Österreichische Zeitschrift
für
Vermessungswesen

Herausgegeben
vom
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREIN

Schriftleitung:

Hofrat Dr. Ing. h. c. E. Doležal und Oberstadtbaurat Ing. S. Wellisch
o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. — Abt.-Vorstand des Wiener Magistrates.

Nr. 1/2. Wien, im Juni 1924. XXII. Jahrgang.

INHALT:

Zur Beachtung!

Die Zeitschrift erscheint derzeit jährlich in 4 Nummern.

Mitgliedsbeitrag für das 1. Halbjahr 1924 . . . . **25.000 Kronen.**
Abonnementpreise: Für das Inland, Deutschland und für die Sukzessionsstaaten (1. Halbjahr 1924) . . . . **25.000 Kronen.**
Für das übrige Ausland ganzjährig . . . . **6 Schweizer Franken.**

Alle die Kassagebarung betreffenden Zuschriften, Berichte und Mitteilungen über Vereins-, Personal- und Standesangelegenheiten, sowie **Zeitungsreklamationen** (portofrei) und Adreßänderungen wollen nur an den Zahlmeister des Vereines Hofrat **Ing. Joh. Schrimpf, Wien, VIII., Friedrich Schmidt-Platz Nr. 3** (Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen) gerichtet werden.

Wien 1924.

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österreichischer Geometerverein.

Druck von Rudolf M. Rohrer, Baden bei Wien.

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN GEOMETERVEREINES.

Redaktion: Hofrat Prof. Dr. Ing. h. c. E. Doležal und Oberstadtbaurat Ing. S. Wellisch.

Nr. 1/2. **Wien, im Juni 1924.** **XXII. Jahrgang.**

Über die günstigste Gewichtsverteilung bei Punkteinschaltungen.

Von Privatdozent Dr. Hans Ecker, Graz.

Sowie der Ausführung eines Bauwerkes ein fachtechnisch durchgebildeter Entwurf zur Grundlage dient, so muß ebenso auch die Anlage eines Dreiecksnetzes für eine größere Vermessung vor Beginn der Feldarbeit sorgfältig hinsichtlich ihrer Zweckmäßigkeit studiert worden sein. Hiezu tritt in der heutigen Zeit noch die Bedingung, mit einem durch die Kosten beschränkten Arbeitsaufwand die möglichste Schärfe in den Ergebnissen zu erreichen, welch' letztere Forderung für die Aufstellung des Beobachtungsplanes maßgebend sein wird.

Es liegt in der Natur der Sache, daß der gesamte Arbeitsaufwand für irgend eine geodätische Aufgabe an bestimmte Grenzen gebunden ist, welche mit dem Aufwande an Zeit und Geld zusammenhängen. Heute mehr denn je gilt es, selbst den genauesten Arbeiten der Feldmessung das wirtschaftliche Prinzip zugrunde zu legen, also die Messungen rationell auszuführen. Zahlreich sind die Abhandlungen, welche die Ökonomie der Beobachtungen zum Gegenstande haben; sie weisen auf das Interesse hin, welches man der Frage, wie mit dem geringsten Arbeitsaufwand ein möglichst großer Effekt erzielt werden kann, allgemein entgegenbringt. Hervorzuheben wären insbesonders die Untersuchungen von Helmert, Jordan, Eggert, Klingatsch, Hellebrand, Kerl und Werkmeister*).

*) Helmert: „Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie". Zeitschr. f. Math. u. Phys., 13. Bd., 1868. — Jordan: „Über die Genauigkeit geodätischer Operationen". Zeitschr. f. Math. u. Phys., 16. Bd., 1871. — Eggert: „Über die günstigsten Punktlagen beim Einschneiden". Zeitschr. f. Math. u. Phys., 40. Bd., 1903. — Klingatsch: „Die Bestimmung des günstigsten Punktes für das Rückwärtseinschneiden". Zeitschr. f. Math. u. Phys., 48. Bd., 1902. „Die günstigste Punktlage der durch geometrische Örter bestimmten Punkte eines Dreieckes bei der Triangulierung". Sitzungsb. d. k. Ak. d. W. i. Wien math. naturw. Kl., Bd. CXIX, Abt. 2 *a*, Dezember 1910. — Hellebrand: „Über die günstigste Gewichtsverteilung bei trigonometrischen Punktbestimmungen". Bd. LXXVIII d. Denkschr. d. math. naturw. Kl. d. k. Ak. d. W. i. Wien, 1912. — Kerl:

Diese genannten Arbeiten befassen sich im wesentlichen mit der Genauigkeit der Punktlage oder geben Richtlinien bezüglich der Wahl eines Neupunktes vom Standpunkte eines gegebenen Genauigkeitskalküles; sie sind demnach in Hinblick auf die Forderung möglichst rationeller Vermessungen nach dem allgemeinen Grundsatze über die Ökonomie der Arbeiten von Bedeutung. Sie schulen den praktischen Blick für den stabilen Aufbau von Triangulierungsnetzen, geben Anhaltspunkte, um die besten Bestimmungsstrahlen zu finden und enthalten treffliche Winke, um die Gesamtanlage der Messungen entsprechend anzuordnen. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, daß die Terrainverhältnisse eine gewisse Freiheit in der Wahl von Neupunkten gestatten. Nicht immer aber liegt ein derartiges Terrain vor, welches allen Anforderungen und Bedingungen für die günstigste Triangulation Rechnung trägt; überdies ist zu beachten, daß für die Wahl von Neupunkten auch diejenigen Arbeiten von ausschlaggebender Bedeutung sind, denen die Neupunkte als Grundlage zu dienen haben.

Die vorliegende Arbeit behandelt nun die günstigste Verteilung der Messungsarbeiten bei den trigonometrischen Punktbestimmungen aus überschüssigen Elementen von dem Standpunkte aus, daß sowohl die Lage des Neupunktes als auch diejenige der Punkte des Netzes, von welchen aus die Punkteinschaltung erfolgt, bereits im vorhinein gegeben sind. Sie bezweckt die Schaffung eines Beobachtungsplanes bei vorgegebenem Arbeitsaufwand mit Rücksicht auf eine möglichst rationelle Ausführung der Messungen. Der Ökonomie der Beobachtungen entsprechend erstreckt sich die Verteilung der Messungen nur auf eine bestimmte Anzahl von Richtungen, und zwar beim Vorwärtseinschneiden auf drei, hingegen beim Rückwärtseinschneiden und beim kombinierten Einschneiden auf vier Richtungen. Wir werden dabei sehen, wie sich durch vermehrte Beobachtung dieser Richtungen entsprechend den ermittelten Gewichtszahlen und durch Ausschalten jener Richtungen aus den Beobachtungen, welche den Gewichten Null zugehören, die Genauigkeit im Ergebnis wesentlich günstiger gestaltet. Bei der Ermittlung der Gewichtsverteilung bei vorgegebener konstanter Gewichtssumme wird ferner auch jenen Bedingungen Rechnung getragen, unter welchen die Fehlerellipse in den Fehlerkreis übergeht. Hiebei ist unter der vorteilhaftesten oder günstigsten Gewichtsverteilung diejenige zu verstehen, bei welcher der aus den entsprechenden Messungen hervorgehende mittlere Punktfehler unter Einhaltung der oben angegebenen Bedingungen möglichst klein wird. Ein strenges Minimum im mittleren Punktfehler kann, wie bereits Helmert*) angegeben, bei Berücksichtigung dieser genannten

