Österreichische Zeitschrift
für
Vermessungswesen

Herausgegeben
vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Schriftleitung:

Hofrat Dr. Dr. Dr. h. c. E. Doležal, emer. o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. und Ing. Dr. Hans Rohrer, Vermessungsrat im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen.

Nr. 4. Baden bei Wien, im August 1931. XXIX. Jahrgang.

INHALT:

Abhandlungen: Die Vektorgleichung für das Rückwärtseinschneiden in der Ebene . . . . Privatdozent Dr. Alfred Basch

Erneuerung der österreichischen Katasterpläne . Obervermessungsrat Praxmeier

Literaturbericht. — Vereins-, Gewerkschafts- und Personalnachrichten.

Zur Beachtung!

Die Zeitschrift erscheint derzeit jährlich in 6 Nummern.

Mitgliedsbeitrag für das Jahr 1931 . . . . **12 S.**

Abonnementspreise: Für das Inland und Deutschland . . . . **12 S.**

Für das übrige Ausland . . . . **12 Schweizer Franken**

Abonnementsbestellungen, Ansuchen um Aufnahme als Mitglieder, sowie alle die Kassagebarung betreffenden Zuschriften, Berichte und Mitteilungen über Vereins-, Personal- und Standesangelegenheiten, sowie **Zeitungsreklamationen** (portofrei) und Adreßänderungen wollen nur an den Zahlmeister des Vereines **Vermessungsrat Ing. Josef Sequard-Baše, Bezirksvermessungsamt Wien in Wien, VIII., Friedrich-Schmidt-Platz Nr. 3,** gerichtet werden.

Postsparkassen-Konto des Geometervereines . . . . Nr. 24.175

Telephon . . . . Nr. A-23-2-29 und A-23-2-30

Baden bei Wien 1931.

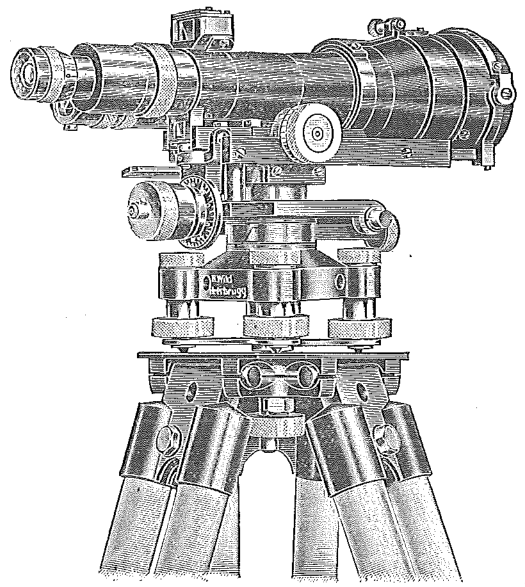
Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österreichischer Verein für Vermessungswesen.
Wien, IV., Technische Hochschule.

Druck von Rudolf M. Rohrer, Baden bei Wien.

WILD

Neue Konstruktionen.

Die zweckmäßigsten Instrumente für die Landesvermessung.



Präzisions-Nivellier-Instrument

mit Keilstrich-Einstellung.

1/4 nat. Größe — Gewicht 3,5 kg.
Vergrößerung 36fach.
Libelle mit Koinzidenzeinstellung auf 0,15"
Einfaches Nivellement, mittlerer Kilometerfehler ± 0,25 mm

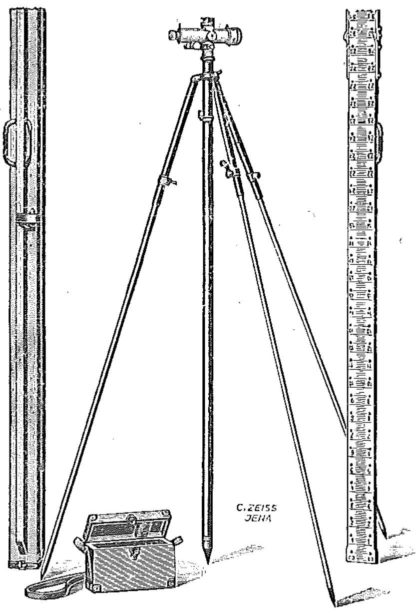
Verlangen Sie ausführliche Beschreibung

Verkaufs-A.-G. Hch. Wilds geodätische Instrumente

Heerbrugg und Lustenau
(Schweiz) (Österreich)

Vertreter: Ed. Ponocny, Prinz Eugenstraße 56, Wien IV.

ZEISS
LOTSTAB
ENTFERNUNGSMESSER
„LODIS“



Zur optischen Messung rechtwinkliger Koordinaten. Direkte Ablesung der Horizontalabstände auf 1 cm genau. Rasch und bequem in flachem Gelände. Besonders vorteilhaft in Verkehrsgebieten. Ersatz für Meßstangen (Band) und Kreuzscheibe (Prisma).

Nivelliere — Theodolite
Reduktions-Tachymeter (Bosshardt-Zeiss)

Aufnahme- und Auswertegeräte für Erd- und Luft-Photogrammetrie.

CARL ZEISS JENA

Druckschriften und weitere Auskünfte kostenfrei von

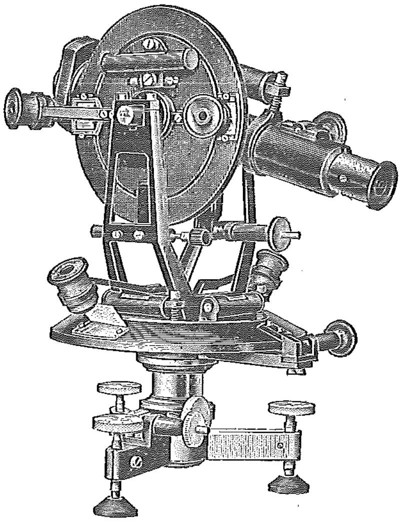
CARL ZEISS Ges. m. b. H.

WIEN, IX., FERSTELGASSE 1.

Starke & Kammerer A. G.

Wien, IV., Karlsgasse Nr. 11

Telephon U-48-3-17

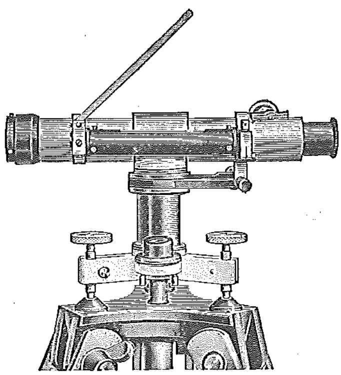


Theodolite

Tachymeter

Nivellier-Instrumente

Meß-Geräte



Einfache Konstruktionen

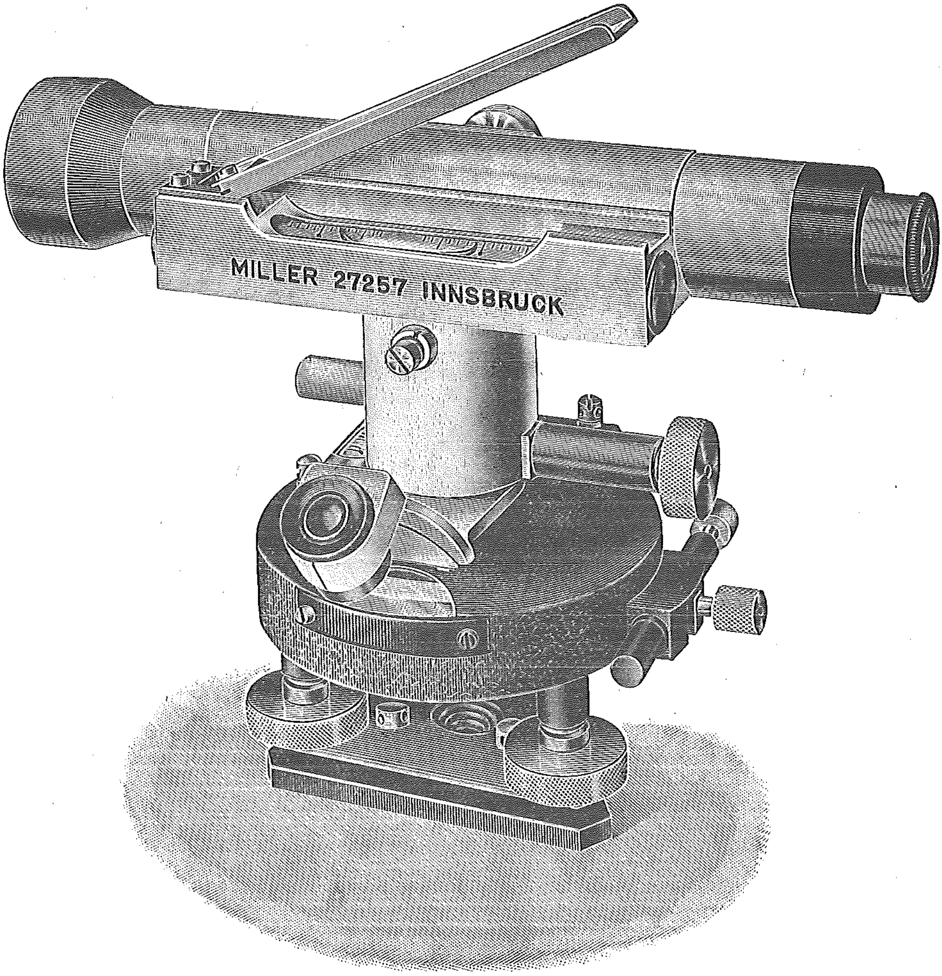
Geringes Gewicht

Große Dauerhaftigkeit

Drucksachen kostenlos

Annahme aller Reparaturen

Korrespondenz in deutscher, französischer, englischer und italienischer Sprache.



Neues Nivellier-Instrument II

Durch die besonders robuste Bauart und günstigsten Schutz aller empfindlichen Teile ist dieses Instrument in vorzüglicher Weise für die Baustelle geeignet.

Libellenablesung durch unzerbrechbaren Chrommetallspiegel.

Lieferbar ohne bzw. mit Horizontalkreis, Gewicht 1·9 kg.

Ausführliche Beschreibung und Liste Geo 49 kostenfrei durch

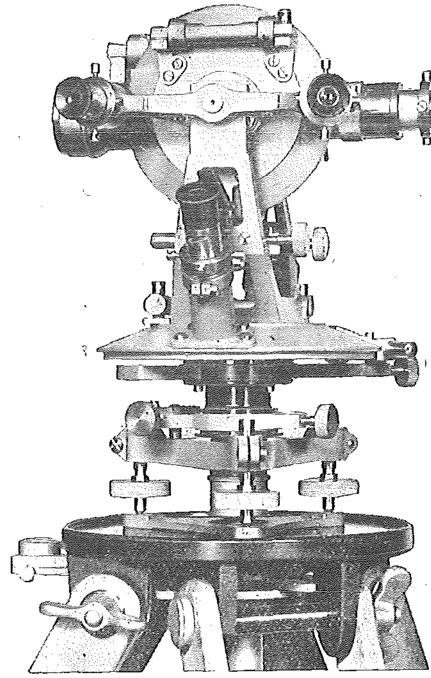
Werkstätten für Präzisionsmechanik Gebrüder Miller G. m. b. H., Innsbruck

Eduard Ponocny

Werkstätten für geodätische Instrumente
und Feinmechanik

Wien, IV., Prinz Eugenstraße 56

Gegründet 1897 **Fernruf U-40-6-16**



Eigene Erzeugung:

Theodolite, Tachymeter, Nivellier-Instrumente

Meßgeräte aller Art.

Generalvertretung für Österreich:

der A. G. Heinrich Wild, Heerbrugg

Schweiz

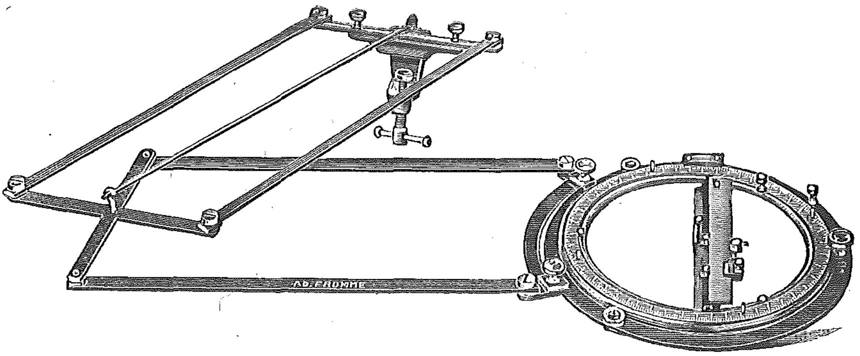
Geodätische, terrestrische, aërophoto-
grammetrische Instrumente u. Geräte.

FROMME

Theodolite
Universal-Bussolen
Leichte Gebirgsinstrumente

Auftrags-Apparate
Original-Konstruktionen

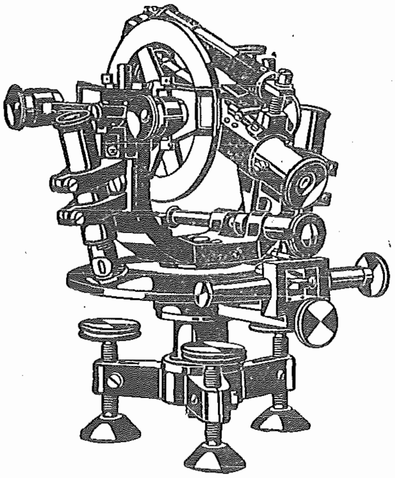
Universal-Tachygraphen



Listen und Anbote kostenlos

ADOLF FROMME
Werkstätten für geodätische Instrumente
WIEN, XVIII., Herbeckstraße 27
Tel. A-26-3-83 int.

Reparaturwerkstätte



Telephon B-36-1-24.

R.&A.ROST
WIEN 15

Märzstraße 7.

Geodätische Instrumente

Alle Meß- und Zeichenrequisiten.

Reparaturen rasch und billig.

Lieferanten der meisten Ämter und Behörden.

Spezial-Preisliste G1/VII kostenlos.

Gegründet 1888.

Eigene Erzeugnisse.

Weltausstellung Paris 1900: Goldene Medaille.

„MILLIONÄR“

die schnellste Multiplikationsmaschine der Welt!

Für jede Multiplikator- oder Quotientenstelle nur **ein kurzer Druck** auf den Kontaktknopf erforderlich. Linealverschiebung vollständig automatisch. Alle Modelle mit sichtbarer Tasteneinstellung für Handbetrieb oder elektrischen Antrieb.

„MADAS“

derzeit nicht lieferbar.

Für alle Rechnungsarten **mit vollkommen automatischer Division** bei selbsttätiger Linealverschiebung. **Kein Linealaufklappen!** Das Verschieben des Lineals, das Löschen von Resultat- oder Kontrollreihe, das Einstellen von Zahlen in die Resultatreihe erfolgt ohne Aufklappen des Lineals.

Verlangen Sie kostenlose Vorführung und Offerte durch die Generalrepräsentanz

Kontor-Einrichtungs-Gesellschaft

Wien, I., Eschenbachgasse 9—11. Fernsprecher B-26-0-61, B-26-0-71

KARTOGRAPHISCHES
früher Militärgeographisches
INSTITUT IN WIEN
VIII., KROTENTHALLERGASSE Nr. 3.

LANDKARTEN

für Reise und Verkehr, Touristik, Land- und Forstwirtschaft, Wissenschaft, Schule, Industrie und sonstige Zwecke.

Besondere Anfertigung von Karten aller Maßstäbe in allen Sprachen.

Hand- und Wandplan von Wien
1 : 15.000, Neuaufnahme 1928.

Oesterr. Karten 1 : 50.000
4850 West: Salzburg, 4851 West: Attersee
4850 Ost: Straßwalchen, 4851 Ost: Gmunden
4950 West: Berchtesgaden, 4951 Ost: Ischl
4950 Ost: Golling, 4951 West: St. Wolfgang.

Wintersportkarten
1 : 50.000, aller Skigebiete von Tirol, Vorarlberg und Salzburg.

Wanderkarten
1 : 75.000, der Republik Oesterreich, färbig, mit Wegmarkierung.

Geologische Karte
von Wien und Umgebung, 1 : 75.000

Generalkarten
von Mitteleuropa, 1 : 200.000.

