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Nehmen wir als Beispiel die in Abbildung 3 dargestellte, von vier Visierstrahlen gebildete Fehlerfigur. Die vier Visierstrahlen ergeben vier fehlerzeigende Dreiecke. Jedes einzelne Fehlerdreieck wird auf die oben angegebene Weise aufgelöst, wodurch vier beste Punkte erhalten werden. Nun zeichnet man sich in jedem Dreiecke die drei senkrechten Abstände von den betreffenden Dreiecksseiten.

Von den senkrechten Abständen der Punkte a, b und c vom Visierstrahl 1 bildet man jetzt das Mittel, ebenso das Mittel der Abstände der Punkte a, b und d vom Visierstrahl 2 u. s. w.; unter Berücksichtigung der Lage der Abstände sind diese positiv oder negativ zu nehmen; es sind z. B. für den Visierstrahl 3 die Abstände $a\alpha'''$ und $c\gamma'''$ positiv, dagegen $\alpha\delta'''$ negativ zu nehmen.

Fig. 3



In Abständen, welche diesen mittleren Abständen proportional sind, zieht man weiters zu den vier Visierstrahlen parallele Gerade. Diese neuen Linien bilden wieder eine Art Fehler-Figur, deren einzelne Dreiecke weitere vier beste Punkte ergeben. Die korrespondierenden besten Punkte der ersten mit den besten Punkten der zweiten Fehler-Figur verbunden, geben vier Strahlen, welche sich in einem Punkte schneiden. Dieser Punkt ist der gesuchte beste Punkt.

Konstruiert man sich das Kräftepolygon wie oben angegeben, so wird man finden, dass sich auch hier die vier Kräfte im Gleichgewichte befinden müssen.

Die bei der hier gezeigten graphischen Ausgleichung notwendigen Rechenoperationen, wie Quadrieren der Längen der Visierstrahlen, Multiplikation dieser Quadrate mit der betreffenden Seitenlänge des Fehlerdreieckes und Bildung der reziproken Werte können sehr vorteilhaft mit Hilfe des logarithmischen Rechenschiebers bewerkstelligt werden.

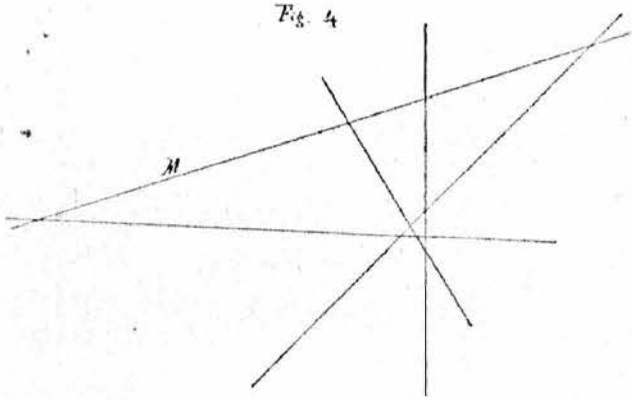
Es wurde bisher angenommen, dass der auszugleichende trigonometrische Punkt durch Vorwärtseinschneiden bestimmt wurde. Die Mehrzahl der trigonometrischen Punkte eines Netzes wird aber in der Regel durch kombiniertes Einschneiden festgelegt. In diesem Falle hat man zu berücksichtigen, dass gewisse Visuren gegenseitig, d. h. sowohl vom gegebenen zu dem erst neu zu bestimmenden Punkte und umgekehrt gemacht wurden, andere Visuren aber bloss einseitig.

Es ist nun klar, dass der aus gegenseitigen Visuren sich ergebenden mittleren orientierten Richtung ein grösseres Gewicht beigelegt werden muss, als der aus bloss einseitiger Visur abgeleiteten. Gleiche Genauigkeit bei der

Winkelmessung vorausgesetzt, wird man den aus gegenseitigen Richtungsbeobachtungen gefundenen mittleren orientierten Richtungen das doppelte Gewicht im Vergleich zu den aus einseitiger Beobachtung resultierenden orientierten Richtungen geben müssen. Bei der Auflösung der einzelnen Fehlerdreiecke einer Fehlerfigur wird man also im Falle kombinierten Einschneidens diesen Umstand berücksichtigen müssen.

Diese graphische Ausgleichung hat ausser dem Vorteil der Zeitersparnis auch den Vorteil, dass man schon durch blosse Betrachtung der fehlerzeigenden Figur ein Urteil über die Genauigkeit der einzelnen Richtungsbeobachtungen sich bilden und bei Ausgleichung des Punktes auch das Gefühl mitsprechen lassen kann.

Fig. 4



Aus einer Fehlerfigur, z. B. wie die nebenstehende Figur 4, werden wir sofort darauf schliessen müssen, dass dem Visierstrahl M sozusagen nicht viel zu trauen sei; und wir können mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass bei nochmaliger vorsichtiger Messung jener Richtung, der aus der Figur ersichtliche Widerspruch behoben werden könnte.

Bei der Ausgleichung eines trigonometrischen Netzes, bei welchem eine grosse Schärfe in der Bestimmung der Punkte nicht erforderlich ist, kann man sich eine genaue Konstruktion des besten Punktes ersparen, denn bei einiger Uebung kann derselbe annähernd genug nach dem Augenmasse angenommen werden.

Besonders grosse Vorteile bietet diese Ausgleichsmethode mit der fehlerzeigenden Figur dann, wenn man mehrere trigonometrische Punkte im Zusammenhange ausgleichen will; ja es unterliegt keiner grossen Schwierigkeit, ein ganzes trigonometrisches Netz im Zusammenhange auszugleichen.