„Voranschläge der Genauigkeit beim trigonometrischen Punkteinschalten". Zeitschr. f. Verm., 1908. „Über den mittleren Punktfehler beim einfachen Vorwärtseinschnitt." Zeitschr. f. Verm., 1920. — Werkmeister: „Über die Genauigkeit trigonometrischer Punktbestimmungen". Zeitschr. f. Verm., 1920. „Untersuchung der Genauigkeit von trigonometrischen Punktbestimmungen durch Einschneiden vor Ausführung der Messungen". Zeitschr. f. Verm., 1920.

*) Helmert: „Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie". Zeitschr. f. Math. u. Phys., 13. Bd., 1868. — „Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate." 2. Aufl., 1907.

Bedingungen nicht erreicht werden. Weiters sei gleich eingangs erwähnt daß die Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung jederzeit, sobald nur für den gesuchten Punkt Näherungsdaten vorliegen, ohneweiters durchgeführt werden kann. Im Schlußteil unserer Abhandlung zeigen wir an zwei Beispielen den Rechnungsvorgang zur Bestimmung der Gewichtsverteilung für die einschlägigen Punkteinschaltungsmethoden.

Im Nachstehenden sollen nun das Vorwärtseinschneiden, das Rückwärtseinschneiden und das kombinierte Einschneiden aus überschüssigen Elementen hinsichtlich der günstigsten Gewichtsverteilung behandelt werden.

Vorwärtseinschneiden.

Ein Neupunkt P sei durch Messung von äußeren Richtungen aus n gegebenen Festpunkten $P_1 \ldots . P_n$ bestimmt; es liegen somit $(n-2)$ überschüssige Messungen vor. Die Beobachtungsergebnisse sind ungleich genau und durch die Angabe ihrer Gewichte g gekennzeichnet.

Sind die Näherungskoordinaten x_0 und y_0 für den gesuchten Punkt P bekannt, so ergeben sich für die einzelnen gemessenen Richtungen die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + l_1, \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + l_2, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_n &= a_n x + b_n y + l_n, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

welchen Gleichungen infolge der ungleichen Genauigkeit die Richtungsgewichte $g_1, g_2, \ldots . g_n$ zukommen. Darin bedeuten a und b die Richtungskoeffizienten, l die aus Beobachtungen folgenden Größen, x und y die gesuchten Korrektionen der Näherungskoordinaten für den aus n Richtungen eingeschnittenen Neupunkt P und $v_1, v_2, \ldots . v_n$ die Verbesserungen dieser n beobachteten Richtungen. a und b sind bestimmt durch:

$$\left.\begin{aligned} a &= -\rho \frac{\sin \sigma'}{s}, \\ b &= -\rho \frac{\cos \sigma'}{s}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Aus den Fehlergleichungen geht das System der Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} [gaa]\, x + [gab]\, y + [gal] &= 0, \\ [gab]\, x + [gbb]\, y + [gbl] &= 0 \end{aligned}$$

hervor, woraus die gesuchten Korrektionen x und y folgen mit:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{[gal\,1]}{[gaa\,1]}; \\ y &= -\frac{[gbl\,1]}{[gbb\,1]}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Die Nenner dieser Gleichungen sind die entsprechenden Gewichte der Unbekannten:

$$\left.\begin{aligned} g_x &= [gaa\,1], \\ g_y &= [gbb\,1]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Die in den Gleichungen 3) und 4) auftretenden Symbole entwickelt, ergeben:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{[gab][gbl]-[gal][gbb]}{D}, \\ y &= \frac{[gab][gal]-[gbl][gaa]}{D} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3a)$$

und

$$\left.\begin{aligned} g_x &= \frac{D}{[gbb]}, \\ g_y &= \frac{D}{[gaa]}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4a)$$

worin

$$D = [gaa][gbb] - [gab]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

gesetzt wurde.

In weiterer Folge erhält man den mittleren Fehler m einer beobachteten Richtung vom Gewichte eins, also den mittleren Gewichtseinheitsfehler aus:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[gvv]}{n-2}},$$

die mittleren Koordinatenfehler aus:

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= \frac{m^2}{g_x} = \frac{[gbb]}{D} m^2, \\ m_y^2 &= \frac{m^2}{g_y} = \frac{[gaa]}{D} m^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

und schließlich den mittleren Punktfehler M aus:

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = \frac{[gaa]+[gbb]}{D} m^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Für die Bestimmung der Elemente der zugehörigen mittleren Fehlerellipse gelten bekanntlich die Gleichungen*):

$$\left.\begin{aligned} tg\, 2\varphi &= \frac{-2[gab]}{-([gaa]-[gbb])}, \\ m^2_{\max} &= \frac{[gaa]+[gbb]+W}{2D} m^2 = A^2 \text{ mit dem Richtungswinkel } \varphi, \\ m^2_{\min} &= \frac{[gaa[+[gbb]-W}{2D} m^2 = B^2 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \varphi \pm 90^0, \end{aligned}\right\} 8)$$

worin unter A und B die Halbachsen der mittleren Fehlerellipse zu verstehen sind und W durch den Ausdruck:

$$W = \sqrt{([gaa]-[gbb])^2 + 4[gab]^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

gegeben ist.