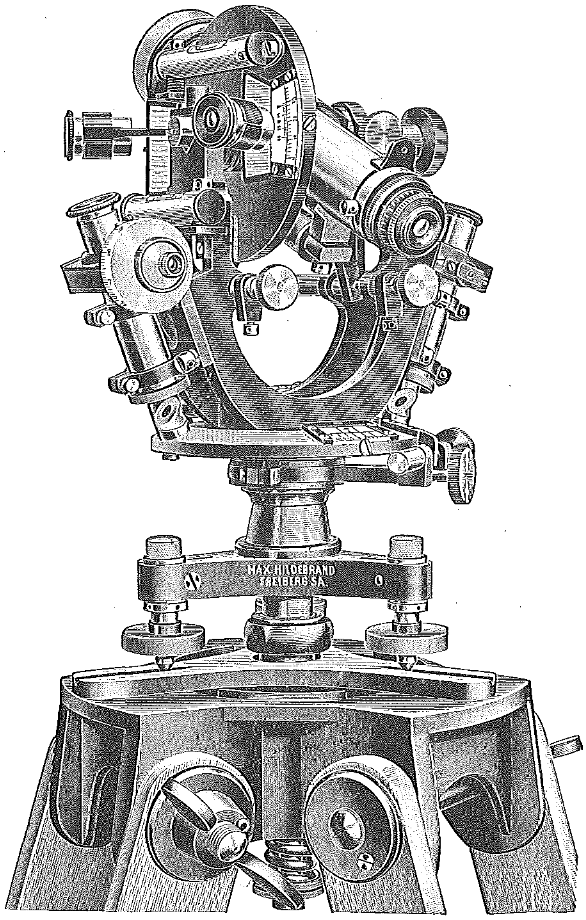
Autokarten
1 : 200.000, in zwölf Blättern.

Straßen-Atlas
1 : 500.000 (in Taschenformat), enthält in leicht auffindbarer Art sämtliche Karten der Bundesländer mit Kilometrierung der fahrbaren Straßen. Verkehrsvorschriften mit Fernverbindungen für den Automobilisten und Motorradfahrer.

Reise- und Verkehrskarte
von Oesterreich und Südbayern, beinhaltet alle Bahnen, staatlichen und privaten Autolinien, Schutzhütten und Jugendherbergen.

8 cm-Schrauben-Mikroskop-Theodolit

mit leistungsfähigem neuen Fernrohr. Trommeleinheit 5″, Schätzung 0″,5. Fernrohrvergrößerung 20fach bis 30fach. Für Triangulation III. u. IV. O., Kleindreiecksmessung, feine Zugmessung usw.



MAX HILDEBRAND

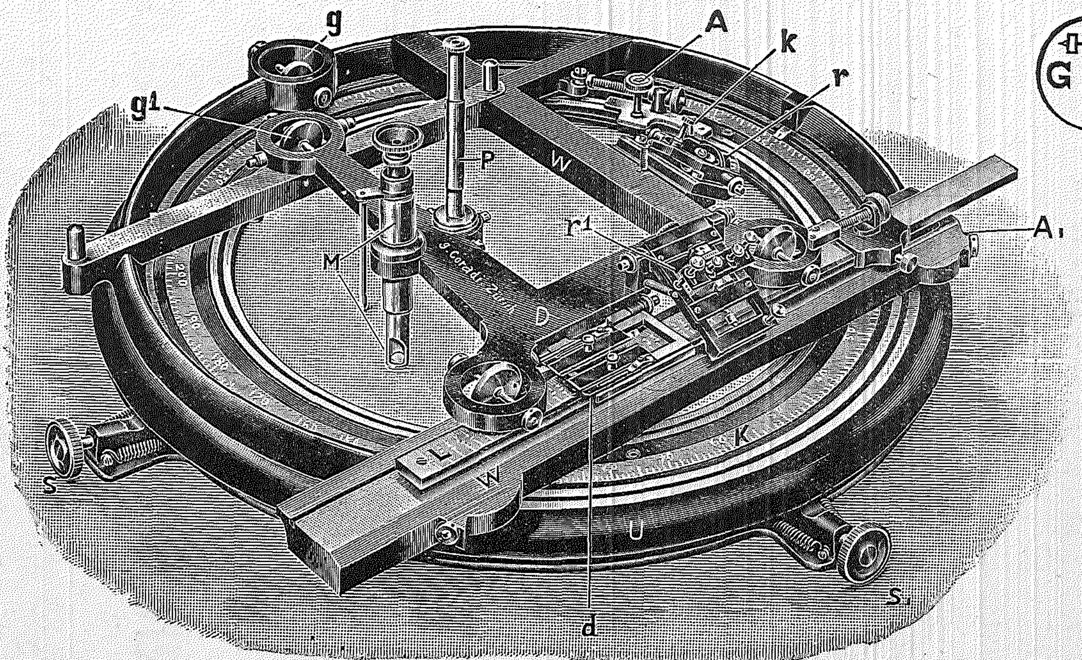
früher August Lingke & Co., G. m. b. H.

FREIBERG IN SACHSEN

Werkstätten für wissenschaftliche
Präzisions-Instumente / Gegr. 1791

G. Coradi, math.-mech. Institut, Zürich 6

Grand Prix Paris 1900 Telegramm-Adresse: „Coradige Zürich" **Grand Prix St. Louis 1904**



empfiehlt als Spezialitäten seine rühmlichst bekannten

Präzisions-Pantographen
Roll-Planimeter
Scheiben-Rollplanimeter
Scheiben-Planimeter
Kompensations-Planimeter
Lineal-Planimeter
Koordinatographen
Detail-Koordinatographen
Polar-Koordinatographen
Koordinaten-Ermittler
Kurvimeter usw.

Katalog gratis und franko.

Alle Instrumente, welche aus meinem Institut stammen, tragen meine volle Firma „G. CORADI, ZÜRICH" und die Fabrikationsnummer. - - - Nur eigene Konstruktionen, keine Nachahmungen.

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN VEREINS FÜR VERMESSUNGSWESEN.
Redaktion:
Hofrat Prof. Dr. Dr. Dr. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. H. Rohrer.

Nr. 4. Baden bei Wien, im August 1931. XXIX. Jahrg.

Die Vektorgleichung für das Rückwärtseinschneiden in der Ebene.

Von Privatdozent Dr. Alfred Basch, Oberbaurat im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen.

Die Angabe von Gleichungen, die für eine bestimmte Methode der geodätischen Ortsbestimmung die Koordinaten oder den Ortsvektor des Neupunktes explizit durch die Koordinaten oder Ortsvektoren der Altpunkte darstellen, bringt mehrere Vorteile gegenüber einer indirekten Bestimmungsweise oder einer nicht expliziten Darstellung mit sich. Sie führt eine bedeutende Erleichterung bei der Berechnung der Koordinaten des Neupunktes mit Hilfe der Rechenmaschine herbei, was für die Praxis von großer Wichtigkeit ist. Die explizite Darstellung des Ortsvektors des Neupunktes bietet aber auch den geeignetsten Ausgangspunkt für eine anzuschließende fehlertheoretische Untersuchung, die allgemeine, nicht nur für den Einzelfall geltende Gesetze für die Fehlerentstehung, vor allem aber für die Fehlerübertragung liefert [1]). Eine solche fehlertheoretische Untersuchung gehört in das Gebiet der sogenannten „Vektorrechnung zweiter Stufe", d. i. der „Affinorrechnung", die von mancher Seite auch „Tensorrechnung" genannt wird. In der folgenden Untersuchung soll lediglich die elementare Vektorrechnung, d. i. die Vektoralgebra erster Stufe, zur Anwendung gelangen.

Die für die Punktbestimmung durch Vorwärtseinschneiden geltende Vektorgleichung habe ich an anderer Stelle angegeben und aus ihr die Gesetze für die Fehlerübertragung bei dieser Art der Ortsbestimmung abgeleitet [2]).

---

[1]) Vgl. A. Basch, Die Fehlertensoren und das Fehlerübertragungsgesetz der vektoralgebraischen Elementaroperationen. Sitzungsberichte der Akad. Wien, 137. Bd., Abt. II a, 1928, S. 583—598. Fehlertensoren und Fehlerübertragung. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 8. Bd. 1928, S. 436—438. Fehlertensoren, Fehleraffinoren und allgemeine Fehlerübertragungsgesetze. Sitzungsberichte der Akad. Wien, 138. Bd. 1929, S. 125—168.

[2]) A. Basch, Vektorische Fehlertheorie und geodätische Fehlerübertragung. Ztschr. f. angew. Math. u. Mech., 9. Bd. 1929, S. 304—305.

Der Ortsvektor des Neupunktes ist im Fall des Vorwärtseinschneidens eine lineare homogene Funktion der Ortsvektoren der Altpunkte, in der die Vorzahlen nicht gewöhnliche Zahlen (Skalare), sondern spezielle Affinoren, und zwar Drehstrecker sind. Die aus der Vektorgleichung folgenden Fehlerübertragungsgesetze sind dementsprechend einigermaßen verwickelt, gestatten aber schöne geometrische Deutungen, die zu einfachen Konstruktionsmöglichkeiten für die Fehlerellipse des Neupunktes führen [3]).

Bei der Ortsbestimmung durch Rückwärtseinschneiden in der Ebene liegen die Verhältnisse im allgemeinen bedeutend einfacher. Der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ des Neupunktes P kann, wie auch hier gezeigt werden wird, in der Form

$$\mathfrak{r} = \sum_1^3 \gamma_\nu \mathfrak{r}_\nu \qquad (\sum_1^3 \gamma_\nu = 1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)^{4)}$$

durch die Ortsvektoren $\mathfrak{r}_\nu$ der Altpunkte P_ν ($\nu = 1, 2, 3$) explizit dargestellt werden, wobei die Vorzahlen γ_ν gewöhnliche Skalare sind. Durch die Bedingung $\Sigma \gamma_\nu = 1$ ist die Unabhängigkeit des durch die Vektorgleichung (1) festgelegten Punktes von der Wahl des Bezugspunktes gesichert.

Bringt man in drei Punkten P_ν ($\nu = 1, 2, 3$) einer Ebene (bzw. in zwei Punkten einer Geraden oder in vier Punkten des Raumes) Punktmassen m_ν an, so ist (wie übrigens auch bei einer beliebigen Anzahl von Punkten) der Ortsvektor des Massenmittelpunktes oder Schwerpunktes des von den Punktmassen gebildeten Systems durch

$$\mathfrak{r} = \frac{\Sigma\, m_\nu\, \mathfrak{r}_\nu}{\Sigma\, m_\nu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

gegeben. Wir wollen voraussetzen, daß die drei Punkte P_ν der Ebene nicht in einer Geraden liegen (bzw. die zwei Punkte der Geraden nicht zusammenfallen, bzw. die vier Punkte des Raumes keiner gemeinsamen Ebene angehören). Die drei (bzw. zwei, bzw. vier) mit Punktmassen belegten Punkte wollen wir dann als Grundpunkte bezeichnen. Durch entsprechende Wahl des Verhältnisses der Punktmassen kann jeder beliebige Punkt P der Ebene (bzw. der Geraden oder des Raumes) zum Schwerpunkt eines aus in den Grundpunkten befindlichen Punktmassen bestehenden Massensystems (eines H. Graßmann'schen „Punktvereines") gemacht werden. Der mit einer der Summe der Punktmassen m_ν gleichen Masse belegte Punkt P wird von H. Graßmann als „Summe des Punktvereines" bezeichnet [5]). Die Punktmassen m_ν, die positiv, negativ aber auch Null sein können, sind die von F. Möbius eingeführten baryzentrischen Koordinaten des Punktes P [6]).

---

[3]) Vgl. die beiden zuletzt zitierten Veröffentlichungen des Verfassers. Ferner: F. Ackerl, Über den Einfluß fehlerhafter Festpunkte auf das Ergebnis des Vorwärtseinschneidens. Ztschr. f. Vermessungswesen. 59. Bd., 1930, Heft 2.

[4]) Im weiteren sind alle Summenzeichen und ebenso die später verwendeten Produktzeichen Π, auch wenn die diesbezügliche Angabe weggelassen wurde, als von $\nu = 1$ bis $\nu = 3$ wirkend zu erstrecken.

[5]) H. Graßmann, Die Ausdehnungslehre, Berlin, 1862. Ges. Werke. 1. Bd. 2. Teil. Leipzig. 1896, S. 136.

[6]) F. Möbius, Der baryzentrische Kalkül. Leipzig. 1827.

Die Gleichungen (1) und (2) stimmen mit einander überein, wenn man

$$\gamma_\nu = \frac{m_\nu}{\Sigma m_\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

setzt. Es soll vorausgesetzt werden, daß $\Sigma_\nu m \neq 0$ ist, d. h. daß die Gesamtmasse des Punktvereines von Null verschieden ist. Im entgegengesetzten Fall wäre der Schwerpunkt des Massensystems ein uneigentlicher Punkt der Ebene (bzw. der Geraden, bzw. des Raumes). Die baryzentrischen Koordinaten sind homogene Koordinaten. Ihre Größe selbst ist belanglos; es kommt lediglich auf ihr Verhältnis an. In der geodätischen Literatur werden die baryzentrischen Koordinaten vielfach auch als „Gewichte" bezeichnet, wiewohl es vorteilhaft wäre, diese Benennung zu vermeiden oder nur für die Genauigkeitsmaße bei fehlertheoretischen Untersuchungen zu verwenden. Die Vorzahlen γ_ν in Gleichung (1) sind ebenfalls baryzentrische Koordinaten, die der besonderen Bedingung $\Sigma \gamma_\nu = 1$ unterworfen sind. Wir wollen sie „normierte baryzentrische Koordinaten" nennen.

Herr Hofrat Doležal hat in dieser Zeitschrift auf synthetischem Wege gezeigt, wie sich im Fall der Punktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden die baryzentrischen Koordinaten m_ν des Neupunktes in bezug auf die drei Altpunkte durch Winkelfunktionen der Sehwinkel und der Winkel des Altpunktdreieckes ausdrücken lassen [7]). Im folgenden soll zunächst eine knappe vektoranalytische Ableitung für das Verhältnis der baryzentrischen Koordinaten gebracht und dann der Ausnahmsfall besprochen werden, in dem diese Koordinaten nicht verwendbar sind. Schließlich soll eine vektoralgebraische Lösung angegeben werden, die sowohl für den allgemeinen als auch für den Ausnahmsfall zutrifft.

In Fig. 1 sind P_1, P_2, P_3 die Altpunkte, P der Neupunkt. φ_1, φ_2, φ_3 sind die orientierten Sehwinkel, unter denen die gerichteten Seiten des Altpunktedreieckes

$$\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2, \; \mathfrak{s}_2 = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3, \; \mathfrak{s}_3 = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$$

vom Neupunkte aus erscheinen, ψ_1, ψ_2, ψ_3 die orientierten Außenwinkel des Altpunktedreieckes. Es ist

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \begin{cases} 0 \\ \pm 2\pi \end{cases}$$

wobei 0 für den Fall gilt, daß der Neupunkt P außerhalb, $\pm 2\pi$ für den Fall, daß er innerhalb des Altpunktedreieckes liegt. Hiebei gilt zuletzt das +- oder —-Zeichen, je nachdem die Reihenfolge $P_1 P_2 P_3$ eine Dreiecksumfahrung in positivem oder negativem Drehsinn darstellt. Dementsprechend ist auch

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \pm 2\pi$$

Fig. 1 entspricht dem Fall der Innenlage des Neupunktes und dem positiven Drehsinn, als welcher der dem Uhrzeiger entgegengerichtete festgesetzt

---

[7]) E. Doležal, Rückwärts- und Vorwärtseinschneiden mit der Rechenmaschine. Österr. Ztschr. f. Vermessungswesen. 26. Bd., 1928, S. 87—97.

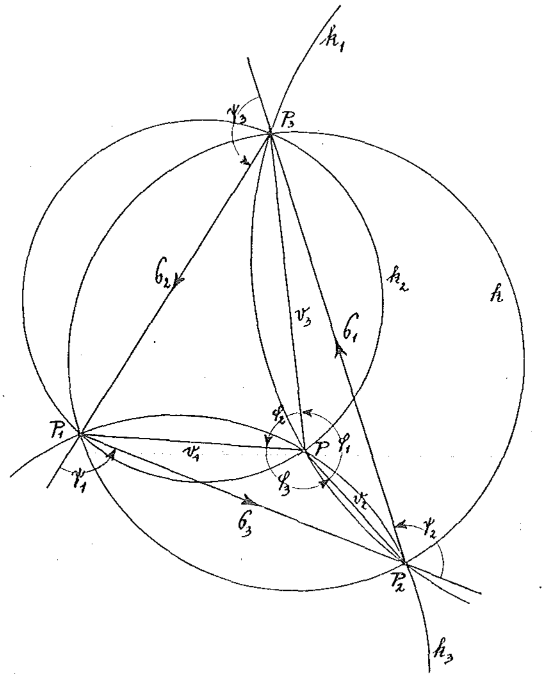


Fig. 1.

wurde. Dementsprechend sind alle Sehwinkel φ_ν und die Dreiecksaußenwinkel ψ_ν positiv.

Im weiteren soll durch $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ das Skalarprodukt, durch $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ das Vektorprodukt der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet werden. Die Einführung des $\times$-Zeichens als Zeichen für die vektorielle Multiplikation dürfte sich in der Geodäsie darum empfehlen, weil die eckige Klammer seit C. F. Gauß in der Ausgleichsrechnung als Summenzeichen verwendet wird. Mit $\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}$ soll das sogenannte Gibbs'sche Produkt der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet werden, das auch „unvollständiges" oder „dyadisches" Produkt genannt wird. Das Skalarprodukt $\mathfrak{v}$ der „Dyade" $\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}$ als Linksfaktor mit dem Vektor $\mathfrak{c}$ als Rechtsfaktor

$$\mathfrak{v} = (\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b})\, \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$$

ist ein Vektor, der mit dem Vektor $\mathfrak{a}$ gleich- oder entgegengesetzt gerichtet ist, je nachdem $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \gtrless 0$ ist, und dessen Betrag

$$|\mathfrak{v}| = |\mathfrak{a}|\ |\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}|$$

dem Produkt der Beträge des Vektors $\mathfrak{a}$ und des Skalarproduktes $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ gleicht. Analog wird das Produkt $\mathfrak{w}$ des Vektors $\mathfrak{c}$ als Linksfaktor und der Dyade $\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}$ als Rechtsfaktor gebildet:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{c}\, (\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}) = \mathfrak{c}\, \mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}$$

Es ist je nach Vorzeichen des Skalarproduktes $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ ein Vektor von gleicher oder entgegengesetzter Richtung wie der Vektor $\mathfrak{b}$. Sein Betrag

$$|\mathfrak{w}| = |\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}|\ |\mathfrak{b}|$$

Der Punkt besitzt hier gleichzeitig die Bedeutung eines Multiplikations- und eines Trennungszeichens.

Durch die Unterklammerung, das sogenannte „Axiatorzeichen" $\underline{\ }$, wird nach J. Spielrein angedeutet, daß der unterklammerte Vektor $\underline{\mathfrak{a}}$ mit einem ihm nachbarlich geschriebenen vektoriell zu multiplizieren ist, so daß man schreiben kann

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \underline{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\, \underline{\mathfrak{b}}$$ [8])

was sich im folgenden bei komplizierteren Ausdrücken als vorteilhaft erweisen wird. So wird man z. B. unter Verwendung des Axiatorzeichens schreiben können

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{a}\, \mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{d} = \mathfrak{a}\, (\underline{\mathfrak{b}} + \mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{d})$$

$\mathfrak{k}$ ($\mathfrak{k}^2 = 1$) soll den zur Ebene senkrechten, nach ihrer positiven Seite, d. i. nach oben, gerichteten Einheitsvektor bedeuten. Der Bezugspunkt wird in der Ebene des Altpunktedreieckes gewählt.

Es ist dann

$$\frac{(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}) \times (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r})}{(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r})\,(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r})} = \mathfrak{k} \operatorname{tg} \varphi_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Wird diese Gleichung mit $(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r})\,(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}) \operatorname{cotg} \varphi_1$ multipliziert und entsprechend geordnet, so erhält man die erste der Gleichungen des folgenden Systems. Die beiden anderen ergeben sich dann durch zyklische Permutation der Zeiger.

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{r}^2 . \mathfrak{k} + \mathfrak{r} \left\{ \underline{(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2)} \operatorname{cotg} \varphi_1 - (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2) . \mathfrak{k} \right\} &= \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3 \operatorname{cotg} \varphi_1 - \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 . \mathfrak{k} \\
\mathfrak{r}^2 . \mathfrak{k} + \mathfrak{r} \left\{ \underline{(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3)} \operatorname{cotg} \varphi_2 - (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3) . \mathfrak{k} \right\} &= \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_1 \operatorname{cotg} \varphi_2 - \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_1 . \mathfrak{k} \\
\mathfrak{r}^2 . \mathfrak{k} + \mathfrak{r} \left\{ \underline{(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)} \operatorname{cotg} \varphi_3 - (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) . \mathfrak{k} \right\} &= \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 \operatorname{cotg} \varphi_3 - \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 . \mathfrak{k}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (5)$$

Diese drei Gleichungen sind die Gleichungen der Ortskreise k_1, k_2, k_3 (Fig. 1), die durch je zwei Altpunkte und den Neupunkt gehen. Der Neupunkt P selbst ist ihr gemeinsamer Schnittpunkt. Durch Subtraktion je zweier dieser Gleichungen erhält man das System:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{r} \left\{ \underline{\mathfrak{r}_1} (\operatorname{cotg} \varphi_2 + \operatorname{cotg} \varphi_3) - \underline{\mathfrak{r}_2} \operatorname{cotg} \varphi_3 - \underline{\mathfrak{r}_3} \operatorname{cotg} \varphi_2 - (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2) . \mathfrak{k} \right\} = \\
&- \mathfrak{r}_1 \left\{ \underline{\mathfrak{r}_2} \operatorname{cotg} \varphi_3 + \underline{\mathfrak{r}_3} \operatorname{cotg} \varphi_2 + (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2) . \mathfrak{k} \right\} \\
&\mathfrak{r} \left\{ \underline{\mathfrak{r}_2} (\operatorname{cotg} \varphi_3 + \operatorname{cotg} \varphi_1) - \underline{\mathfrak{r}_3} \operatorname{cotg} \varphi_1 - \underline{\mathfrak{r}_1} \operatorname{cotg} \varphi_3 - (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3) . \mathfrak{k} \right\} = \\
&- \mathfrak{r}_2 \left\{ \underline{\mathfrak{r}_3} \operatorname{cotg} \varphi_1 + \underline{\mathfrak{r}_1} \operatorname{cotg} \varphi_3 + (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3) . \mathfrak{k} \right\} \\
&\mathfrak{r} \left\{ \underline{\mathfrak{r}_3} (\operatorname{cotg} \varphi_1 + \operatorname{cotg} \varphi_2) - \underline{\mathfrak{r}_1} \operatorname{cotg} \varphi_2 - \underline{\mathfrak{r}_2} \operatorname{cotg} \varphi_1 - (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) . \mathfrak{k} \right\} = \\
&- \mathfrak{r}_3 \left\{ \underline{\mathfrak{r}_1} \operatorname{cotg} \varphi_2 + \underline{\mathfrak{r}_2} \operatorname{cotg} \varphi_1 + (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) . \mathfrak{k} \right\}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Die Gleichungen dieses Systems sind die Gleichungen der von dem Neupunkte P nach den Altpunkten P_1, P_2, P_3 gerichteten Visierstrahlen v_1, v_2, v_3 (Fig. 1). Die drei Gleichungen sind als Gleichungen dreier sich in einem Punkte schneidender Geraden von einander nicht unabhängig; ihre Addition gibt die Identität $0 = 0$.

Aus zwei Gleichungen des Systems (6) kann, wie es am Ende dieser Untersuchung auch geschehen wird, unter Hinzufügung der Gleichung $\mathfrak{r}\,\mathfrak{k} = 0$ auf rein vektoralgebraischem, allerdings etwas kompliziertem Wege der Ortsvektor $\mathfrak{r}$

[8]) J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung. Zweite Auflage. Stuttgart. 1926.

des Neupunktes bestimmt werden. Die Vektorrechnung bietet aber den Vorteil, daß man im jeweils passenden Zeitpunkt zu dem für den gegebenen Fall vorteilhaftesten Koordinatensystem übergehen kann, und das ist hier das baryzentrische System mit den drei Altpunkten als Grundpunkte. Außerdem wird es sich hier wie bei vielen anderen Untersuchungen als zweckmäßig erweisen, den Bezugspunkt derart zu wählen, daß die Gleichungen sich tunlichst vereinfachen.

Wir drücken nun $\mathfrak{r}$ mit Hilfe der baryzentrischen Koordinaten m_1, m_2, m_3 durch die Ortsvektoren $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ der Altpunkte aus und lassen gleichzeitig den Bezugspunkt 0 mit dem Altpunkt P_1 zusammenfallen. Dann wird $\mathfrak{r}_1 = 0$ und

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,\mathfrak{r} = m_2\,\mathfrak{r}_2 + m_3\,\mathfrak{r}_3$$

Die erste Gleichung des Systems (6) geht infolgedessen über in

$$\{\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3 \operatorname{cotg} \varphi_2 + \mathfrak{r}_2 (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2) \,.\, \mathfrak{k}\}\, m_2 + \{- \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3 \operatorname{cotg} \varphi_3 + \mathfrak{r}_3 (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2) \,.\, \mathfrak{k}\}\, m_3 = 0$$

woraus sich ergibt

$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3 \operatorname{cotg} \varphi_3 - \mathfrak{r}_3 (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2) \,.\, \mathfrak{k}}{\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3 \operatorname{cotg} \varphi_2 + \mathfrak{r}_2 (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2) \,.\, \mathfrak{k}}$$

Zähler und Nenner des in der letzten Gleichung auf der rechten Seite stehenden Bruches sind Vektoren von der Richtung $\mathfrak{k}$. Multipliziert man Zähler und Nenner skalar mit diesem Einheitsvektor und beachtet, daß

$$\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{r}_3 = 2\,f$$

ist, wobei f den orientierten Flächeninhalt des Altpunktedreieckes $P_1 P_2 P_3$ bedeutet, und berücksichtigt weiter, daß, nachdem P_1 als Bezugspunkt gewählt wurde, $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{s}_3$, $\mathfrak{r}_3 = -\mathfrak{s}_2$ (vgl. Fig. 2), so ergibt sich

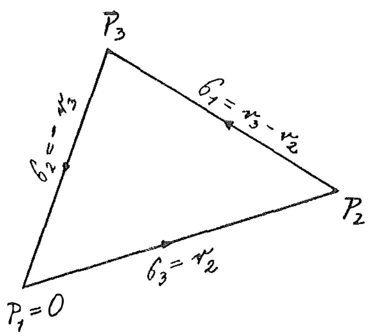


Fig. 2.

$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{2\,f \operatorname{cotg} \varphi_3 + \mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2}{2\,f \operatorname{cotg} \varphi_2 + \mathfrak{s}_3\,\mathfrak{s}_1}$$

Bezeichnet man mit r den Halbmesser des Umkreises k des Altpunktedreieckes, so ist

$$2\,f = 4\,r^2 \sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{s}_1\,\mathfrak{s}_2 &= 4\,r^2 \sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_3 \\ \mathfrak{s}_3\,\mathfrak{s}_1 &= 4\,r^2 \sin \psi_3 \sin \psi_1 \cos \psi_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

und daher, da $r \sin \psi_1 \neq 0$ ist,

$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{\sin\psi_2(\sin\psi_3 \operatorname{cotg}\varphi_3 + \cos\psi_3)}{\sin\psi_3(\sin\psi_2 \operatorname{cotg}\varphi_2 + \cos\psi_2)} = \frac{\sin\varphi_2 \sin\psi_2 \sin(\varphi_3+\psi_3)}{\sin\varphi_3 \sin\psi_3 \sin(\varphi_2+\psi_2)} \quad \ldots \quad (9)$$

oder auch

$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{\operatorname{cotg}\varphi_3 + \operatorname{cotg}\psi_3}{\operatorname{cotg}\varphi_2 + \operatorname{ctog}\psi_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9')$$

Dieses Verhältnis läßt sich nach entsprechender Umformung aus dem Gesichtspunkt der Symmetrie oder durch Zuhilfenahme und analoge Behandlung einer weiteren Gleichung des Systems (6) zu dem Verhältnis der drei baryzentrischen Koordinaten des Neupunktes erweitern und es ergibt sich

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{\sin\varphi_1 \sin\psi_1}{\sin(\varphi_1+\psi_1)} : \frac{\sin\varphi_2 \sin\psi_2}{\sin(\varphi_2+\psi_2)} : \frac{\sin\varphi_3 \sin\psi_3}{\sin(\varphi_3+\psi_3)} \quad \ldots \quad (10)$$

oder

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{1}{\operatorname{cotg}\varphi_1 + \operatorname{cotg}\psi_1} : \frac{1}{\operatorname{cotg}\varphi_2 + \operatorname{cotg}\psi_2} : \frac{1}{\operatorname{cotg}\varphi_3 + \operatorname{cotg}\psi_3} \quad (10')$$

Führen wir an Stelle der Außenwinkel des Altpunktedreieckes die orientierten Innenwinkel $\alpha_\nu = \pi - \psi_\nu$ ein und multiplizieren die Verhältniszahlen mit -1, so erhalten wir die von Herrn Hofrat Doležal angegebene Gleichung

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha_1 - \operatorname{cotg}\varphi_1} : \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha_2 - \operatorname{cotg}\varphi_2} : \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha_3 - \operatorname{cotg}\varphi_3} \quad (10'')$$

Die normierte baryzentrische Koordinate des Neupunktes kann man dann beispielsweise in der Form ausdrücken

$$\gamma_\nu = \frac{\dfrac{\sin\varphi_\nu \sin\psi_\nu}{\sin(\varphi_\nu+\psi_\nu)}}{\sum\limits_1^3 \dfrac{\sin\varphi_\nu \sin\psi_\nu}{\sin(\varphi_\nu+\psi_\nu)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

und den Ortsvektor des Neupunktes dementsprechend durch die Gleichung

$$\mathfrak{r} = \frac{\sum\limits_1^3 \dfrac{\sin\varphi_\nu \sin\psi_\nu}{\sin(\varphi_\nu+\psi_\nu)}\, \mathfrak{r}_\nu}{\sum\limits_1^3 \dfrac{\sin\varphi_\nu \sin\psi_\nu}{\sin(\varphi_\nu+\psi_\nu)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

oder durch eine entsprechende aus einer der Gleichungen (10′) oder (10″) hervorgehende. Die aus (10″) hervorgehende Gleichung für den Ortsvektor des Neupunktes wäre die vektoralgebraische Zusammenfassung der beiden von Herrn Hofrat Doležal angegebenen Gleichungen (9) [9]) für die Koordinaten des Neupunktes [10]).

---

[9]) Vgl. die unter [7]) zitierte Veröffentlichung.

[10]) Kürzlich hat Herr Dr. K. Ulbrich auf die Proportionalität zwischen den entsprechenden baryzentrischen Koordinaten und den orientierten Flächeninhalten der Gegendreiecke hingewiesen. (Zeitschr. f. Vermessungswesen, 24. Bd., 1930, H. 24.) Diese schon F. Möbius und H. Graßmann bekannte, in entsprechender Analogie auch für beliebig dimensionale Räume geltende Beziehung läßt sich am kürzesten auf folgende Art beweisen:

Sind P_1, P_2, P_3, P vier beliebige, nicht notwendigerweise in einer Ebene liegende Punkte, so sind $\mathfrak{r}_\nu{}' = \mathfrak{r}_\nu - \mathfrak{r}$ die Ortsvektoren der Punkte P_ν ($\nu = 1, 2, 3$) in bezug auf den

Da die Altpunkte $P_1\, P_2\, P_3$ voraussetzungsgemäß nicht auf einer Geraden liegen, so ist $\sin \psi_\nu$ für alle drei Werte und $\sin \varphi_\nu$ mindestens für zwei Werte von Null verschieden. (Nur für zwei dann, wenn der Neupunkt auf einer Geraden durch zwei Altpunkte liegt.) Für den Fall, daß $\sin(\varphi_\nu + \psi_\nu) = 0$ ist, was für $\nu = 1, 2, 3$ gleichzeitig eintritt, liegt der Neupunkt auf dem durch die Altpunkte gelegten Kreis, dem sogenannten „gefährlichen Kreis". Die Verhältnisse zwischen den baryzentrischen Koordinaten und daher auch die Lage des Neupunktes sind unbestimmbar. Biegt der Neupunkt P in der Nähe des „gefährlichen Kreises", so wird seine Lagenbestimmung ungenau.