Vom Standpunkte einer guten Punktbestimmung ergibt sich nun die Forderung, daß der mittlere Punktfehler nach allen Richtungen gleich groß sein soll, mit anderen Worten: die mittlere Fehlerellipse soll in einen Fehlerkreis übergehen. Damit dies eintritt, muß:

$$m_{\max} = m_{\min}$$

*) Eggert: „Handbuch der Vermessungskunde". 7. erw. Aufl., 1. Bd., 1920.

sein, welcher Bedingung mit Rücksicht auf 8) für

$$W = \text{Null}$$

entsprochen wird. Der Ausdruck für W nach 9) verschwindet für:

$$\left.\begin{array}{l}[gab] = 0 \text{ und} \\ [gaa] = [gbb].\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

In diesem Falle tritt an die Stelle der Fehlerellipse der Fehlerkreis mit dem Halbmesser R_0 und zwar:

$$R_0 = A = B = \pm \frac{m}{\sqrt{[gaa]}} = \pm \frac{m}{\sqrt{[gbb]}}. \quad \ldots\ldots \quad 11)$$

Der mittlere Punktfehler M berechnet sich dann aus:

$$M^2 = 2\,R_0{}^2 = 2\,\frac{m^2}{[gaa]} = 2\,\frac{m^2}{[gbb]}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Aus der ersten Bedingung — $[gab] = 0$ — ist auch der Fall der Unmöglichkeit für das Auftreten des Fehlerkreises zu entnehmen. Gehören sämtliche Richtungswinkel der Bestimmungsgeraden für den Neupunkt demselben Quadranten an, so haben die entsprechenden Richtungskoeffizienten a und b das gleiche Vorzeichen und der genannten Bedingung kann demnach nicht entsprochen werden. Soll daher die Fehlerellipse Kreisform erhalten, so müssen sich die äußersten Bestimmungsgeraden unter einem Winkel treffen, welcher größer als 90^0 ist.

Wie bekannt, ist eine Punktbestimmung umso günstiger, je kleiner sich der mittlere Punktfehler M ergibt; wir werden demnach jene Punktbestimmung als die beste bezeichnen, welche den kleinsten mittleren Punktfehler aufweist. Soll nun aber der mittlere Punktfehler zu einem Minimum werden, dann muß unter Berücksichtigung des Fehlerkreises der Nenner in 12

$$[gaa], \text{ bzw. } [gbb]$$

zu einem Maximum werden. Fügt man den Nebenbedingungen wegen des Fehlerkreises auch noch diejenige bezüglich der konstanten Gewichtssumme hinzu, nämlich

$$g_1 + g_2 + \ldots. + g_n = [g] = K = \text{konstant}, \quad \ldots\ldots \quad 13)$$

so kann bei Einhaltung dieser Nebenbedingungen das Minimum des mittleren Punktfehlers nicht erreicht werden. Wir werden uns daher begnügen müssen, dem erstrebten Minimum möglichst nahe zu kommen, welcher Forderung bei Erfüllung der gestellten Nebenbedingungen durch den Fehlerkreis mit möglichst kleinem Radius Ausdruck verliehen wird.

Die Gewichtsverteilung soll nun derart stattfinden, daß die Funktion

$$F = [gaa], \text{ bzw. } F = [gbb] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

bei gleichzeitiger Erfüllung der Nebenbedingungen bezüglich des Fehlerkreises und des gegebenen Arbeitsaufwandes einen möglichst großen Wert erhält.

Die in 10), 13) und 14) auftretenden Symbole entwickelt, ergeben die Funktion F mit:

$$F = g_1\,a_1{}^2 + g_2\,a_2{}^2 + \ldots.. + g_n\,a_n{}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15)$$

und die Nebenbedingungen mit:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\quad g_1 a_1 b_1 + g_2 a_2 b_2 + \ldots\ldots + g_n a_n b_n = 0, \\ 2.\quad g_1(a_1^2 - b_1^2) + g_2(a_2^2 - b_2^2) + \ldots + g_n(a_n^2 - b_n^2) = 0, \\ 3.\quad g_1 + g_2 + \ldots\ldots + g_n = K. \end{array}\right\} \quad . \quad 16)$$

In diesen Gleichungen treten die Gewichte $g_1, g_2, \ldots . g_n$ als Unbekannte auf. Die Größen a und b sind die Richtungskoeffizienten nach 2); die konstante Summe K ist durch den vorgegebenen Arbeitsaufwand als bekannt anzusehen, welcher im allgemeinen durch die Summe der beabsichtigten Einstellungen zahlenmäßig ausgedrückt werden kann.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, unter Benützung der Gleichungen 16) in Hinblick auf einen möglichst großen Wert in 15) die Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung vorzunehmen.

Die Berechnung der Gewichtsverteilung wird sich mit Rücksicht auf eine möglichst rationelle Ausführung der Beobachtungen nur auf drei der in Frage stehenden Gewichtszahlen erstrecken; es wird demnach nur die Mindestzahl der Richtungen, welche eine Ausgleichung erfordern, mit Gewichtszahlen bedacht, wogegen die übrigen $(n-3)$ Richtungsgewichte Null zu setzen sind. Weiters werden wir beachten müssen, daß nur positive Werte für die errechneten Gewichte als brauchbare Lösungen anzusehen sind.

Unter Benützung der drei Gleichungen 16) drücken wir drei Gewichte — es sind dies g_1, g_2, g_3 — durch die übrigen $(n-3)$ Gewichte aus. Man bekommt dadurch drei Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} g_1 = \alpha_4 g_4 + \alpha_5 g_5 + \ldots . + \alpha_n g_n + r_1, \\ g_2 = \beta_4 g_4 + \beta_5 g_5 + \ldots . + \beta_n g_n + r_2, \\ g_3 = \gamma_4 g_4 + \gamma_5 g_5 + \ldots . + \gamma_n g_n + r_3. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 17)$$

In Anbetracht einer zweckentsprechenden Durchführung der Rechnungsarbeiten sind hiebei als g_1, g_2, g_3 nicht die Gewichte beliebiger drei Richtungen zu wählen, sondern die Gewichte solcher drei Richtungen, welche sich den Beobachtungsverhältnissen und dem praktischen Gefühle entsprechend als voraussichtlich günstige Richtungen für die Bestimmung des Neupunktes ergeben dürften.

Die in 17) auftretenden Größen α, β, γ und r sind bekannt und werden wie folgt gebildet:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_m = \dfrac{(a_1^2-b_1^2)[(a_2b_2-a_1b_1)+(a_1b_1-a_mb_m)]-(a_2^2-b_2^2)(a_1b_1-a_mb_m)-(a_m^2-b_m^2)(a_2b_2-a_1b_1)}{(a_3^2-b_3^2)(a_2b_2-a_1b_1)+(a_2^2-b_2^2)(a_1b_1-a_3b_3)-(a_1^2-b_1^2)[(a_2b_2-a_1b_1)+(a_1b_1-a_3b_3)]}, \\ \beta_m = \dfrac{a_1 b_1 - a_3 b_3}{a_2 b_2 - a_1 b_1}\gamma_m + \dfrac{a_1 b_1 - a_m b_m}{a_2 b_2 - a_1 b_1}, \\ \alpha_m = -(\beta_m + \gamma_m + 1) \text{ für } m = 4, 5, 6, \ldots . n; \text{ ferner ist} \\ r_3 = \dfrac{a_1 b_1[(a_2^2 - b_2^2)-(a_1^2 - b_1^2)]-(a_1^2 - b_1^2)(a_2 b_2 - a_1 b_1)}{(a_3^2-b_3^2)(a_2b_2-a_1b_1)+(a_2^2-b_2^2)(a_1b_1-a_3b_3)-(a_1^2-b_1^2)[(a_2b_2-a_1b_1)+(a_1b_1-a_3b_3)]}K, \\ r_2 = \dfrac{a_1 b_1 - a_3 b_3}{a_2 b_2 - a_1 b_1} r_3 - \dfrac{a_1 b_1}{a_2 b_2 - a_1 b_1} K, \\ r_1 = K - (r_2 + r_3). \end{array}\right\} \; 18)$$

Unsere Funktion F erscheint nun mit Rücksicht auf 17) in der Form:

$$F = g_4(a_1^2\alpha_4 + a_2^2\beta_4 + a_3^2\gamma_4 + a_4^2) + g_5(a_1^2\alpha_5 + a_2^2\beta_5 + a_3^2\gamma_5 + a_5^2) + \ldots.$$
$$\ldots.. + g_n(a_1^2\alpha_n + a_2^2\beta_n + a_3^2\gamma_n + a_n^2) + (a_1^2 r_1 + a_2^2 r_2 + a_3^2 r_3)$$

oder kürzer gefaßt:

$$F = A_4 g_4 + A_5 g_5 + \ldots.. + A_n g_n + A_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 19)$$

In den meisten Fällen der Anwendung wird sich nun auf Grund der in 19) auftretenden Koeffizienten A in Verbindung mit den Gleichungen 17) bereits die eine oder die andere Lösung für die Gewichtsverteilung finden. Sollte dies nicht zutreffen, so lassen sich doch immer aus 19) Schlüsse ziehen, welche Richtungsgewichte zwecks Erreichung eines möglichst großen Wertes in F für die gesuchte Gewichtsverteilung in Frage kommen können.

Zur Erläuterung des soeben Gesagten sollen nun einige besondere Fälle bezüglich der Koeffizienten A in 19) in Hinblick auf die Ermittlung der Gewichtsverteilung erörtert werden.

1. Die Koeffizienten A_4, A_5, ... A_n und das Absolutglied A_0 sind positiv.

Soll g_1, g_2, g_3 eine der gesuchten Gewichtsverteilungen sein, so haben wir zur Ermittlung der entsprechenden Gewichtszahlen die übrigen $(n-3)$ Richtungsgewichte Null zu setzen. Sind nun die Absolutglieder r_1, r_2, r_3 in 17) positiv, so ist g_1, g_2, g_3 bereits eine Gewichtsverteilung; r_1, r_2, r_3 ergeben die betreffenden Gewichtszahlen und der damit erreichte Wert in F ist durch das Absolutglied A_0 in 19) bestimmt. — Die Funktion F wird aber einen umso größeren Wert erreichen und damit die Gewichtsverteilung umso günstiger werden, wenn sich die Gewichtsverteilung auf solche Richtungen erstreckt, deren Gewichte den größten Koeffizienten A in 19) angehören. Man wird demzufolge weitere Gewichtsverteilungen ins Auge fassen, solche, die sich aus einem bzw. zwei der durch 17) gegebenen Gewichte und aus zwei bzw. einem, der in 19) enthaltenen Gewichte zusammensetzen. Die übrigen Gewichte werden wie früher Null gesetzt; die Berechnung der Gewichtszahlen kann mit Hilfe der Gleichungen 17) vorgenommen werden.

2. Die Koeffizienten A_4, A_5, ... A_n sind teils positiv, teils negativ; hingegen ist das Absolutglied A_0 positiv.

Im allgemeinen kann in diesem Falle der unter „1" angegebene Vorgang zur Ermittlung der Gewichtsverteilung eingehalten werden; dabei werden jedoch in erster Linie jene Gewichte in Rechnung zu stellen sein, welche den positiven Koeffizienten in 19) angehören. Doch gilt dies keineswegs als Regel, denn häufig werden sich Gewichtsverteilungen ergeben, die sich auch auf jene Gewichte erstrecken, deren Koeffizienten A in 19) negativ sind.

3. Die Koeffizienten A_4, A_5, ... A_n sind positiv, das Absolutglied A_0 aber negativ.

Liegt dieser Fall vor, so ist, da A_0 negativ ist, zu erkennen, daß g_1, g_2, g_3 keine der gesuchten Gewichtsverteilungen sein kann. Man wird demzufolge die Gewichtsverteilung auf jene Gewichte erstrecken, die nur in 19) vorkommen oder eine der bereits früher angegebenen Kombinationen mit den durch 17), ausgedrückten Gewichten g_1, g_2, g_3, als Gewichtsverteilung vorsehen.

Sind alle Kombinationen der in 19) enthaltenen Gewichte mit den durch 17) bestimmten Gewichten versucht und die entsprechenden Gewichtsverteilungen ermittelt worden, so werden sich im allgemeinen noch weitere Gewichtsverteilungen ergeben, welche sich auf die in 19) vorkommenden Gewichte erstrecken.

Für den diesbezüglichen Rechnungsvorgang ist folgender Weg einzuschlagen. Man setzt die Gleichungen 17) gleich Null und drückt durch lineare Verbindung dieser Gleichungen weitere drei Gewichte — g_4, g_5, g_6 — durch die restlichen $(n-6)$ Gewichte aus. Es ergibt sich dadurch ein neues System von drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} g_4 &= \alpha_7' g_7 + \alpha_8' g_8 + \ldots\ldots + \alpha_n' g_n + r_1', \\ g_5 &= \beta_7' g_7 + \beta_8' g_8 + \ldots\ldots + \beta_n' g_n + r_2', \\ g_6 &= \gamma_7' g_7 + \gamma_8' g_8 + \ldots\ldots + \gamma_n' g_n + r_3', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 20)$$

womit 19) übergeht in:

$$F = A_7' g_7 + A_8' g_8 + \ldots\ldots + A_n' g_n + A_0' \quad \ldots\ldots \quad 21)$$

Zwecks Ermittlung von Gewichtsverteilungen haben nun dieselben Überlegungen bezüglich der Koeffizienten A' in 21) und der Gleichungen 20) einzusetzen, wie sie früher betreffs der Koeffizienten A in 19) und der Gleichungen 17) stattgefunden haben.

In gleicher Weise ist die Bildung neuer Systeme von drei Gleichungen fortzusetzen. Als Abschluß ergeben sich dann gleichfalls drei Gleichungen, welche auf der rechten Seite nur mehr drei bzw. zwei oder eines der gesuchten Gewichte aufweisen. Mit Hilfe dieser Gleichungen und der zugehörigen Gleichung für F können in der angegebenen Art die Gewichtsverteilungen bezüglich der noch auftretenden Gewichte ermittelt werden.