Der Fall, daß die drei Altpunkte in einer Geraden liegen, erfordert eine gesonderte Betrachtung, da hier die Methode der baryzentrischen Koordinaten versagt. Es ist in diesem Fall am zweckmäßigsten, den Bezugspunkt O in der Altpunktegeraden zu wählen. Dann sind die Ortsvektoren der Altpunkte gleichgerichtet, so daß

$$\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = 0$$

ist und sich die rechte Seite der Gleichung des Visierstrahles v_ν, d. i. der ν-ten Gleichung im System (6), auf

$$-\,\mathfrak{r}_\nu (\mathfrak{r}_{\nu+2} - \mathfrak{r}_{\nu+1})\,.\,\mathfrak{k}$$ [11])

vereinfacht. Macht man die Gerade durch die Altpunkte zur x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und bezeichnet mit $\mathfrak{i}$ bzw. $\mathfrak{j}$ die Einheitsvektoren in der Richtung der positiven x- bzw. y-Achse, so ist

$$\mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j},\quad \mathfrak{r}_\nu = x_\nu\,\mathfrak{i},\quad \mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_\nu = -\,x_\nu\, y\,\mathfrak{k},\quad \mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_\nu = x_\nu\, x$$

Die Gleichungen von zwei Visierlinien, z. B. der Visierlinien v_2 und v_3, nehmen, wenn man noch die orientierten Seiten

$$s_\nu = x_{\nu+2} - x_{\nu+1}$$

Punkt P und es ist, wenn man mit $\mathfrak{f}_\nu$ den der Dreiecksfläche $P\,P_{\nu+1}\,P_{\nu+2}$ entsprechenden Vektor bezeichnet, nach dem Graßmann'schen Entwicklungssatz (H. Graßmann, Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, Leipzig 1844, Ges. Werke, 1. Bd., 1. Teil, Leipzig 1894, S. 167)

$$2\,\mathfrak{r}_\nu' \times \mathfrak{f}_\nu = \mathfrak{r}_\nu' \times (\mathfrak{r}_{\nu+1}' \times \mathfrak{r}_{\nu+2}') = \mathfrak{r}_\nu'\,\mathfrak{r}_{\nu+2}' \cdot \mathfrak{r}_{\nu+1}' - \mathfrak{r}_\nu'\,\mathfrak{r}_{\nu+1}' \cdot \mathfrak{r}_{\nu+2}'$$

Summiert man diese Gleichung von $\nu = 1$ bis $\nu = 3$, so erhält man

$$\sum_1^3 \mathfrak{r}_\nu' \times \mathfrak{f}_\nu = \sum_1^3 (\mathfrak{r}_\nu - \mathfrak{r}) \times \mathfrak{f}_\nu = 0$$

Allgemein ist der der Dreiecksfläche $P_1 P_2 P_3$ entsprechende Vektor $\mathfrak{f} = \sum_1^3 \mathfrak{f}_\nu$. Liegen die vier Punkte in einer Ebene, so ist $\mathfrak{f}_\nu = f_\nu\,\mathfrak{k}$, $\mathfrak{f} = f\,\mathfrak{k}$ und

$$\sum_1^3 f_\nu\,\mathfrak{r}_\nu' = \sum_1^3 f_\nu (\mathfrak{r}_\nu - \mathfrak{r}) = 0$$

daher

$$\mathfrak{r} = \frac{\sum f_\nu\,\mathfrak{r}_\nu}{f}$$

oder

$$m_1 : m_2 : m_3 = f_1 : f_2 : f_3$$

[11]) Die Addition im Zeiger gilt hier wie auch im weiteren immer zyklisch bezogen auf den Modul Drei.

einführt, die Form an

$$\left.\begin{array}{l} s_2 x + (s_3 \operatorname{cotg} \varphi_3 - s_1 \operatorname{cotg} \varphi_1)\, y = s_2 x_2 \\ s_3 x + (s_1 \operatorname{cotg} \varphi_1 - s_2 \operatorname{cotg} \varphi_2)\, y = s_3 x_3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

und ergeben als Lösungen die Koordinaten des Neupunktes

$$\left.\begin{array}{l} x = + \dfrac{s_1^2 x_1 \operatorname{cotg} \varphi_1 + s_2^2 x_2 \operatorname{cotg} \varphi_2 + s_3^2 x_3 \operatorname{cotg} \varphi_3}{s_1^2 \operatorname{cotg} \varphi_1 + s_2^2 \operatorname{cotg} \varphi_2 + s_3^2 \operatorname{cotg} \varphi_3} \\ y = - \dfrac{s_1 s_2 s_3}{s_1^2 \operatorname{cotg} \varphi_1 + s_2^2 \operatorname{cotg} \varphi_2 + s_3^2 \operatorname{cotg} \varphi_3} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

Der Nenner in den auf der rechten Seite stehenden Ausdrücken

$$\Sigma s_\nu^2 \operatorname{cotg} \varphi_\nu =$$

$$= - \frac{1}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3} \left\{ (s_1 \sin \varphi_2 - s_2 \sin \varphi_1)^2 + 4\, s_1 s_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin^2 \frac{\varphi_3}{2} \right\} \quad (15)$$

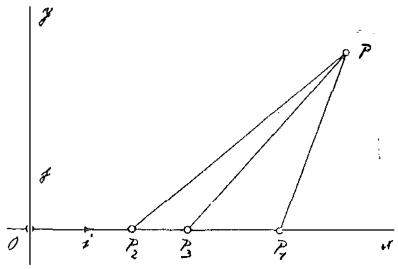


Fig. 3.

Nun kann man die Bezeichnung der drei Altpunkte immer derart wählen, daß die zwei orientierten Seiten s_1 und s_2 das gleiche Vorzeichen besitzen. (In Fig. 3 sind sowohl s_1 als auch s_2 positiv.) Dann besitzen auch $\sin \varphi_1$ und $\sin \varphi_2$ das gleiche Vorzeichen und der Ausdruck in der geschlungenen Klammer ist positiv. Es ist dadurch

$$\operatorname{sign} \Sigma s_\nu^2 \sin \varphi_\nu = - \operatorname{sign} \Pi \sin \varphi_\nu$$

und

$$\operatorname{sign} y = \operatorname{sign} \Pi s_\nu \,.\, \operatorname{sign} \Pi \sin \varphi_\nu = \operatorname{sign} \Pi s_\nu \sin \varphi_\nu$$

wovon man sich auch durch Vergleich der Figur 3 mit einer Figur, in der der Neupunkt P auf der anderen Seite der x-Achse liegt, und zwar bei beliebiger Permutation der Bezeichnungen der Altpunkte, überzeugen kann.

Die hier gebrachten expliziten Gleichungen für die Lage des Neupunktes (12) und (14) leiden an einem Schönheitsfehler. Gleichung (12) gilt für alle Fälle mit Ausschluß des Ausnahmsfalles, daß die drei Altpunkte auf einer Geraden liegen; Gleichung (14) gilt wieder nur für diesen Ausnahmsfall. Die Gleichung (12) macht von den baryzentrischen Koordinaten Gebrauch, die im Ausnahmsfall unverwendbar sind; Gleichung (14) verwendet ein dem speziellen Fall entsprechend angepaßtes rechtwinkliges Koordinatensystem.

Die nicht allgemeine Verwendbarkeit der Lösung (12) und die ausschließliche Gültigkeit der Lösung (14) für den Ausnahmsfall kann aber zum fühlbaren Mangel werden, wenn es sich darum handelt, an die Lösung Genauigkeitsbetrachtungen anzuschließen, in denen der Einfluß der ungenauen Lagenbestimmung der Altpunkte auf die Lage des Neupunktes untersucht wird und die Altpunkte auch nur angenähert auf einer Geraden liegen, ein Fall, der wohl bei Stromvermessungen öfters vorliegen dürfte[12]).

Eine für alle Fälle gültige Gleichung für den Ortsvektor des Neupunktes kann man durch Lösung des Systems (6) der Visierstrahlgleichungen gewinnen. Zwecks knapperen Ausdruckes mögen außer den gerichteten Seiten $\mathfrak{s}_\nu = \mathfrak{r}_{\nu+2} - \mathfrak{r}_{\nu+1}$ die folgenden Vektoren eingeführt werden:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}_2 &= \mathfrak{r}_2(\operatorname{cotg}\varphi_3 + \operatorname{cotg}\varphi_1) - \mathfrak{r}_3\operatorname{cotg}\varphi_1 - \mathfrak{r}_1\operatorname{cotg}\varphi_3 = \mathfrak{s}_3\operatorname{cotg}\varphi_3 - \mathfrak{s}_1\operatorname{cotg}\varphi_1 \\ \mathfrak{u}_3 &= \mathfrak{r}_3(\operatorname{cotg}\varphi_1 + \operatorname{cotg}\varphi_2) - \mathfrak{r}_1\operatorname{cotg}\varphi_2 - \mathfrak{r}_2\operatorname{cotg}\varphi_1 = \mathfrak{s}_1\operatorname{cotg}\varphi_1 - \mathfrak{s}_2\operatorname{cotg}\varphi_2 \\ \mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{k} - \mathfrak{s}_2 \\ \mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{u}_3 \times \mathfrak{k} - \mathfrak{s}_3 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Dann lauten die Gleichungen der Visierstrahlen v_2 und v_3

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r}\,(\underline{\mathfrak{u}_2} - \mathfrak{s}_2 \,.\, \mathfrak{k}) &= \mathfrak{r}_2\,(\underline{\mathfrak{u}_2} - \mathfrak{s}_2 \,.\, \mathfrak{k}) \\ \mathfrak{r}\,(\underline{\mathfrak{u}_3} - \mathfrak{s}_3 \,.\, \mathfrak{k}) &= \mathfrak{r}_3\,(\underline{\mathfrak{u}_3} - \mathfrak{s}_3 \,.\, \mathfrak{k}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

und gehen nach skalarer Multiplikation mit dem Einheitsvektor $\mathfrak{k}$ als Rechtsfaktor über in

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{r}_2\,\mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{r}_3\,\mathfrak{a}_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Fügt man zu diesen beiden Gleichungen noch die Gleichung

$$\mathfrak{r}\,\mathfrak{k} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

hinzu, die aussagt, daß der Neupunkt in der Ebene der Altpunkte liegt, so liegen für den gesuchten Vektor $\mathfrak{r}$ drei Skalargleichungen vor, so daß er, soferne

$$\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{k} \neq 0$$

ist, durch

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{\mathfrak{k}\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3}(\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{r}_3\,\mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{a}_2) \times \mathfrak{k} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

gegeben ist. Nun ist

$$\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{k}\,\mathfrak{u}_2\,\mathfrak{u}_3 \,.\, \mathfrak{k} + \mathfrak{s}_2 \times \mathfrak{s}_3 + (\mathfrak{u}_3\,\mathfrak{s}_2 - \mathfrak{u}_2\,\mathfrak{s}_3) \,.\, \mathfrak{k}$$

somit

$$\mathfrak{k}\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{k}\,(\mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{s}_2 \times \mathfrak{s}_3) + \mathfrak{u}_3\,\mathfrak{s}_2 - \mathfrak{u}_2\,\mathfrak{s}_3$$

Setzt man

$$\mathfrak{s}_2 \times \mathfrak{s}_3 = \mathfrak{s}_3 \times \mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_1 \times \mathfrak{s}_2 = 2\,\mathfrak{f} = 2\,f\,\mathfrak{k},$$

wobei $\mathfrak{f}$ den der Dreiecksfläche $P_1 P_2 P_3$ entsprechenden, zu ihr senkrechten Vektor, f den orientierten Flächeninhalt des Dreieckes bedeutet, so ergibt sich bei Berücksichtigung der Beziehung

$$\sum_1^3 \operatorname{cotg}\varphi_{\nu+1}\operatorname{cotg}\varphi_{\nu+2} = 1$$

[12]) Die Gleichung (12) wird außerdem in der Umgebung des Ausnahmsfalles bis zur Unbrauchbarkeit ungenau. Auch für Formeln der Geometrie gilt der von Gerhart Hessenberg für Konstruktionen geprägte Ausspruch: „Versagt eine Konstruktion theoretisch in einem bestimmten Fall, so versagt sie praktisch bereits, wenn dieser Fall nur näherungsweise eintritt.“ (G. Hessenberg, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Herausgegeben von E. Salkowski. Sammlung E. Hilb, Bd. III a, Leipzig, 1929.)

$$\mathfrak{u}_2 \times \mathfrak{u}_3 = \sum_1^3 \mathfrak{s}_{\nu+1} \times \mathfrak{s}_{\nu+2} \operatorname{cotg} \varphi_{\nu+1} \operatorname{cotg} \varphi_{\nu+2} = 2\,\mathfrak{f}$$

und somit

$$\mathfrak{k}\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_3 = 4\,f - \sum_1^3 \mathfrak{s}_\nu^2 \operatorname{cotg} \varphi_\nu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Nun verschwindet aber

$$4\,f - \Sigma\,\mathfrak{s}_\nu^2 \operatorname{cotg} \varphi_\nu = -\,4\,r^2\,\Sigma \sin^2 \psi_\nu (\operatorname{cotg} \varphi_\nu + \operatorname{cotg} \psi_\nu) \quad \ldots \quad (21')$$

ausschließlich für den „gefährlichen Ort“, d. i. im Fall $f \neq 0$ für den Umkreis des Altpunktedreieckes, im Fall $f = 0$ für die Gerade, auf der die Altpunkte in diesem Sonderfall liegen. Für alle nicht auf dem gefährlichen Ort liegenden Punkte ist durch (20) der Ortsvektor des Neupunktes eindeutig bestimmt. Es ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r}_2\,\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{k}\,(\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 \operatorname{cotg} \varphi_3 - \mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3 \operatorname{cotg} \varphi_1) - \mathfrak{r}_2\,\mathfrak{s}_2 \\ \mathfrak{r}_3\,\mathfrak{a}_3 &= \mathfrak{k}\,(\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{r}_3 \operatorname{cotg} \varphi_1 - \mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{r}_1 \operatorname{cotg} \varphi_2) - \mathfrak{r}_3\,\mathfrak{s}_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{k} &= \mathfrak{s}_1 \operatorname{cotg} \varphi_1 - \mathfrak{s}_3 \operatorname{cotg} \varphi_3 - \mathfrak{s}_2 \times \mathfrak{k} \\ \mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{k} &= \mathfrak{s}_2 \operatorname{cotg} \varphi_2 - \mathfrak{s}_1 \operatorname{cotg} \varphi_1 - \mathfrak{s}_3 \times \mathfrak{k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

und infolgedessen

$$\left.\begin{aligned} &(\mathfrak{r}_2\,\mathfrak{a}_2 \,.\, \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{r}_3\,\mathfrak{a}_3 \,.\, \mathfrak{a}_2) \times \mathfrak{k} = \\ &= \sum_1^3 \{\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}_{\nu+2} \times \mathfrak{r}_\nu \operatorname{cotg} \varphi_{\nu+1} - \mathfrak{r}_\nu \times \mathfrak{r}_{\nu+1} \operatorname{cotg} \varphi_{\nu+2}) - \mathfrak{r}_\nu \mathfrak{s}_\nu\} \,.\, \mathfrak{s}_\nu \operatorname{cotg} \varphi_\nu - \\ &- \mathfrak{k} \sum_1^3 \mathfrak{r}_{\nu+1} \times \mathfrak{r}_{\nu+2} \,.\, \mathfrak{s}_\nu \times \mathfrak{k} \operatorname{cotg} \varphi_\nu + \sum_1^3 \mathfrak{r}_\nu\,\mathfrak{s}_\nu \,.\, \mathfrak{r}_\nu \times \mathfrak{k} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Nach Berücksichtigung der Beziehung

$$\Sigma\,\mathfrak{k}\,(\mathfrak{r}_{\nu+2} \times \mathfrak{r}_\nu \operatorname{cotg} \varphi_{\nu+1} - \mathfrak{r}_\nu \times \mathfrak{r}_{\nu+1} \operatorname{cotg} \varphi_{\nu+2}) \,.\, \mathfrak{s}_\nu \operatorname{cotg} \varphi_\nu = 2\,f\,\Sigma\,\mathfrak{r}_\nu \operatorname{cotg} \varphi_{\nu+1} \operatorname{cotg} \varphi_{\nu+2}$$

ergibt sich bei Zusammenfassung der Summen in (24) und Division durch Gleichung (21) die allgemein gültige Lösung für den Ortsvektor des Neupunktes

$$\mathfrak{r} = \frac{\Sigma\{2\,f\,\mathfrak{r}_\nu \operatorname{cotg} \varphi_{\nu+1} \operatorname{cotg} \varphi_{\nu+2} - \mathfrak{r}_\nu \mathfrak{s}_\nu . \mathfrak{s}_\nu \operatorname{cotg} \varphi_\nu - (\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}_{\nu+1}\mathfrak{r}_{\nu+2} . \mathfrak{s}_\nu \operatorname{cotg} \varphi_\nu - \mathfrak{r}_\nu \mathfrak{s}_\nu . \mathfrak{r}_\nu) \times \mathfrak{k}\}}{4\,f - \Sigma\,\mathfrak{s}_\nu^2 \operatorname{cotg} \varphi_\nu} \quad (25)$$

aus der man im Bedarfsfalle zu zwei gleichwertigen, allerdings etwas langwierigen Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten übergehen kann.

Im Ausnahmsfall ist $f = 0$ und — wenn man dann den Bezugspunkt auf der Altpunktegeraden wählt — auch $\mathfrak{r}_{\nu+1} \times \mathfrak{r}_{\nu+2} = 0$. Setzt man weiters $\mathfrak{r}_\nu = x_\nu\,\mathfrak{i}$, $\mathfrak{s}_\nu = \mathfrak{i}\,s_\nu$ und beachtet, daß

$$\Sigma\,x_\nu^2\,s_\nu = -\,s_1\,s_2\,s_3 = \Pi\,s_\nu$$

so erhält man aus der allgemeinen die für den Ausnahmsfall allein gültige Lösung

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{i}\,\Sigma\,s_\nu^2\,x_\nu \operatorname{cotg} \varphi_\nu - \mathfrak{j}\,\Pi\,s_\nu}{\Sigma\,s_\nu^2 \operatorname{cotg} \varphi_\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

die die Zusammenfassung der beiden Gleichungen (14) darstellt.