Wie dem soeben Gesagten zu entnehmen ist, werden sich im allgemeinen mehrere Lösungen für die Gewichtsverteilung ergeben. Als die günstigste Gewichtsverteilung bezeichnen wir dann jenes Wertsystem der Gewichte g, welches dem größten Wert in F entspricht, womit eben dem Minimum des mittleren Punktfehlers M möglichst nahe gekommen wird.

In den meisten Fällen der Anwendung geben die Art der Lage der Bestimmungsstrahlen für den Neupunkt untereinander sowie die Beobachtungsverhältnisse genügend Anhaltspunkte, welche Richtungen sich in Hinblick auf bekannte Genauigkeitsüberlegungen als günstig erweisen. Die Gewichte dieser Richtungen werden bei der zu suchenden Gewichtsverteilung in erster Linie zu berücksichtigen sein.

Als Kontrolle für die richtige Ermittlung der Gewichtszahlen hat zu gelten, daß die errechneten Werte addiert, den konstanten Arbeitsaufwand K ergeben sollen, und daß weiters die Nebenbedingungen bezüglich der Kreisform:

$$[gab] = 0 \text{ und}$$
$$[gaa] = [gbb]$$

erfüllt sein müssen.

Rückwärtseinschneiden.

In dem Punkte P sind zur Bestimmung seiner Koordinaten Richtungsmessungen nach n gegebenen Festpunkten $P_1, P_2, \ldots. P_n$ mit ungleicher Genauigkeit ausgeführt worden; es sind somit $(n-3)$ überschüssige Beobachtungen vorhanden.

Sind für den gesuchten Punkt wieder Näherungskoordinaten x_0, y_0 gerechnet, so lauten die Fehlergleichungen für die einzelnen gemessenen Richtungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + z + l_1, \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + z + l_2, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_n &= a_n x + b_n y + z + l_n, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

in welchen außer den gesuchten Korrektionen x, y der Näherungskoordinaten auch noch eine dritte Unbekannte z, die Richtungkorrektion, auftritt. a und b sind wie früher die nach 2) zu berechnenden Richtungskoeffizienten; l trägt den Charakter einer beobachtenden Größe. Ferner ist die Ungleichheit der Beobachtungen durch die Angabe der einzelnen Richtungsgewichte $g_1, g_2, \ldots.$ g_n gekennzeichnet, wobei über die Gewichtseinheit verfügt werden kann.

Da die Koeffizienten von z gleich der Einheit sind, so ergeben sich die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [gaa]x + [gab]y + [ga]z + [gal] &= 0, \\ [gab]x + [gbb]y + [gb]z + [gbl] &= 0, \\ [ga]x + [gb]y + [g]z + [gl] &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 23)$$

Wird z eliminiert, so erhält man zwei Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} [gaa1]x + [gab1]y + [gal1] &= 0, \\ [gab1]x + [gbb1]y + [gbl1] &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

aus welchen die Korrektionen mit:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{[gal2]}{[gaa2]}, \\ y &= -\frac{[gbl2]}{[gbb2]} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

folgen. Die Nenner in 25) sind wie früher die Gewichte der Unbekannten x und y, also:

$$\left.\begin{aligned} g_x &= [gaa2] = [gaa1] - \frac{[gab1]^2}{[gbb1]}, \\ g_y &= [gbb2] = [gbb1] - \frac{[gab1]^2}{[gaa1]}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

Im weiteren bekommt man als mittlere Koordinatenfehler:

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= \frac{m^2}{[gaa2]} = \frac{[gbb1]}{D} m^2, \\ m_y^2 &= \frac{m^2}{[gbb2]} = \frac{[gaa1]}{D} m^2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 27)$$

worin

$$D = [gaa\,1][gbb\,1] - [gab\,1]^2$$

gesetzt ist und

$$m = \pm \sqrt{\frac{[gvv]}{n-3}}$$

den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bedeutet. Schließlich wird der mittlere Punktfehler M aus:

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = \frac{[gaa\,1] + [gbb\,1]}{D}\, m^2 \quad \ldots\ldots \quad 28)$$

erhalten.

Nun gelten *), auch wenn x und y nicht die einzigen Unbekannten der Ausgleichung, wohl aber die zwei letzten Unbekannten in der Elimination von Normalgleichungen für vermittelnde Beobachtungen vorstellen, für die Achsen der Fehlerellipse immer noch die Formeln wie sie bei nur zwei Unbekannten aus den Gleichungen 8) folgen.

Für die Bestimmung der Elemente der Fehlerellipse haben wir demnach die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} tg\,2\varphi &= \frac{-2[gab\,1]}{-([gaa\,1] - [gbb\,1])}, \\ m^2_{max} = A^2 &= \frac{[gaa\,1] + [gbb\,1] + W}{2D}\, m^2 \text{ mit dem Richtungswinkel } \varphi, \\ m^2_{min} = B^2 &= \frac{[gaa\,1] + [gbb\,1] - W}{2D}\, m^2 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \varphi \pm 90^\circ, \end{aligned}\right\} \quad 29)$$

worin W durch den Ausdruck gegeben ist:

$$W = \sqrt{([gaa\,1] - [gbb\,1])^2 + 4[gab\,1]^2}. \quad \ldots\ldots \quad 30)$$

In Befolgung unserer früher gestellten Bedingung betreffs des Fehlerkreises soll nun

$$W = \text{Null}$$

werden, welcher Forderung in Hinblick auf 30) durch:

$$\left.\begin{aligned} [gab\,1] &= 0 \text{ und} \\ [gaa\,1] &= [gbb\,1] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 31)$$

entsprochen wird. Im weiteren ergeben sich aus 26) mit Rücksicht auf 31):

$$\begin{aligned} [gaa\,2] &= [gaa\,1] \text{ und} \\ [gbb\,2] &= [gbb\,1]; \end{aligned}$$

demzufolge die Gleichungen 27) und 29) mit:

$$D = 2[gaa\,1] = 2[gbb\,1]$$

übergehen in:

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 = m_y^2 &= \frac{m^2}{[gbb\,1]} = \frac{m^2}{[gaa\,1]}, \\ \text{bzw.} \qquad m^2_{max} = m^2_{min} &= \frac{m^2}{[gbb\,1]} = \frac{m^2}{[gaa\,1]}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 32)$$

Wir erhalten damit den Radius R_0 des Fehlerkreises aus:

---

*) Jordan: „Handbuch der Vermessungskunde". 1. Bd., 3. verb. Aufl., 1888, S. 354.