Im allgemeinen Fall folgt aus (25), wenn man einen der Altpunkte, z. B. P_1 als Bezugspunkt wählt,

$$(4\,f - \Sigma\,\mathfrak{s}_\nu^2 \operatorname{cotg} \varphi_\nu)\,\mathfrak{r} = (2\,f \operatorname{cotg} \varphi_1 - \mathfrak{r}_2\,\mathfrak{r}_3) \,.\, (\mathfrak{r}_2 \operatorname{cotg} \varphi_3 + \mathfrak{r}_3 \operatorname{cotg} \varphi_2 - \mathfrak{s}_1 \times \mathfrak{k}) \quad (27)$$

Soferne $f \neq 0$ ist, kann man die Vektoren $\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{k}$, die aus den Ortsvektoren $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ durch Drehung in der Dreiecksebene um einen rechten Winkel in positivem Sinne hervorgehen, durch die nicht gedrehten Ausgangsvektoren $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ darstellen, und zwar ist

$$\mathfrak{r}_2 \times \mathfrak{k} = \frac{1}{2f}(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 \cdot \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_2^2 \cdot \mathfrak{r}_3)$$

$$\mathfrak{r}_3 \times \mathfrak{k} = \frac{1}{2f}(\mathfrak{r}_3^2 \cdot \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 \cdot \mathfrak{r}_3)$$

und daher

$$\mathfrak{s}_1 \times \mathfrak{k} = (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2) \times \mathfrak{k} = \frac{1}{2f}(\mathfrak{r}_3\mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{r}_3)$$

Führt man die letzte Gleichung in (27) ein und drückt die zu Skalarprodukten vereinigten Ortsvektoren durch die Dreiecksseiten aus, so erhält man

$$(4f - \Sigma \mathfrak{s}_\nu^2 \operatorname{cotg} \varphi_\nu)\,\mathfrak{r} =$$

$$= (2f \operatorname{cotg} \varphi_1 + \mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_3) \cdot \left\{\left(\operatorname{cotg} \varphi_3 + \frac{\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2}{f}\right) \cdot \mathfrak{r}_2 + \left(\operatorname{cotg} \varphi_2 + \frac{\mathfrak{s}_3\mathfrak{s}_1}{f}\right) \cdot \mathfrak{r}_3\right\} =$$

$$= 2f(\operatorname{cotg} \varphi_1 + \operatorname{cotg} \psi_1)\left\{(\operatorname{cotg} \varphi_3 + \operatorname{cotg} \psi_3)\,\mathfrak{r}_2 + (\operatorname{cotg} \varphi_2 + \operatorname{cotg} \psi_2)\,\mathfrak{r}_3\right\}$$

und hieraus unter Beachtung von (7) und der Beziehung $\mathfrak{s}_\nu^2 = 4r^2 \sin^2\psi_\nu$

$$\mathfrak{r} = \frac{\Pi \sin(\varphi_\nu + \psi_\nu)}{2\Pi \sin\varphi_\nu \sin\psi_\nu - \Sigma \sin^2\psi_\nu \sin\varphi_{\nu+1} \sin\varphi_{\nu+2} \cos\varphi_\nu} \left\{\frac{\sin\varphi_2 \sin\psi_2}{\sin(\varphi_2+\psi_2)}\mathfrak{r}_2 + \frac{\sin\varphi_3 \sin\psi_3}{\sin(\varphi_3+\psi_3)}\mathfrak{r}_3\right\} \quad (28)$$

welches Ergebnis, da

$$\frac{2\Pi \sin\varphi_\nu \sin\psi_\nu - \Sigma \sin^2\psi_\nu \sin\varphi_{\nu+1} \sin\varphi_{\nu+2} \cos\varphi_\nu}{\Pi \sin(\varphi_\nu + \psi_\nu)} = \Sigma \frac{\sin\varphi_\nu \sin\psi_\nu}{\sin(\varphi_\nu + \psi_\nu)} \quad . \quad (29)$$

mit den früher für die baryzentrischen Koordinaten und für den Ortsvektor des Neupunktes erhaltenen Gleichungen (11) und (12) in vollständigem Einklang steht.

Erneuerung der österreichischen Katasterpläne.

Von Obervermessungsrat Praxmeier, Wien.

Die österreichischen Katasterpläne gehen in ihrer weitaus überwiegenden Mehrheit auf die Meßtischaufnahmen zu Beginn des 19. Jahrhunderts zurück, die, anfänglich nur mangelhaft fortgeführt, in den Jahren um 1870 reambuliert worden sind und seit 1883 systematisch fortgeführt werden. Um die Wende des 19. Jahrhunderts beginnen sich schwache Ansätze zu Neuvermessungen zu zeigen, die sich bis heute zu einer schon ganz ansehnlichen Stärke entwickelt haben und im weiteren Ausbau begriffen sind, so daß sie, wenn auch nur sehr allmählich, zu einer Erneuerung der Katastralkarten wenigstens der allerwichtigsten Gebiete führen werden. Wie lang dieser Weg allerdings sein wird, läßt sich am besten aus der Tatsache ersehen, daß von den insgesamt 7527 Katastralgemeinden Oesterreichs (ohne Burgenland) bisher rund 160 Gemeinden neu vermessen worden sind. Gewiß ist in den kommenden Jahren mit dem weiteren Ausbau der Neuvermessungsabteilungen und daher mit erhöhter Tätigkeit zu rechnen. Diese Tätigkeit wird indessen lange nicht genügen, die immer zahlreicher auftauchenden Wünsche nach neuen Katasterplänen zu befriedigen, sie wird aber schon gar nicht geeignet sein, die nicht nur in Städten und geschlossenen Ortschaften, sondern vielfach gerade auf dem flachen Lande bestehenden Unstimmigkeiten zwischen dem Stande in der Natur und im Katasterplan gründlich zu beseitigen. Die Schwierigkeiten, die sich der Einzeichnung, sei es nur einer neuen Grenzlinie, ganz zu schweigen von der örtlich richtigen Einbringung größerer Vermessungsfiguren in die Darstellung, auf dem Katastralplan entgegenstellen, sind in Fachkreisen zu sehr bekannt, als daß sie noch weiter geschildert werden müßten, sie sind sogar über die Fachkreise hinausgedrungen und haben oft wohl auch übertriebene Vorstellungen von der Fehlerhaftigkeit der Katastralpläne erweckt. Wenn nun auch deren Ursachen nicht in der Unrichtigkeit oder Mangelhaftigkeit der seinerzeitigen Messung, sondern fast zur Gänze in dem Fehlen eines Zwanges zur Vermarkung der Besitzgrenzen liegen, wodurch es geschehen ist, daß bei gleichbleibender Plandarstellung die Grenzen während der inzwischen verflossenen Zeit in der Natur oft ganz erstaunliche Verrückungen erfahren haben, so ändert diese Erkenntnis nichts an der Tatsache, daß eben zahllose Abweichungen vorhanden sind, die zu beseitigen weder im Wege einer Neuvermessung noch einer noch so intensiv geführten Fortführung möglich ist, und daß eigentlich daran gedacht werden sollte, neue Wege zu eröffnen, um den Erneuerungsvorgang zu beschleunigen und vor allem die Fortführungsmessungen in solche Bahnen zu lenken, daß sie nicht mehr der Fortführung allein, sondern auch der Erneuerung dienen, daß gewissermaßen die Fortführung in den Dienst der Erneuerung gestellt wird.

Für die Durchführbarkeit dieses Grundsatzes besteht zunächst eine Voraussetzung: Jede Fortführungsmessung ist nach Zahlenmethoden so anzulegen, daß sie unmittelbar zur Kartierung im Falle einer Neuvermessung dieser Gemeinde verwendet werden kann. Nun besteht für den österreichischen Kataster diese Bestimmung allerdings schon seit mehreren Jahren, es darf jedoch nicht verkannt werden, daß sich bei der Verwertung dieser Aufnahmen für eine Neukartierung insoferne Schwierigkeiten ergeben, als diese in den Fortführungshandrissen niedergelegten Ergebnisse oft viele Jahre ungenützt im Elaborate der betreffenden Gemeinde liegen bleiben und daher zur Zeit ihrer Verwendung anläßlich einer Neuvermessung bereits veraltet und überholt sind. Diese Bestimmung verfolgt daher mehr den Zweck, die Fortführungsmessung der Genauigkeitsstufe einer Neuvermessung anzugleichen, als daß sie der Idee einer Katastererneuerung in wahrhaft praktischer Weise dienen kann.

Dieser geschilderten Schwierigkeit sucht nun, wie aus einem Aufsatze im Hefte 2 vom 1. Februar 1930 der „Zeitschrift für Vermessungswesen" zu entnehmen ist, die preußische Katasterverwaltung, die anscheinend ebenfalls vor die Frage nach Intensivierung der Erneuerung gestellt ist, in einer neuen Art zu begegnen, wie sie übrigens auch der Steuerrat Pfitzer in einem gelegentlich der Darmstädter Tagung 1929 des deutschen Vereines für Vermessungswesen gehaltenen Vortrage eindrucksvoll auseinandergesetzt hat.

Geheimrat S u c k o w, der Leiter der preußischen Katasterverwaltung, sagte in seinem Vortrage auf der Hauptversammlung des Landesplanierungsverbandes am 5. Oktober 1929 in Düsseldorf, daß die in einem Zuge ausgeführten

Neumessungen rheinischer Städte außerordentlich teuer wurden und daß in Hinkunft solche Neumessungen nur noch in hochwertigem Gelände, also in großen, lebhaften Städten vorgenommen werden. Das preußische Finanzministerium sei aber zum Entschlusse gekommen, die Erneuerung auf einem anderen Wege vorzunehmen, der nur recht wenig kostet und auch zum Ziele führt, wenn auch nur allmählig und in längerem Zeitraum. Der Grundgedanke ist, daß die Landestriangulation verdichtet und ein Polygonnetz gelegt wird; kommen Messungen vor, so werden sie an dieses Polygonnetz angeschlossen; ferner werden alle Fortführungsmessungen seit 1900 in dieses Polygonnetz eingebunden und so erhält die Katasterverwaltung allmählich einen neuen Kataster. Ausgenommen von dieser Erneuerung sind Gegenden mit großen Gütern, Waldungen usw., in denen erfahrungsgemäß Messungen selten vorkommen, und solche, die umlegungsreif sind, d. h. für eine Zusammenlegung in Aussicht genommen werden.

Es scheint sich also wie hier so auch anderswo die Erkenntnis immer mehr durchzuringen, daß eine Katastererneuerung in der bisher eingehaltenen Form gemeindeweiser Neuvermessungen schlechterdings aussichtslos wird, wenn sie nicht — wie seinerzeit bei der ersten Anlegung des Katasters — in großem Stile betrieben wird. Auch steht außer Zweifel, daß die Neuvermessung eines ganzen Gemeindegebietes große, und zwar augenblicklich zur Verfügung stehende Geldmittel erforderlich macht, in welchem Sinne wohl auch die Feststellung des Vortragenden, daß hohe Kosten anerlaufen sind, zu verstehen sein dürfte, denn ansonsten scheint die in einem Zuge vorgenommene Neumessung, wenn sie sich insbesonders nur auf die wirtschaftlich wertvolleren Teile beschränkt, rationeller zu sein, als eine ried- oder gar grundstücksweise erfolgende Neumessung.

Wie würden sich nun die Erneuerungsarbeiten vollziehen, wenn die neuen Grundsätze, die ich lediglich der Kürze wegen als „Pfitzermethode" bezeichne — da sie nur aus seinem zu Darmstadt gehaltenen Vortrage erstmalig bekannt geworden sind und womit ich in keiner Weise die Frage der Priorität aufrollen möchte —, auch im österreichischen Kataster Eingang fänden, wobei aber nicht übersehen werden darf, daß in Preußen andere Verhältnisse als in Österreich vorliegen? Der preußische Katasterplan ist ein Inselplan, d. h. er ist wohl aus gemeinsamen geodätischen Grundlagen entstanden, doch besteht jedes eine Parzellengruppe enthaltende Blatt für sich ohne Zusammenhang mit der angrenzenden Gruppe, wogegen Österreich seit jeher Rahmenpläne, d. h. nach Sektionsgrenzen getrennte Aufnahmsblätter hat, die sich meist über sehr große Gebiete, die Katastralgemeinden, im Zusammenhange erstrecken. Es liegen jedoch trotz dieser Verschiedenheit in der Pfitzermethode soviele verbindende Grundzüge für diese an sich so verschiedenen Planunterlagen vor, daß die vorerwähnte Frage nicht unangebracht scheint und damit ein Thema zur öffentlichen Erörterung bringen soll, aus der vielleicht wertvolle Winke für die zukünftige Gestaltung einer rationellen Erneuerung gewonnen werden könnten.

Zunächst ist die Frage der Triangulierungsgrundlagen zu erörtern. Die Katasterverwaltung hat durch eine äußerst geschickte, kluge und zielbewußte

Ausnützung sich bietender Gelegenheiten die im Jahre 1910 begonnene, durch die Kriegs- und Nachkriegsverhältnisse ins Stocken geratene Neutriangulierung Österreichs in ganz außerordentlicher Weise vorwärts gebracht, vor allem wohl dank der nunmehr ihre Früchte zeigenden Zusammenfassung des gesamten staatlichen Vermessungswesens in der Hand einer Zentralstelle, des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen. Seit der im Jahre 1925 erfolgten Inangriffnahme der Neutriangulierungsarbeiten ist sogar mit dem durch die Burgenlandvermessung stark verminderten Personale etwa ein Viertel des Gesamtgebietes Österreichs mit einem Dreiecksnetze bis zur III. Ordnung, d. i. mit Maximalseitenlängen von 10 bis 15 km überdeckt, wobei die Feldarbeit des Jahres 1930 noch nicht in Rechnung gestellt ist; die mit guten Gründen anzunehmende Steigerung dieser Arbeiten läßt eine Beendigung in 8 bis 10 Jahren erhoffen und auch die Verdichtung des Netzes III. Ordnung durch weitere Punkteinschaltungen bis zur Maximalseite von 5 km und darunter wird in einer Weise, deren Erörterung hier zu weit führen würde, vorgenommen werden, daß sie kein Hindernis für die von der Pfitzermethode zunächst geforderte Voraussetzung von Dreieckspunkten bilden soll.

Da nun an manchen Orten bereits das Netz IV. Ordnung vorhanden ist, könnte hier schon ohneweiters mit der Einschaltung weiterer Punkte und der Legung von Polygonzügen begonnen und nach Maßgabe der vorhandenen trigonometrischen Punkte — aber auch der Geldmittel — schrittweise fortgesetzt werden.

Aus Gründen der Arbeitsökonomie wäre diese Aufgabe zum überwiegenden Teile von ständigen Neuvermessungsabteilungen zu lösen, und zwar in jenen Gebieten, die vor allem wegen ihrer wirtschaftlichen Bedeutung oder wegen des besonders erneuerungsbedürftigen Zustandes der Katasterpläne in Betracht kommen; daß mit diesen Zugslegungen zweckmäßigerweise auch Grundstücksneumessungen Hand in Hand gehen, die der Fortführungsdienst fallweise fortsetzen kann, braucht wohl nicht besonders betont werden. Damit wären also alle Voraussetzungen geschaffen, die Pfitzermethode auch in Österreich neben den in gewohnter Weise vor sich gehenden Neuvermessungen zur Erneuerung des Katastralvermessungswerkes heranzuziehen, soferne sie sich in der Praxis überhaupt als durchführbar erweist.

Es wird zunächst Aufgabe der nachfolgenden Darstellung sein, die Feldarbeiten kurz zu skizzieren.

Jeder Fortführungsfall von größerer Bedeutung (Grundteilungen, Mappenrichtigstellungen usw.) ist aus Zweckmäßigkeitsgründen immer zum Anlasse einer weiter ausgreifenden Vermessung zu machen, was ja insoferne leichter erreichbar sein wird, als in Hinkunft jede Anschlußmessung, jede Kontrolle und Sicherstellung aufgefundener alter Grenzpunkte grundsätzlich entfällt, somit den Vermessungsfachmann dieser ungemein zeitraubenden Vorarbeiten enthebt, er aber vor allem — ein nicht gering einzuschätzendes psychologisches Moment — von den Zweifeln befreit ist, wie weit er mit den Anschlußmessungen zu gehen hat und wieviele unverändert gebliebene Punkte er in die Vermessung einbeziehen soll. Hat er — was aus einer fortgeführten Übersichtskarte im Bezirksvermessungsamte feststellbar ist — Polygonpunkte zur Verfügung, so wird er sie ohneweiters benützen, andernfalls wird er zur Zugslegung schreiten müssen, was im Falle einer Vermessung durch das Bezirksvermessungsamt ohneweiters durchführbar sein soll, da die Gemeinde gleichzeitig Depotstelle von Versicherungssteinen werden müßte. Allerdings ergeben sich hier schon Fragen des rationellen Arbeitsvorganges insoferne, als der Fortführungsbeamte zunächst einmal den administrativen Apparat, d. i. die Vorladung der Grundbesitzer zur Grenzbegehung, die Grenzbegehung selbst, die Abfassung der Niederschriften usw., unter Umständen mehrmals für denselben Besitzer und dasselbe Grundstück aufbieten muß, wenn bei der ersten derartigen Vermessung das ganze Grundstück, worunter hier das topographisch geschlossene Besitztum verstanden ist, nicht auf einmal erfaßt werden kann; doch sollte dieser Fall nur eine Ausnahme bilden. Auch wird es sich sehr häufig ereignen, daß ein und dieselbe Polygonseite, Messungslinien usw. mehrmals gemessen, daß bei Polarkoordinatenmethoden ein und derselbe Standpunkt mehrmals bezogen werden muß, daß die Messungen, insbesonders die direkten, dadurch leiden, weil dem Fortführungsbeamten nicht genügend geschulte Handlanger zur Verfügung stehen; mit einem Worte: daß die Rationalität der Aufnahmsmethode nicht so voll zur Entfaltung kommt, als es bei einer in einem Zuge durchgeführten Neuvermessung der Fall ist. Es bleibt aber hier immer noch die Frage offen, ob nicht dieses kleinere Übel den unleugbar bestehenden Mißständen vorgezogen werden müßte und ob es richtig ist, lieber die alten, längst schon den Bedürfnissen nicht entsprechenden Katasterpläne nur deswegen beizubehalten, weil eine durchgreifende Neuvermessung nicht möglich ist. Vielleicht wäre hier dadurch abzuhelfen, daß der Wirkungskreis der Bezirksvermessungsämter erweitert wird, sie mehr zur Neuvermessung größerer Grundstücksgruppen herangezogen werden und den Leitern freie Hand in ihren Entschlüssen betreffend Größe und Umfang der jeweils aufzunehmenden Gebiete zu lassen; daß insbesonders Vermessungen, die sich aus dem Agrarverfahren, aus Straßen- und Wasserbauten ergeben, nicht auf ihre unmittelbare Umgebung beschränkt bleiben, sondern nach Möglichkeit auch in die Breite geführt werden. Auch könnten durch weitgehende Zentralisierung mancher Arbeiten wesentliche Vereinfachungen platzgreifen und die Feldarbeit durch reichlichere Verwendung distanzmessender Instrumente erleichtert werden. Es ließe sich also immerhin denken, allen vorerwähnten und sich vielleicht noch weiterhin ergebenden Übelständen in der Feldarbeit durch geeignete organisatorische Maßnahmen ziemlich wirksam zu begegnen.

Liegt somit die Einführung des Pfitzerverfahrens hinsichtlich der Feldarbeiten durchaus im Rahmen des Möglichen, so dürften sich der kanzleitechnischen Durchführung noch weniger Schwierigkeiten in den Weg stellen. Zentralen Stellen, gleichgültig, ob am Sitze der Vermessungsinspektoren oder im Bundesamt, obläge es, die Aufnahmsblätter durch Einzeichnung des Sektionsrechteckes und Auftragung der trigonometrisch und polygonometrisch bestimmten Punkte vorzubereiten. Da die Sektionseinteilung nach Gauß-Krüger-schen konformen Meridianstreifen für ganz Österreich bereits feststeht, so ist jedes einzelne Aufnahmsblatt einer Gemeinde von vorneherein örtlich fixiert und es kann mit Detailkartierungen auf diesen Blättern ohneweiters begonnen werden. Inniges Zusammenarbeiten zwischen diesen Stellen und Bezirksvermessungsämtern müßte bestehen, um die Letztgenannten zeitraubender Arbeiten zu entheben und um ihnen genügend Mappenmateriale für ihre Fortführungsfälle an die Hand zu geben. Jeder Vermessungsfall wird in das zugehörige neue Mappenblatt kartiert, die Auszeichnung erfolgt erstmalig in schwarzer Tusche. Änderungen wären wie bisher in roter Farbe zu halten, falls ein Auseinanderhalten von altem und geändertem Stand überhaupt für zweckmäßig befunden wird.

In diesem Stadium beginnt aber eine kaum überbrückbare Schwierigkeit sich bemerkbar zu machen: Die Flächeninhaltsberechnung. Der österreichische Katasterdienst kann aus Gründen der Arbeitsökonomie nicht auf die rein analytische Flächenberechnung übergehen, er wird — wie jetzt sogar auch noch bei vollständig neu vermessenen Gemeinden — noch geraume Weile an der graphischen Methode festhalten; diese setzt aber natürlich die Möglichkeit voraus, Einzelberechnungen auf Gruppen und Gruppen auf den Inhalt des ganzen Blattes abzustimmen. Daran muß es aber bei Kartierungen nach der Pfitzermethode fehlen, da ja im allgemeinen nur einzelne Grundstücke, sehr selten ganze Grundstücksgruppen, fast niemals aber ganze Blätter aufgenommen werden dürften. Nun könnte ein Ausweg vielleicht darin gefunden werden, daß die Abstimmung auf das der jeweiligen Vermessungsfigur umschriebene Hektar- oder Viertelhektar-Quadratnetz erfolgt. Es müßte also besonderer Wert auf die richtige Konstruktion der Netzquadratlinien gelegt werden, was allerdings bei der heutigen Vervollkommnung der Auftragsgeräte keine Schwierigkeiten bereitet, zumal diese Arbeit bereits von der vorerwähnten Zentralstelle im Zusammenhange mit der Auftragung der trigonometrischen und Polygonpunkte ausgeführt werden müßte. Auf diese Weise wird es immerhin möglich sein, auch eine nur geringe Ausdehnung besitzende Aufnahmsfigur dem Flächeninhalte nach so genau zu berechnen, daß keine die erlaubte Fehlergrenze überschreitende Differenz gegenüber einer durch Abstimmung auf den ganzen Blattinhalt erhaltenen Berechnung auftritt. Wird diese Konzession dem Pfitzerverfahren gemacht, dann bildet auch die Aufstellung näherer Detailvorschriften für die Flächenberechnung, so z. B. für den Fall, als an eine bereits bestehende Grundstückgruppe eine neuaufgenommene Gruppe oder auch nur ein Grundstück angeschlossen wird, keine weiteren Schwierigkeiten.

Wohl ist noch ein weiteres und wie mir scheint, das wesentlichste Hindernis zu überwinden; das ist die Aufrechterhaltung der bisherigen geschlossenen Plandarstellungen — Österreich hat ja Rahmenpläne — in der Planvervielfältigung. Das hochentwickelte Reproduktionswesen des österreichischen Katasters versorgt seinen Interessentenkreis mit genauen Kopien dieser Rahmenpläne, die allen an einen Grundkataster zu stellenden Anforderungen im Rahmen der den österreichischen Fortführungsmappen an sich innewohnenden Genauigkeit entsprechen. Diese Mappendrucke bilden ein unentbehrliches Requisit für alle Zwecke des heutigen Wirtschaftslebens und können einfach nicht mehr entbehrt werden. Bei Einführung der Pfitzermethode müßte es nun notgedrungen zu einer Zweiteilung in der Reproduktion kommen: einerseits die bisherigen Mappendrucke mit ihren unveränderten, einheitlichen und geschlossenen Grundstücksdarstellungen, auf der anderen Seite die von den Bezirksvermessungsämtern nach der Pfitzermethode neu angelegten Blätter, die häufig den Eindruck der Zerrissenheit erwecken werden, da sie ja nur teilweise mit — allerdings richtigen — Grundstücksdarstellungen bedeckt sind. Freilich können und müssen vermutlich auch diese Blätter reproduziert werden, besonders wenn sie einen gewissen Grad der Bedeckung erreicht haben, und könnten dann im Zusammenhalte mit den alten unveränderten Mappendrucken sich zu einem den neuesten Stand aufweisenden Mappenbilde vereinen. Dieser in geodätischer Beziehung durchaus einwandfreie Weg würde aber bei den Interessenten auf keine besonderen Sympathien stoßen, da sie von jeher gewohnt sind, einheitliche Planelaborate zu erhalten und solche getrennte Grundstücksdarstellungen, die naturgemäß auch in verschiedenen Maßstäben gehalten wären, etwa bei Projektierungen sich äußerst unangenehm fühlbar machen würden. Man wird daher wohl daran denken müssen, lediglich für Reproduktionszwecke auch die alte Fortführungsmappe an jenen Stellen, die bereits durch die Pfitzermethode erfaßt worden sind, fortzuführen, wenn auch natürlich nicht mehr mit der bisherigen Genauigkeit, so daß diese Mappendrucke mehr den Charakter einer Übersichtskarte wenigstens hinsichtlich jenes Teiles, für den schon genaue Fragmentaufnahmen bestehen, erhalten; neben diesen Drucken müßten wohl, wie schon vorhin gesagt, auch Vervielfältigungen der neuen Kartierungen herausgebracht werden. Für diese Fortführung der alten Drucke wäre nur eine höchst beschränkte Anzahl von alten Punkten nötig, um die neue Vermessungsfigur in das Mappenbild einzupassen, es könnten hiebei auch Pantograph oder ähnliche mechanische und auch photographische Hilfsmittel angewendet werden; schließlich könnte der Interessent durch einen im Mappenbilde angebrachten Hinweis aufmerksam gemacht werden auf das Bestehen einer genaueren Aufnahme, die er sich jedenfalls dann beschaffen wird, wenn er es von seinem Standpunkte aus für notwendig erachtet. Es dürften also auch in diesem Falle, wenn auch große, so doch bei einiger Einfühlung in neue Verhältnisse keine unüberbrückbaren Schwierigkeiten entstehen.

Schwierigkeiten sowohl als Vorteile der Pfitzermethode sind in Vorstehenden gegeneinander abgewogen worden, und zwar, wie der Verfasser glaubt, wenigstens den Hauptpunkten nach, und dabei scheint sich ein gewisses Übergewicht für die Pfitzermethode zu ergeben. Es ist nun natürlich gar nicht möglich, diese bedeutungsvolle Frage im Rahmen eines Aufsatzes erschöpfend zu behandeln und sie bis in die letzten Details konsequent durchzudenken, so daß also immerhin die Möglichkeit besteht, daß vielleicht sogar wesentliche Momente, die für oder gegen sprechen, dabei übersehen worden sind. Das soll auch nicht die Absicht der vorstehenden Betrachtungen sein, die vielmehr nur darin besteht, die Frage einer rationellen Katasterplanerneuerung überhaupt einmal auch in Österreich von diesem Gesichtspunkte aus zur Erörterung zu stellen. Es sollte eigentlich Zweck der Zeilen sein, zu erfahren, ob der Standpunkt richtig ist, der bisher Geltung hatte und noch hat, daß nämlich ein großer Teil der Katasterpläne sich auch noch weiterhin für die Fortführung als brauchbar erweisen dürfte und daß in Gebieten, wo dies nicht mehr der Fall ist, die Neumessung ganzer Gemeinden eben in stärkerem Maße einzusetzen habe, oder ob es wirtschaftlicher und zweckentsprechender ist, nach der Pfitzermethode schrittweise neue Pläne zu schaffen.

Literaturbericht.

1. Bücherbesprechungen.

Bibliotheks-Nr. 761. Jaarverslag van den Topografischen Dienst in Nederlandsch-Indië over 1929. 25ste Jaargang. (20 × 27·5 cm XIV, 139 Seiten) 28 Tafeln mit vielen Figuren. Weltenvreden: Reproductiebedrijf Top. Dienst 1930.

Seit 1905 werden vom Topographischen Dienst für Niederländisch-Indien Jahresberichte über die im Laufe eines Jahres durchgeführten geodätischen Arbeiten veröffentlicht. Wir hatten Gelegenheit, die zwei letzten (23. und 24.) Jahresberichte in unserer Zeitschrift zu besprechen und gebührend zu würdigen.

Anbei liegt der 25. Bericht über das Jahr 1929 vor, ein schöner Band von rund 140 Seiten und 28 Tafeln, die teils Kartenbeilagen und nach Strichzeichnungen hergestellte Textfiguren enthalten.

Nach einem Vorwort des Chefs der Topographischen Aufnahme Kuiper folgt ein Abschnitt auf 15 Seiten, der eine Allgemeine Übersicht bietet.

Auf 43 Seiten wird Näheres über die Feldarbeiten gebracht: Triangulierungen, Detail der topographischen Aufnahmen auf den Inseln Sumatra, Bangka usw., wobei auf schönen Tafeln die Örtlichkeiten dieser Arbeiten und ihre Verteilung nebst interessanten Tabellen mit wissenswerten Daten zusammengestellt erscheinen.

Der nächste Abschnitt bietet auf 20 Seiten eine Übersicht der Arbeiten der Reproduktionsanstalt mit den Abteilungen für Litographie, Photographie und die Druckerei mit den Offsetpressen. Eine Tafel mit begleitendem Text zeigt, was an Kartenwerken produziert wurde.

Ein eigener Abschnitt ist administrativen Angelegenheiten, insbesondere Personalien gewidmet, wobei die Verteilung auf die einzelnen Arbeiten während des Berichtsjahres verfolgt werden kann.

Der letzte Abschnitt bringt wie die früheren Berichte fachliche wissenschaftliche Arbeiten des Personales; so behandelt Boon ein photogrammetrisches Thema, Horstink berichtet über die Kraterkarte des Slamet, Gsöllpointner gibt einen schönen, abgerundeten Artikel über die Bewegung des Erdpoles und Kessel bespricht eine Methode der Kartendarstellung und beschäftigt sich mit der Schilderung eines Instrumentes, das aus hypsometrischen Karten Perspektiv-Reliefs herzustellen gestattet.

Durch Darbietung von Lebensbildern wird zweier Männer des topographischen Dienstes: Bakhuis und van Roon gedacht und in anerkennenden Worten ihre langjährige Tätigkeit dargestellt.

Die mustergültigen Jahresberichte des Topographischen Dienstes für Niederländisch-Indien bilden wertvolle Dokumente für die Geschichte des Vermessungswesens und gewähren dem Fachmann den gewünschten Einblick in die planmäßige geodätische Arbeit Hollands in seiner reichen ostasiatischen Kolonie.

Es wäre zu wünschen, daß auch andere Staaten mit Kolonialbesitz dem Beispiele Hollands folgten und uns in Jahresberichten über ihre geodätischen Arbeiten informierten.

D.

Bibliotheks-Nr. 762. Schepers J. H. G., Professor, und Schulte F. C. A., Kapitän: Geodetic Survey in the Netherlands. East Indies. Mit 7 Tafeln (17 × 24 cm, 23 Seiten). Verlag, Topograph. Dienst, Weltevreden 1930.

Dieser für die Geodätische Sektion der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik verfaßte Bericht gibt eine Übersicht über die vom geographischen Dienste seit 1850 und vom Militär-topographischen Dienst seit 1883 bis heute geleisteten geodätischen Arbeiten in Holländisch-Ostindien, und zwar;

Triangulierungen,
Basismessungen,
Astronomische Beobachtungen (Positionsbestimmungen),
Trigonometrische Aufnahmen und
Präzisions-Nivellemente.

Holland hat in seiner ostasiatischen Kolonie im Dienste der praktischen Land- und Erdmessung eine Leistung vollbracht, die in geodätischen Fachkreisen mit großer Befriedigung aufgenommen und gewiß die verdiente Anerkennung finden wird. D.

Bibliotheks-Nr. 763: Basch A.: Die Fehlertensoren und das Fehlerübertragungsgesetz der vektoralgebraischen Elementaroperationen. Aus den Sitzungsber. der Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-naturw. Klasse Abt. II a, 137. Band, 8. Heft. 16 Seiten. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1928.

Während früher die Ausgleichsrechnung auch bei Behandlung geometrischer Fragen auf dem Boden der Skalarmathematik stand, wurde in den letzten Jahren die vektorische Betrachtungs- und Behandlungsweise mit Erfolg eingeführt. Insbesondere sei hier auf die vektoranalytischen Ausgleichungen R. Schumann's verwiesen, weiter auf die Untersuchungen von K. Ulbrich. Während sich diese Arbeiten mehr speziellen Problemen widmen, befaßt sich der schon durch zahlreiche Fehler- und wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen bekannte Autor mit zwei Grundfragen der vektorisch vorgehenden Fehlertheorie: der Frage der Fehler-, bzw. Genauigkeitskennzeichnung und der Frage der Fehlerübertragung. Seine Untersuchung führt er von vornherein in möglichster Verallgemeinerung.

Für die Genauigkeitskennzeichnung eines Vektors reicht die Forderung hin, daß der mittlere Fehler der Komponente des Vektors in einer beliebigen Richtung bestimmbar ist. Dieser Forderung wird entsprochen, indem die Genauigkeit eines Vektors im n-dimensionalen Raum mit entsprechender Verallgemeinerung der Definition des mittleren Fehlers durch einen symmetrischen Affinor des n-dimensionalen Raumes, den ,,Fehlertensor", gekennzeichnet wird. Die rechtwinkligen Skalarkomponenten des Fehlertensors erhält man durch linksfaktorielle und rechtsfaktorielle Multiplikation des Tensors mit je einem Grundvektor. Die n Hauptglieder des Tensors sind die mittleren Fehlerquadrate der n Vektorkomponenten, sie sind daher stets positiv. Die $\frac{1}{2} n (n-1)$ Seitenglieder, für die der Name ,,mittlere Fehlerrechtecke" eingeführt wird, können positiv, null oder negativ sein. Das Verschwinden eines Fehlerrechteckes $\mu^2_{\varkappa\lambda}$ ist das Zeichen für die vollständige korrelative Unabhängigkeit der Fehler $x_\varkappa$ und x_λ, während ein von Null verschiedener Wert durch korrelative Abhängigkeit verursacht ist.