$$R_0 = A = B = \pm \frac{m}{\sqrt{[gaa\,1]}} = \pm \frac{m}{\sqrt{[gbb\,1]}} \quad \ldots\ldots \quad 33)$$

und dem mittleren Punktfehler M aus:

$$M^2 = 2\frac{m^2}{[gaa\,1]} = 2\frac{m^2}{[gbb\,1]}. \quad \ldots\ldots \quad 34)$$

Soll nun der mittlere Punktfehler M möglichst klein werden, so muß nach Gleichung 28) mit Rücksicht auf 27)

$$[gaa\,2] \text{ bzw. } [gbb\,2]$$

einem Größtwert nahe kommen. Demnach ist die Funktion F, welche einen möglichst großen Wert erreichen soll, gegeben mit:

$$F = [gaa\,2] \text{ bzw. } F = [gbb\,2].$$

Werden die partiellen Differentiationen von F nach den einzelnen Gewichten g vorgenommen und die dadurch erhaltenen Gleichungen gleich Null gesetzt, so erhält man in Hinblick auf 26):

$$\frac{\partial F}{\partial g_r} = \frac{\partial [gaa\,2]}{\partial g_r} = \frac{\partial [gaa\,1]}{\partial g_r} - \frac{2[gbb\,1][gab\,1]\frac{\partial [gab\,1]}{\partial g_r} - [gab\,1]^2 \frac{\partial [gbb\,1]}{\partial g_r}}{[gbb\,1]^2} = 0$$

da nun nach der ersten Gleichung 31)

$$[gab\,1] = 0$$

sein muß, ergibt sich:

$$\frac{\partial [gaa\,2]}{\partial g_r} = \frac{\partial [gaa\,1]}{\partial g_r} = 0.$$

In gleicher Weise bekommt man:

$$\frac{\partial F}{\partial g_r} = \frac{\partial [gbb\,2]}{\partial g_r} = \frac{\partial [gbb\,1]}{\partial g_r} = 0,$$

worin wie in der vorhergehenden Ableitung $r = 1, 2 \ldots. n$ zu nehmen ist. Da weiters nach der zweiten Gleichung 31)

$$[gaa\,1] = [gbb\,1]$$

ist, so ist es gleichgültig, welcher dieser beiden Summenausdrücke für die Funktion F gewählt wird. Man hat somit wegen:

$$[gaa\,1] = [gaa] - \frac{[ga]^2}{[g]}$$

die Funktion F gegeben durch:

$$F = [gaa\,1] = [gaa] - \frac{[ga]^2}{[g]} \quad \ldots\ldots \quad 35)$$

Ist wieder K die Summe aller Messungsgewichte, also

$$[g] = g_1 + g_2 + \ldots. + g_n = K = \text{konstant}, \quad \ldots\ldots \quad 36)$$

so erhält man in der Zusammenfassung:

$$F = \frac{K[gaa] - [ga]^2}{K} \quad \ldots\ldots \quad 37)$$

und die Nebenbedingungen bei Erreichung eines möglichst großen Wertes in F mit:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & K[gab] - [ga][gb] = 0, \\ 2. & K[gaa] - [ga]^2 = K[gbb] - [gb]^2, \\ 3. & g_1 + g_2 + \ldots . + g_n = K. \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots 38)$$

Die Entwicklung der Summenausdrücke in den Gleichungen 1 und 2 von 38) gibt:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & K[gab] - [ggab] - [g_i g_K(a_i b_K + a_K b_i)] = 0, \\ 2. & K[g(a^2 - b^2)] + [gg(b^2 - a^2)] + 2[g_i g_K(b_i b_K - a_i a_K)] = 0. \end{array}\right\} . \ 39)$$

In diesen Gleichungen sind die ersten zwei Summenglieder von $1, \ldots . . n$ und das letzte Summenglied für alle Kombinationen von $i = 1, 2 \ldots . (n-1)$ und $K = (i+1), \ldots . n$ zu nehmen.

Unsere Aufgabe ist es nun, für die Mindestzahl der inneren Richtungen, welche eine Ausgleichung erfordert, also für vier Richtungen, die entsprechenden Gewichtszahlen zu bestimmen. Dabei hat sich deren Berechnung mit Rücksicht auf einen möglichst großen Wert in F zu vollziehen bei Einhaltung der durch 38) gegebenen Nebenbedingungen.

Zwecks Lösung der Aufgabe, die für sich allein unbestimmt ist, da nur drei Gleichungen 38) zur Verfügung stehen und vier darin als Unbekannte auftretende Gewichte g daraus bestimmt werden sollen, verschaffen wir uns weitere Hilfsgleichungen in der Art, daß wir die partielle Differentiation der Funktion F 35) nach den einzelnen Gewichten g vornehmen und die betreffenden Differentialquotienten gleich Null setzen. Man erhält somit:

$$\frac{\partial [gaa1]}{\partial g_r} = \frac{\partial [gaa]}{\partial g_r} - \frac{2[g][ga]\frac{\partial [ga]}{\partial g_r} - [ga]^2 \frac{\partial [g]}{\partial g_r}}{[g]^2} = a_r^2 - \frac{2[ga]}{[g]} a_r + \frac{[ga]^2}{[g]^2} = \left(a_r - \frac{[ga]}{[g]}\right)^2 = 0.$$

Da $[g] = K$ ist, ergibt sich:

$$Ka_r = [ga] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 40)$$

mit $r = 1, 2, \ldots . n$. Wir haben demnach n Hilfsgleichungen von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} Ka_1 = g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots . + g_n a_n, \\ Ka_2 = g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots . + g_n a_n, \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad \qquad . \\ Ka_n = g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots . + g_n a_n. \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots . 41)$$

Diese Gleichungen würden zur Bestimmung der n Gewichte in Hinblick auf einen ausgezeichneten Wert in F genügen, ohne daß hiebei den Bedingungen 38) Rechnung getragen wird. Werden jedoch diese berücksichtigt, so gelangt man auf ein System unlösbarer Gleichungen; demnach ist für die weitere Rechnung versuchsweise vorzugehen.

Man setzt in den Gleichungen 38) und 41) die Gewicht von $(n-4)$ Richtungen gleich Null; somit verbleiben vier Gewichte als Unbekannte, zu deren Ermittlung außer den drei Gleichungen 38) auch noch eine der Gleichungen 41) heranzuziehen ist. Hiebei ist es zweckmäßig, die Gewichte solcher vier Richtungen zu nehmen, welche in Hinblick auf bekannte Genauigkeitsüberlegungen als voraussichtlich günstige Richtungen für die Bestimmung des Neupunktes gelten.

Mit Benützung der dritten Gleichung 38) und einer der Gleichungen 41), welche Gleichungen die Gewichte in linearer Form enthalten, drückt man nun je zwei der gesuchten Gewichte durch die anderen zwei aus. Wird dieser Vorgang mit allen n Gleichungen durchgeführt, so erhält man n Paare von Gleichungen, welche in den meisten Fällen bereits Aufschluß geben, ob für die vier gesuchten Gewichte positive Werte zu erhoffen sind oder nicht. Würde man schon hier auf Gleichungen stoßen, nach welchen einzelne Gewichte negativ werden, so kann jede weitere Rechnung mit dieser Kombination von vier Richtungen unterbleiben. Es sind dann andere $(n - 4)$ Gewichte Null zu setzen und ist der soeben gegebene Vorgang zu wiederholen.

Hat man ein Gleichungspaar ermittelt, welches positive Werte für die gesuchten Gewichte erwarten läßt, so substituiert man die dadurch ausgedrückten Gewichte in den ersten zwei Gleichungen 38); dadurch werden zwei quadratische Gleichungen erhalten, in denen nur mehr zwei der gesuchten Gewichte als Unbekannte vorkommen. Somit sind diese beiden Gewichte bestimmt, wodurch sich aber auch die beiden anderen Gewichte ergeben.

Von den verschiedenen Lösungen für die Gewichtsverteilung, deren es im allgemeinen auch hier mehrere geben wird, ist wie früher jene beizubehalten, welche dem größten Werte in 37) entspricht.

Als Kontrolle für den Rechnungsvorgang hat zu gelten, daß die ermittelten Gewichte die Nebenbedingungen 38) befriedigen müssen.

Kombiniertes Einschneiden.

Zur Bestimmung der rechtwinkeligen Koordinaten eines Neupunktes P aus n durch ihre Koordinaten gegebenen Punkten $P_1, P_2 \ldots P_n$ liegen i innere und s äußere Richtungen vor; demnach sind $(i + s - 4)$ überschüssige Messungen vorhanden wobei

$$i + s \overline{\gtrless} 2n$$

ist. Der ungleichen Genauigkeit der einzelnen Richtungen wird durch die Angabe der entsprechenden Gewichte Rechnung getragen und bedeuten $g_1, g_2 \ldots . g_i$ die Gewichte der inneren und $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots . \mathfrak{g}_s$ jene der äußeren Richtungen.

Die Fehlergleichungen für die s äußeren Richtungen sind:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + l_1, \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + l_2, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_s &= a_s x + b_s y + l_s, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 42)$$

jene für die i inneren Richtungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= a_1 x + b_1 y + z + l_1', \\ v_2' &= a_2 x + b_2 y + z + l_2', \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_i' &= a_i x + b_i y + z + l_i'. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 43)$$

Die in den beiden Systemen von Fehlergleichungen auftretenden Koeffizienten a und b sind einander gleich, hingegen sind die Absolutglieder l von den l' verschieden.

Aus 42) und 43) folgen die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [Gaa]x + [Gab]y + [ga]z + [Gal] &= 0, \\ [Gab]x + [Gbb]y + [gb]z + [Gbl] &= 0, \\ [ga]x + [gb]y + [g]z + [gl] &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 44)$$

hiebei ist:

$$\left.\begin{aligned} [Gaa] &= [\mathfrak{g}aa] + [gaa] = \mathfrak{g}_1 a_1^2 + \ldots + \mathfrak{g}_s a_s^2 + g_1 a_1^2 + \ldots + g_i a_i^2, \\ [Gbb] &= [\mathfrak{g}bb] + [gbb] = \mathfrak{g}_1 b_1^2 + \ldots + \mathfrak{g}_s b_s^2 + g_1 b_1^2 + \ldots + g_i b_i^2, \\ [Gal] &= [\mathfrak{g}al] + [gal'] = \mathfrak{g}_1 a_1 l_1 + \ldots + \mathfrak{g}_s a_s l_s + g_1 a_1 l_1' + \ldots + g_i a_i l_i', \\ [Gbl] &= [\mathfrak{g}bl] + [gbl'] = \mathfrak{g}_1 b_1 l_1 + \ldots + \mathfrak{g}_s b_s l_s + g_1 b_1 l_1' + \ldots + g_i b_i l_i', \\ [ga] &= g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots + g_i a_i, \\ [gl] &= g_1 b_1 + g_2 b_2 + \ldots + g_i b_i, \\ [gl] &= g_1 l_1' + g_2 l_2' + \ldots + g_i l_i', \\ [g] &= g_1 + g_2 + \ldots + g_i. \end{aligned}\right\} \quad . \quad 45)$$

Durch Elimination von z aus den Gleichungen 44) erhält man die reduzierten Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [Gaa\,1]x + [Gab\,1]y + [Gal\,1] &= 0, \\ [Gab\,1]x + [Gbb\,1]y + [Gbl\,1] &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

in welchen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [Gaa\,1] &= [Gaa] - \frac{[ga]^2}{[g]}, \\ [Gbb\,1] &= [Gbb] - \frac{[gb]^2}{[g]}, \\ [Gab\,1] &= [Gab] - \frac{[ga]}{[g]}[gb], \\ [Gal\,1] &= [Gal] - \frac{[ga]}{[g]}[gl], \\ [Gbl\,1] &= [Gbl] - \frac{[gb]}{[g]}[gl]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 47)$$

ist. Aus 46) folgen die gesuchten Korrektionen x und y mit:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{[Gal\,2]}{[Gaa\,2]}, \\ y &= -\frac{[Gbl\,2]}{[Gbb\,2]}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 48)$$

Die Nenner dieser Brüche sind wie früher die Gewichte der entsprechenden Unbekannten; somit

$$\left.\begin{aligned} g_x &= [Gaa\,2] = [Gaa\,1] - \frac{[Gab\,1]^2}{[Gbb\,1]}, \\ g_y &= [Gbb\,2] = [Gbb\,1] - \frac{[Gab\,1]^2}{[Gaa\,1]}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

In weiterer Folge erhalten wir die mittleren Fehler m_x und m_y aus:

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \pm \frac{m}{\sqrt{[Gaa\,2]}} \text{ oder } m_x^2 = m^2 \frac{[Gbb\,1]}{D}, \\ m_y &= \pm \frac{m}{\sqrt{[Gbb\,2]}} \text{ oder } m_y^2 = m^2 \frac{[Gaa\,1]}{D}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 50)$$

worin m der mittlere Fehler der Gewichtseinheit aus:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[Gvv]}{i+s-3}}$$

zu berechnen ist. Schließlich folgt der mittlere Punktfehler M in bekannter Weise aus:

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = m^2 \frac{[Gaa\,1] + [Gbb\,1]}{D}, \quad \ldots\ldots \quad 51)$$

in welchem Ausdrucke gleich wie in 50):

$$D = [Gaa\,1]\,[Gbb\,1] - [Gab\,1]^2$$

einzusetzen ist.