Dem Fehlertensor ist ein Kotensor zugeordnet, dessen Glieder die aus der Matrix des Fehlertensors gebildeten Unterdeterminanten sind. Letztere sind die Koeffizienten der quadratischen Gleichung eines Hyperellipsoids, ,,des mittleren Fehlerhyperellipsoids". Der Normalabstand einer Tangentialhyperebene dieses Hyperellipsoids von seinem Mittelpunkt gibt den mittleren Fehler an, der dieser Lotrichtung zugehört.

Wird das Fehlerhyperellipsoid auf eine Koordinatenebene projiziert, so ist die Konturkurve die ,,mittlere Fehlerellipse", welche für die Genauigkeit der Projektion des behandelten Vektors in die betreffende Koordinatenebene kennzeichnend ist.

Nun werden die Fehlerübertragungsgesetze für die vektoralgebraischen Elementaroperationen entwickelt. Für den neuen Vektor, der aus dem gegebenen fehlerhaften Vektor durch Affintransformation hervorgeht, werden Fehlertensor und Fehlerhyperellipsoid berechnet. Weiter wird gezeigt, wie Fehlertensor und Fehlerhyperellipsoid für eine Linearkombination von Vektoren und im dreidimensionalen Raum für das Vektorprodukt zu gewinnen sind unter der wesentlichen Voraussetzung, daß zwischen den Fehlern der verschiedenen Ausgangsvektoren keine Korrelation besteht. Unter der gleichen Voraussetzung wird der mittlere Fehler des Skalarproduktes zweier Vektoren, des Tripelpunktes im dreidimensionalen Raum (Spatinhalt) und der von fehlerhaften Vektoren der Ebene gebildeten Parallelogrammfläche aus den Fehlerellipsoiden, bzw. Fehlerellipsen der Vektorfaktoren bestimmt.

Als Anwendungsbeispiel wird der mittlere Flächenfehler eines Polygonzuges mit ungenau bestimmten Eckpunkten berechnet.

Mehrfach wird gezeigt, wie die für die üblichen Zahlenrechnungen der Praxis im Falle rein rechnerischer Vorgangsweise notwendigen Skalargleichungen durch Komponentenzerlegung aus den Tensorgleichungen erhalten werden. M ä d e r.

Bibliotheks-Nr. 764: B a s c h A.: F e h l e r t e n s o r e n, F e h l e r a f f i n o r e n u n d a l l g e m e i n e F e h l e r ü b e r t r a g u n g s g e s e t z e. Aus den Sitzungsber. der Wiener Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-naturw. Klasse, Abt. II a, 138. Band, 3. und 4. Heft, 44 Seiten. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky A. G. Wien und Leipzig 1929.

Im Anschluß an die im Vorigen besprochene Arbeit werden hier die Gesetze untersucht, welche die Genauigkeitskennzeichen von skalaren und vektoriellen Funktionen mehrerer Vektoren bestimmen, und zwar unter der gegenüber der früheren Veröffentlichung allgemeineren Voraussetzung, daß zwischen den Fehlern der verschiedenen Vektoren korrelativer Zusammenhang besteht.

Wenn zwei fehlerhafte Vektoren vorliegen und von beiden die Fehlertensoren bekannt sind, so reicht dies noch nicht hin, um die Genauigkeit irgend einer skalaren oder vektoriellen Funktion dieser Vektoren kennzeichnen zu können. Bei korrelativer Abhängigkeit zwischen den Fehlern der Ausgangsvektoren kommen außer den mittleren Fehlerquadraten und Fehlerrechtecken, welche die Skalarkomponenten der zwei Fehlertensoren bilden, noch mittlere Fehlerrechtecke zur Wirkung, welche die rechtwinkligen Skalarkomponenten eines im allgemeinen unsymmetrischen Fehleraffinors sind. Der durch n^2 Skalare gegebene „Fehleraffinor des geordneten Vektorpaars", der den korrelativen Zusammenhang der Fehler zweier Vektoren kennzeichnet, tritt in den vektorischen Fehlerübertragungsgesetzen in gleicher Weise an Stelle des mittleren Fehlerrechteckes der skalaren Gesetze, wie der Fehlertensor eines Vektors an Stelle des mittleren Fehlerquadrats eines Skalars.

Im Fehleraffinor eines Paares von untereinander verschiedenen Vektoren sind Haupt- und Seitenglieder mittlere Fehlerrechtecke. Während die Hauptglieder eines Fehlertensors als mittlere Fehlerquadrate stets positiv sind, können die Hauptglieder des Fehleraffinors positiv, negativ oder null sein.

Zweckmäßig wird der Fehleraffinor additiv in seinen symmetrischen Bestandteil, den Tensoranteil, und in den alternierenden (antimetrischen) oder Axiatoranteil zerlegt. (Die Bezeichnungsweise des Autors lehnt sich an die des Lehrbuchs der Vektorrechnung von Spielrein an.) Der Tensoranteil besitzt dieselben Hauptglieder wie der Fehleraffinor. Die Hauptglieder des Axiatoranteils sind Null. Der Tensoranteil wird als Fehlertensor des Vektorpaares bezeichnet und ist im n-dimensionalen Raum als Mittelpunktshyperfläche dieses Raumes darstellbar. Durch ihn wird die tensorische Fehlerkorrelation gekennzeichnet. Dem antimetrischen Bestandteil entspricht ein Bivektor, der Fehlerturbor des geordneten Vektorpaares, der die turborische Fehlerkorrelation oder die Fehlerturbulenz charakterisiert.

Bei Übergang zum konjugierten Vektor geht der Fehleraffinor in den konjugierten Affinor über, der Fehlertensor bleibt unverändert, der Fehlerturbor wechselt das Vorzeichen.

Demnach kann der Fehlertensor eines Vektors als Fehleraffinor eines sich selbst konjugierten Vektorpaares angesehen werden.

Fehlertensor, Fehlerkotensor und Fehlerhyperfläche des Vektorpaares werden eingehend studiert, besonders in dem praktisch wichtigen zweidimensionalen Fall.

Das Verhalten der Genauigkeitskennzeichen einer Funktion mehrerer Vektoren wird untersucht, und zwar die Fälle, daß die Funktionen

1. lineare homogene Funktionen von Vektoren mit Skalaren als Vorzahlen,
2. skalare Vektorfunktionen,
3. lineare homogene Funktionen von Vektoren mit Affinoren als Vorzahlen sind.

Im einzelnen sei auf die Arbeit verwiesen. Durch Trennung in den Tensor- und Turboranteil werden die korrelativen Zusammenhänge klar ersichtlich. Die Ergebnisse werden methodisch übersichtlich entwickelt und diskutiert.

Als Beispiel für die Fehlerübertragung durch eine homogene lineare Funktion zweier Vektoren, in der die Vorzahlen Affinoren, und zwar Drehstrecker sind, wird die Fehlerfortpflanzung beim Vorwärtseinschneiden gebracht. Das System der Fehlerkurven und der Fehlerturbor des Paares der Altpunkte wird als bekannt vorausgesetzt, hieraus werden die geometrischen Entstehungsgesetze der von der Ungenauigkeit der Lagebestimmung der Altpunkte herrührenden Fehlerellipse eines durch Vorwärtseinschneiden bestimmten Neupunktes entwickelt. Ähnlich werden die geometrischen Gesetze der Korrelation der Fehler zweier Neupunkte studiert, welche durch Vorwärtseinschneiden aus den Endpunkten einer und derselben Basis bestimmt sind.

Den bedeutungsvollen Forschungen unseres Kollegen A. Basch wünschen wir weitere ähnliche Erfolge. Mögen sie in der Geodäsie (Punkteinschaltung, Basisentwicklung, Netzausgleich) bald weiteste Anwendung finden! Mader.

Bibliotheks-Nr. 765: Rietz H. L.: Handbuch der mathematischen Statistik. Deutsche Ausgabe mit einem Geleitwort von R. v. Mises, herausgegeben von F. Baur. Verlag Teubner, Leipzig und Berlin 1930. Geb. RM. 16.60.

Das 253 Seiten starke Buch in Kleinformat trägt trotz des für ein Handbuch geringen Raumes diesen Namen mit vollem Recht. Die Menge des Gebotenen ist überraschend groß. Mitglieder des Ausschusses für mathematische Statistik der physikalischen Abteilung des amerikanischen National Research Council haben das Buch herausgegeben. Die mathematische Statistik spielt in der anglikanisch-amerikanischen Welt eine bedeutendere Rolle als in Deutschland. Die praktischen Amerikaner haben die große Bedeutung der statistischen Wissenschaften erkannt und vielen Berufsgattungen, nicht nur Versicherungsmathematikern und Statistikern im engeren Sinne, sondern auch Wirtschaftlern und Technikern sind die statistischen Methoden geläufig und unentbehrlich.

Von angesehenen Praktikern ist das Buch für einen weiten Leserkreis, der an der praktischen Anwendung der Statistik interessiert ist, geschrieben worden. Daher bringt das erste Kapitel eine Einführung in die für Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung unentbehrlichen mathematischen Grundbegriffe.

In den weiteren Kapiteln ist vieles, das nur in Zeitschriften verstreut war, hier zum ersten Male gesammelt, so daß das Buch auch dem wissenschaftlich gebildeten Leser wertvoll ist.

Der deutsche Bearbeiter des Buches, der bekannte Meteorologe und Statistiker F. Baur, hat alle Kapitel überarbeitet, sie mit vielen Zusätzen und Anmerkungen versehen, ebenso die dankenswerte Mühe auf sich genommen, das Literaturverzeichnis neu zu bearbeiten und dem geänderten Leserkreis anzupassen. Insbesondere wurden grundlegende Werke und Arbeiten in deutscher Sprache, die im englischen Verzeichnis von 1924 fehlen, aufgenommen und das Verzeichnis auf den Stand von 1930 ergänzt.

Durch die zahlreichen Literaturhinweise wird der Leser, der sich für einzelne Probleme und ihre mathematischen Theorien mehr interessiert, zu weitergehenden Studien angeleitet.

In den einzelnen Kapiteln werden zuerst die Begriffe erklärt und anschaulich interpretiert, hierauf wird der mathematische Teil leicht verständlich entwickelt und auf sehr instruktiv gewählte Beispiele angewendet, die vollständig durchgerechnet werden. Die Auswahl der den verschiedensten Gebieten entnommenen Beispiele ist sehr reichhaltig, so daß der Praktiker wohl häufig zu dem ihm gerade vorliegenden Problem ein ähnliches in dem Buch fertig entwickelt und durchgerechnet finden wird.

Zur Charakterisierung der Reichhaltigkeit des Buches möge der Inhalt der einzelnen Kapitel angegeben werden. Es behandeln

E. V. Huntington Mathematische Hilfsmittel, H. L. Rietz Häufigkeitsverteilungen, Mittelwerte und Streuungsmaße, J. W. Glover Interpolation, Summenbildung und Glättung, E. V. Huntington Anpassung von Kurven nach der Methode der kleinsten Quadrate und der Methode der Momente, H. L. Rietz Stichprobenerhebungen; Bernoullische, Poissonsche und Lexissche Verteilungen, H. C. Carver Häufigkeitskurven, H. L. Rietz und A. R. Crathorne Einfache Korrelation, T. L. Kelley Partielle und Mehrfach-Korrelation, W. M. Persons Korrelation von Zeitreihen, W. L. Crum Die Periodogramm-Analyse, A. A. Young Indexzahlen.

Zum Schlusse sind Tafeln der Wahrscheinlichkeitsfunktionen gebracht.

Dem Buch ist in deutschen Landen weiteste Verbreitung zu wünschen. Es ist nicht nur dem Mathematiker, Meteorologen, dem mathematisch geschulten Volkswirtschaftler von Wert, sondern wird auch dem Betriebs- und Wirtschaftsführer viel Anregung bringen zu betriebswissenschaftlichen, statistischen Untersuchungen. In letzterem Sinne wird das Büchlein vielleicht auch etwas dazu beitragen, daß die entsetzliche Wirtschaftsnot unseres Vaterlandes gemildert wird. Mader.

---

2. Zeitschriftenschau.

Allgemeine Vermessungsnachrichten.

Nr. 24. Lüdemann: Untersuchung der Schleifenschlußfehler der ersten Haupteinwägung des damaligen Königreiches Sachsen auf ihre Eigenschaft als zufällige Beobachtungsfehler.

Nr. 25. Israel: Zur Umwandlung lokaler konformer Koordinaten sächsischer Dreieckspunkte niederer Ordnung in deutsche Einheitskoordinaten. — Slawik: Das Bussolen-Tachymeter.

Nr. 26. Möllenhoff: Das Bodengesetz der Republik China vom 30. Juni 1930. — Vom Meliorationswesen.

Nr. 27. Becker: Die Entschädigungspflicht bei städtebaulichen Enteignungen. — Klempan: Über die Beurkundung der Auflassungsverträge bei freiwilligen Baulandumlegungen. — Joppen: Beweiskraft der Messungszahlen.

Nr. 28. Göbel: Zehn Jahre Beirat für das Vermessungswesen. — Thie: Beitrag zur Wege- und Grabenabsteckung.

Nr. 29. Thie: Fortsetzung und Schluß aus Nr. 28.

Nr. 30. Blumenberg: Das neuhergerichtete Geodätische Institut der Technischen Hochschule Hannover als Ort für die 33. Tagung und Mitgliederversammlung des Deutschen Vereins für Vermessungswesen vom 7. bis 11. August 1931. — Schulte: Über ein Lehrbuch aus dem Jahre 1573.

Zeitschrift für Vermessungswesen.

Heft 13. Staab: Karteneingang. — Fasching: Erdellipsoid und Normalschwere. — Lüdemann: Über die Genauigkeit der Ablotung mit dem Schnurlot bei der Zugmessung. — Rohleder: Neuordnung des Kartenwesens in den Landesplanungsverbänden. — Lindenstruth: Das Vermessungswesen im Volksstaat Hessen.

Heft 14. Lucas: Seitlicher Abstand eines Punktes von einer Geraden. — Schroeder: Die Aufgabe der Landesplanung.

Heft 15. Clément: Wechselseitige Ableitung von Höhen und Spannungen. — Lips: Höhenmeßlatten für Einwägungen ohne Rechnung. — Panther: Das badische Gesetz über die Feldbereinigung vom 27. März 1931.

(Abgeschlossen am 1. August 1931.)

3. Bibliothek des Vereines.

Der Redaktion sind zur Besprechung zugegangen:

Dr. R. Haußner und Dr. W. Haack; Darstellende Geometrie, Sammlung Göschen, drei Bändchen, W. de Gruyter & Co., Berlin 1931.

H. v. Sanden: Darstellende Geometrie, B. G. Teubner, Leipzig 1931.

Vereins-, Gewerkschafts- und Personalnachrichten.

1. Personalnachrichten.

Ehrenpromotion. Rektor und Senat der Technischen Hochschule zu Danzig verliehen dem Direktor des Geodätischen Institutes zu Potsdam, Herrn Wirkl. Geh. Admiralitätsrat Professor Dr. Kohlschütter, in Anerkennung seiner hervorragenden Verdienste um Wissenschaft und Lehre der Geodäsie sowie für sein Wirken um die Einigung des Vermessungswesens die Würde eines Doktoringenieurs ehrenhalber.

Promotionen zu Doktoren der technischen Wissenschaften. Am 4. Juli 1931 wurden an der Technischen Hochschule zu Wien der Vermessungsinspektor des Wiener Stadtbauamtes Ing. Eduard Brabenec und der Vermessungsrat im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen Ing. Hans Rohrer zu Doktoren der technischen Wissenschaften promoviert.

Zweite Staatsprüfung an der Technischen Hochschule in Wien. Im Julitermine 1931 haben die II. Staatsprüfung aus dem Vermessungswesen bestanden:

Eördögh Wilhelm,
Haberl Herbert,
Heimel Eduard,
Ing. Kilga August
Leder Rudolf,
Mitter Josef,
Praitenlachner Eduard,
Ing. Reibhorn Viktor,
Schumann Siegfried,
Ing. Sébor Johann und
Sokob Emmerich.