In ähnlicher Weise wie früher bekommen wir die Bestimmungselemente der entsprechenden Fehlerellipse aus:

$$\left.\begin{aligned} tg\,2\varphi &= \frac{-2\,[Gab\,1]}{-([Gaa\,1] - [Gbb\,1])}, \\ m^2_{max} = A^2 &= \frac{[Gaa\,1] + [Gbb\,1] + W}{2D}\, m^2 \text{ mit dem Richtungswinkel } \varphi, \\ m^2_{min} = B^2 &= \frac{[Gaa\,1] + Gbb\,1] - W}{2D}\, m^2 \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \varphi \pm 90^0, \end{aligned}\right\} \ldots 52)$$

wobei

$$W^2 = ([Gaa\,1] - [Gbb\,1])^2 + 4\,[Gab\,1]^2 \quad \ldots\ldots \quad 53)$$

gesetzt wurde.

Soll die Fehlerellipse in den Fehlerkreis übergehen, so muß der Ausdruck für W Null werden, welcher Forderung nach 53) mit

$$\left.\begin{aligned} &1. \quad [Gab\,1] = 0 \text{ und} \\ &2. \quad [Gaa\,1] = [Gbb\,1] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 54)$$

genügt wird. Mit Rücksicht auf diese Bedingungen 54) wegen des Fehlerkreises, erhalten wir in Hinblick auf die Gleichungen 49), 50) und 52):

$$m_x^2 = m_y^2 = m^2_{max} = m^2_{min} = \frac{m^2}{[Gaa\,1]} = \frac{m^2}{[Gbb\,1]}$$

und den mittleren Punktfehler M mit:

$$M^2 = 2\frac{m^2}{[Gaa\,1]} = 2\frac{m^2}{[Gbb\,1]}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

der Radius R_0 des entsprechenden Fehlerkreises ist dann:

$$R_0 = A = B = \pm \frac{m}{\sqrt{[Gaa\,1]}} = \pm \frac{m}{\sqrt{[Gbb\,1]}}. \quad \ldots\ldots \quad 56)$$

Soll wie in den vorigen Aufgaben der mittlere Punktfehler M dem Minimum möglichst nahekommen, so muß nach 51) mit Rücksicht auf 50)

$$[Gaa\,2] \text{ bzw. } [Gbb\,2]$$

einem möglichst großen Werte zustreben. Somit ist unsere Funktion F gegeben durch:

$$F = [Gaa\,2] \text{ bzw. } F = [Gbb\,2].$$

Wird die partielle Differentiation von F nach den einzelnen inneren Richtungsgewichten g vorgenommen und dabei die Entwicklung nach 49) berücksichtigt, so erhält man:

$$\frac{\partial [Gaa\,2]}{\partial g_r} = \frac{\partial [Gaa\,1]}{\partial g_r} - \frac{2\,[Gbb\,1]\,[Gab\,1]\,\dfrac{\partial [Gab\,1]}{\partial g_r} - [Gab\,1]^2\,\dfrac{\partial [Gbb\,1]}{\partial g_r}}{[Gbb\,1]^2} = 0$$

Wegen der ersten Gleichung 54):

$$[Gab\,1] = 0$$

folgt

$$\frac{\partial [Gaa\,2]}{\partial g_r} = \frac{\partial [Gaa\,1]}{\partial g_r} = 0.$$

In gleicher Weise ergibt sich:

$$\frac{\partial [Gbb\,2]}{\partial g_r} = \frac{\partial [Gbb\,1]}{\partial g_r} = 0,$$

in welcher Gleichung gleich wie in der vorhergehenden $r = 1, 2, \ldots . i$ zu nehmen ist. Wegen der zweiten Gleichung 54):

$$[Gaa\,1] = [Gbb\,1]$$

ist es belanglos, welcher von den beiden Summenausdrücken für die Funktion F herangezogen wird. Berücksichtigt man die Entwicklungen nach 47) bzw. nach 45), so erscheint F in der Form:

$$F = [Gaa\,1] = [\mathfrak{g}aa] + [gaa] - \frac{[ga]^2}{[g]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 57)$$

Nennt man den gegebenen Arbeitsaufwand K, setzt man also die Summe der Gewichte:

$$\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \ldots . + \mathfrak{g}_s + g_1 + g_2 + \ldots . + g_i = K = \text{konstant} \quad . \; . \; 58)$$

und entwickelt 54) in Hinblick auf 47) und 45), wodurch:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ [g]([\mathfrak{g}ab] + [gab]) - [ggab] - [g_\alpha g_\beta (a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha)] = 0, \\ 2.\ [g]([\mathfrak{g}(a^2 - b^2)] + [g(a^2 - b^2)]) + [gg(b^2 - a^2)] + 2[g_\alpha g_\beta (b_\alpha b_\beta - a_\alpha a_\beta)] = 0 \end{array}\right\} \; 59)$$

erhalten wird, so hat man durch 58) und 59) die bei Erreichung eines möglichst großen Wertes in F einzuhaltenden Nebenbedingungen gegeben.

In den Gleichungen 59) hat sich die Entwicklung des ersten Summenausdruckes von $1, 2 \ldots . s$ und jene der zwei folgenden von $1, 2 \ldots . i$ zu erstrecken; hingegen ist das letzte Summenglied für alle Kombinationen von $\alpha = 1, 2 \ldots . (i - 1)$ und $\beta = (\alpha + 1), \ldots . i$ auszuwerten. Die hierin auftretenden Richtungsgewichte $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots . \mathfrak{g}_s$ für die äußeren und $g_1, g_2 \ldots . g_i$ für die inneren Richtungen, erscheinen wie früher als Unbekannte; a und b sind die Richtungskoeffizienten nach Gleichung 2).

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, die Berechnung der Richtungsgewichte für die Mindestzahl der Richtungen, welche beim kombinierten Einschneiden eine Ausgleichung erfordern, also für vier Richtungen, mit Hilfe der Gleichungen 58) und 59) in Hinblick auf einen möglichst großen Wert in F 57) vorzunehmen.

Diese Aufgabe, welche für sich allein unbestimmt erscheint, da ja nur drei Gleichungen 58), 59) für den Rechnungsvorgang zur Verfügung stehen und vier Unbekannte zu bestimmen sind, wird in ganz ähnlicher Weise behandelt wie dies beim Rückwärtseinschneiden der Fall war. Die Bestimmung der Gewichtsverteilung wird im allgemeinen mehr Lösungen als früher ergeben, da der Kombination bei s äußeren und i inneren Richtungen mehr Spielraum geboten ist. Es muß auch hier versuchsweise vorgegangen werden; hiebei sind der Reihe nach äußere Richtungsgewichte mit