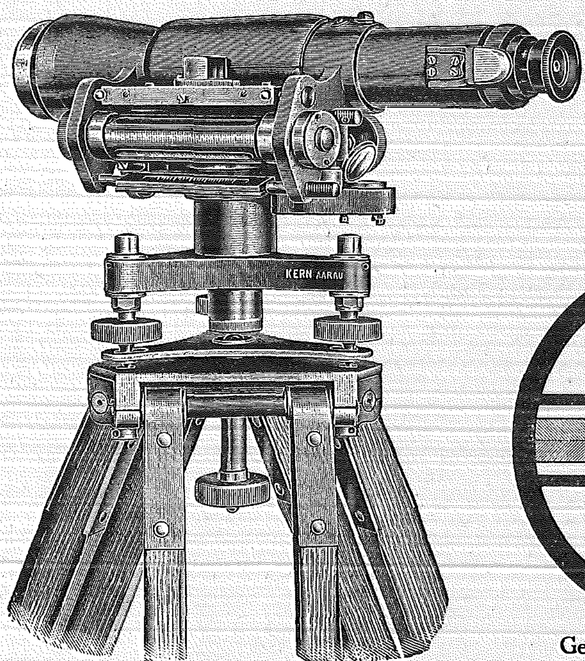
Überstellungen. a. o. Assistent Ing. Johann Biach mit 1. Juni 1931 zum p. Vermessungskommissär zur Abt. V/4; a. o. Assistent Ing. Josef Rosak mit 1. August 1931 zum p. Vermessungskommissär zur Abt. V/4; Kontrollor Eduard Vanek mit 1. August 1931 zum technischen Revident; Adjunkt Josef Reinl mit 1. August 1931 zum technischen Assistent.

Versetzungen. Vermessungsrat Ing. Max Ludwig vom B. V. A. Kufstein zur B. V. A.-Zweigstelle Kitzbühel; Kontrollor Josef Schwecherl vom B. V. A. Kufstein zur B. V. A.-Zweigstelle Kitzbühel; Kontrollor Richard Petsch vom B. V. A. Mistelbach zum B. V. A. Rohrbach.

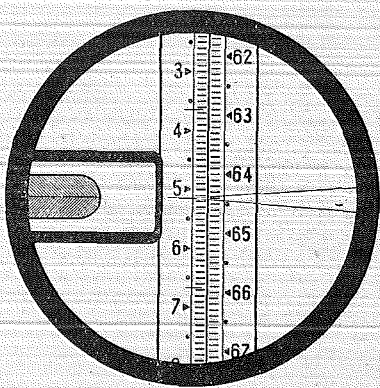
Ableben. Kontrollor Richard Ritzberger des B. V. A. Rohrbach am 18. Mai 1931.

Eigentum und Verlag des Vereines. — Verantwortlicher Redakteur: Hofrat Dr. Dr. Dr. h. c. E. Doležal, emer. o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. — Druck von Rudolf M. Rohrer in Baden.

Kern
AARAU (Schweiz)



Neuheit!



Gesichtsfeld des Fernrohres

Präzisions-Nivellier-Instrument Kern III

geeignet für Nivellierungen höchster Genauigkeit. Libelle mit Koinzidenzablesung, die im Gesichtsfeld des Fernrohres, sowie von freiem Auge sichtbar ist.

Lieferbar mit und ohne **optischen Mikrometer** (Planplatte) für die Feinablesung der Invarmire.

KERN & C^IE, A.-G., AARAU (Schweiz)

Generalvertretung:

Ing. Karl Möckli, Wien, V/2, Kriehubergasse Nr. 10

Telephon Nr. U-40-3-66.

Hochgenaue Stahlbandmaße

mit der neuen Patent-Ätzung — Deutsches Reichspatent Nr. 459-409, Auslandspatente

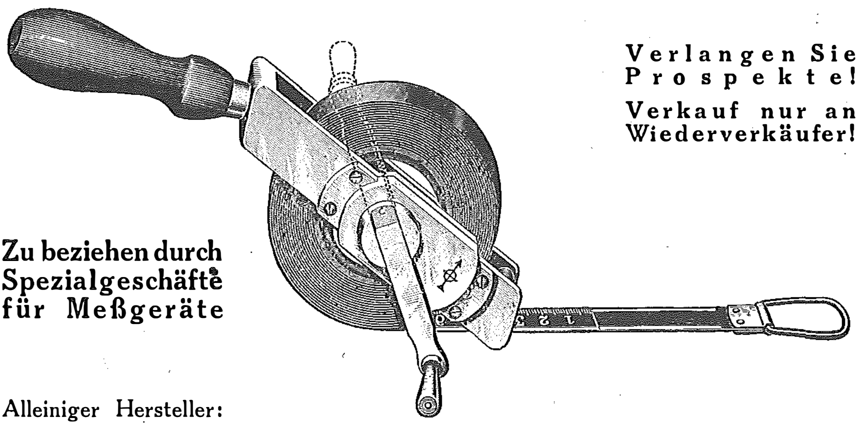
Das beste Stahlbandmaß der Gegenwart!

Teilung und Ziffern erscheinen wie geprägt und sind selbst nach langem Gebrauch und vielem Putzen dauernd gut ablesbar. Wer dieses Band im Gebrauch hatte, kauft es stets wieder.

FABRIK MARKE

Schnellroller

für Messungen an verkehrsreichen Stellen, rollt $3^1/_2$mal schneller.



Verlangen Sie Prospekte!

Verkauf nur an Wiederverkäufer!

Zu beziehen durch Spezialgeschäfte für Meßgeräte

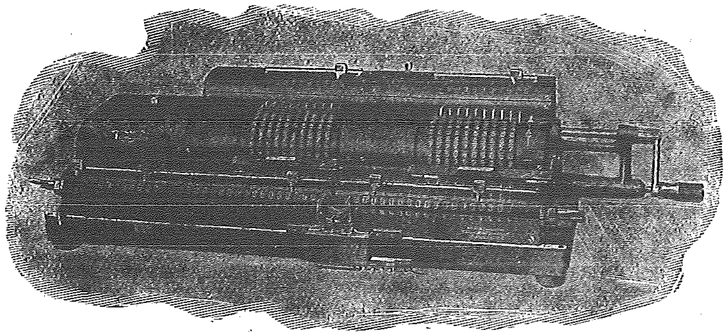
Alleiniger Hersteller:

Werdauer Meßwerkzeugfabrik G. m. b. H., Werdau i/Sa., Postfach 4.

Triumphator-Rechenmaschine

Für wissenschaftliche Zwecke.

Im Vermessungswesen langjährig bevorzugt und glänzend begutachtet.



Spezialmodell **P-Duplex**

2 × 10 Einstellhebel; 2 × 18 Stellen im Resultatwerk; 10 Stellen im Umdrehungszählwerk; Maße 43 × 13 × 12 *cm*; Gewicht ca. 19 *kg*.

Die außerordentlich vorteilhafte Konstruktion, durch welche die Verbindung zweier Maschinen hergestellt wurde, ermöglicht die gleichzeitige Ausführung einander entgegengesetzten Rechnungsarbeiten.

Besonders sind die Leistungen bei Koordinatenrechnungen unübertrefflich, da Ordinaten und Abszissen gleichzeitig und ohne Zuhilfenahme von Tafeln reziproker Zahlen berechnet werden können.

Normal-Modelle in den verschiedensten Kapazitäten stets lagernd.

Auskunft und unverbindliche Vorführung bereitwilligst durch die

Kontor-Einrichtungs-Gesellschaft

Wien, I., Eschenbachgasse 9—11. Fernsprecher B-26-0-61, B-26-0-71

JOHANN KNELL

Gegründet 1848 **Buchbinderei** **Gegründet 1848**

WIEN, VII., SIGMUNDSGASSE Nr. 12

Fernruf: B-31-9-34

Einbände

von Zeitschriften, Geschäftsbüchern, Werken, Golddruck- und Prägearbeiten sowie in das Fach einschlagende Arbeiten werden solid :-: ausgeführt und billigst berechnet :-:

Herstellung von Einbanddecken zur

„Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen“

Lieferant des Katastral-Mappen-Archivs und des Bundesamtes für Eich- u. Vermessungswesen

Optiker

Alois Oppenheimer

Wien I.

Kärntnerstraße 55 (Hotel Bristol)

Kärntnerstraße 31 (Hotel Erzherzog Karl)

Prismenfeldstecher 6mal 30 . S 140·—

Prismenfeldstecher 8mal 30 . S 140·—

Prismenfeldstecher 12mal 45 . S 270·—

Lieferant des
Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen!!

Prismenfeldstecher und Galliläische Feldstecher eigener Marke sowie sämtlicher Weltmarken zu Original-Fabrikspreisen!

Auf unsere Spezialmodelle gewähren wir an Geometer und technische Beamte einen Sonderrabatt von 10%. Postversand per Nachnahme.

ORIGINAL-ODHNER

die vorzügliche schwedische Rechenmaschine

spart **ARBEIT**

ZEIT und

GELD

Leicht transportabel! Einfache Handhabung! Kleine, handliche Form!
Verlangen Sie Prospekte und kostenlose, unverbindliche Vorführung:

Original-ODHNER-Rechenmaschinen-Vertriebs-Ges. m. b. H.

WIEN, VI., THEOBALDGASSE 19, TELEPHON B-27-0-45.

AUTODIV und ELEKTROMENS die neuen kleinen HERZSTARK-Rechenmaschinen

mit **vollautomatischer** Division,
mit **vollautomatischer** Multiplikation,
mit Hand- und elektrischem Antrieb,
mit einfachem und **Doppelzählwerk**
mit **sichtbarer** Schieber- oder
mit **sichtbarer** Tasteneinteilung,

Das Produkt österreichischer u. deutscher Ingenieur- u. Werkmannsarbeit

Rechenmaschinenwerk ‚Austria'

HERZSTARK & Co., WIEN, XIII.

Linke Wienzeile 274.

Tel. R-30-1-43

Lastentransporte aller Art

Personen-(ehem. Hof-)Wagen für feierliche Anlässe

verläßlich und kulant bei

„Wigro" Wiener Großfuhrwerksbetrieb

Ges. m. b. H.

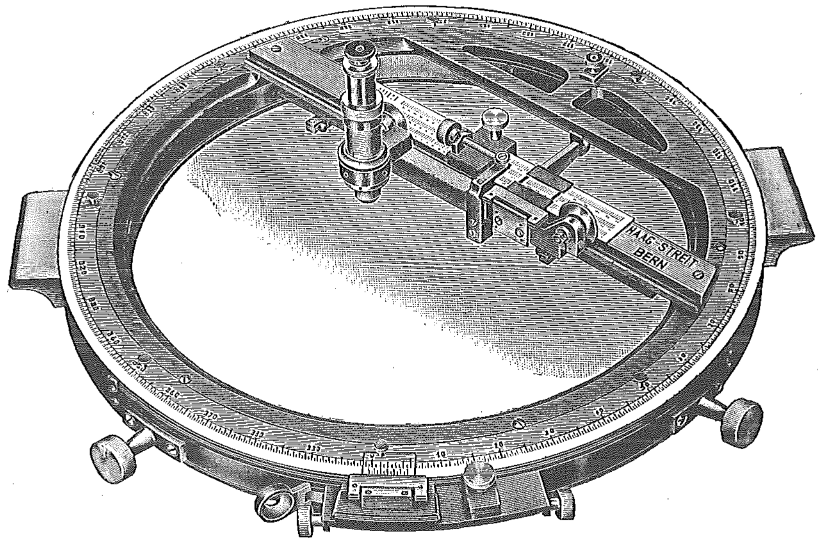
Wien, XIII., Schloß Schönbrunn. Telephon R-36-2-55.

Frächter des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen.

HAAG-STREIT, BERN

WERKSTÄTTEN FÜR PRÄZISIONSMECHANIK

Großer Preis Barcelona 1929



DER NEUE POLAR (D.R.P.)

Das führende Auftraggerät bei Anwendung der

Polarkoordinaten-Methode

mittelst optischer Distanzmessung

WESENTLICHE VORZÜGE:

Punktiermikroskop nach Boßhardt

Einfachstes Auftragen und Kontrollieren von Punkten

Feststehender Kreisnonius

Stets bequeme Ablesung

Gut zugängliche Zeichenebene

Klare Teilungen auf Zelluloid, Glasnonien

Kräftiger Bau **Geringe Wartung**

Spagate, Seile, Gurten, Kokosmatten, Kokosläufer

Seilerwaren-Industrie

Richard Beck, Wien

IV., Rechte Wienzeile 15 (Ecke Schleifmühlgasse)

Fernsprecher
B-26-5-83

Kontor und Magazine
Wien, IV., Rechte Wienzeile 19

REISSZEUGE

Österreichische Präzisionsarbeit seit 1840

Reißzeugfabrik

Johann Gronemann

Wien, V., Schönbrunnerstraße 77

Telephon A-30-2-11

Josef Bohenski

Kunstglaserei, Spiegelschleiferei, Verglasungen aller Art

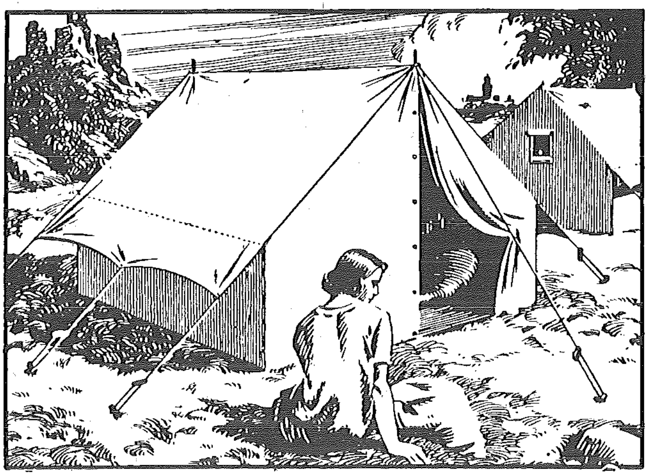
Spezialist für Glasplatten zum Zeichnen.
Glasplatten für Zeichentische usw. usw.

Wien, VII., Bandgasse Nr. 32

Reserviert!


SCHOELLERS-HAMMER
Zeichenpapiere
seit
50
Jahren die führende Marke.
SCHUTZMARKE
SCHOELLERSHAMMER
Lieferung durch die einschlägigen Handlungen.
HEINR·AUG·SCHOELLER·SÖHNE·
DÜREN·RHLD·

Reserviert



Wasserdichte Unterkunftszelte
Wasserdichte Schlafzelte
Wasserdichte Utensilienzelte
Wasserdichte Schlafsäcke
Wasserdichte Rucksäcke
Wasserdichte Wettermäntel
Wasserdichte Berufskleider
Wassersäcke
Wassereimer
Instrumentenkappen
Lattensäcke
Ingenieur-Vermessungsschirme

und alle anderen ins Fach einschlagende Artikel offerieren

M. J. Elsinger & Söhne

Fabriken wasserdichter Stoffe

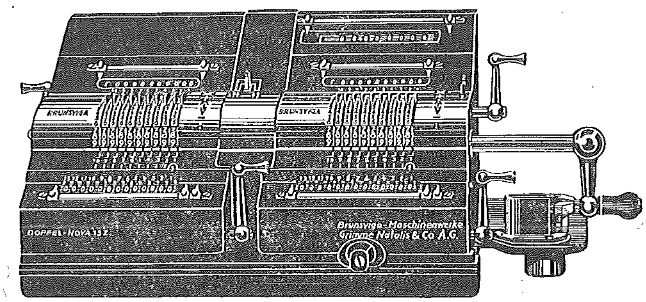
Zentrale: Wien, I., Volksgartenstraße Nr. 1.

Brunsviga-Rechenmaschine

Die bevorzugte

MASCHINE DES WISSENSCHAFTLERS

Universalmodelle und **Spezialmodelle**
für jeden gewünschten Zweck u. a. **Doppelmaschinen**
für trigonometrische Berechnungen



Brunsviga-Maschinen-Gesellschaft

m. b. H.

WIEN, I., PARKRING 8

Telephon Nr. R-23-2-41

Vorführung jederzeit kostenlos

Neuhöfer & Sohn A. G.

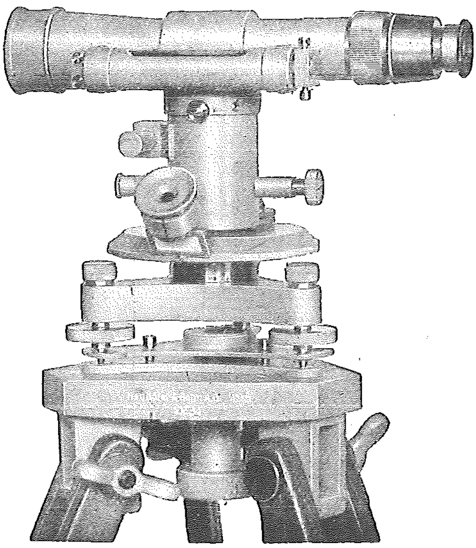
für geodätische Instrumente und Feinmechanik

Wien, V., Hartmanngasse Nr. 5

Telephon A-35-4-40. Telegramme: Neuhöferwerk Wien.

Theodolite

Tachymeter



Nivellier-Instrumente

Bussolen-Instrumente

Auftragsapparate

Pantographen

Reparaturen jeder Art Illustrierte Prospekte

Bei Bestellungen und Korrespondenzen an die hier inserierenden Firmen bitten wir, sich immer auch auf unsere Zeitschrift berufen zu wollen.

Eigentum und Verlag des Vereines. — Verantwortlicher Redakteur: Hofrat Dr. Dr. Dr. h. c. E. Doležal, emer. o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien.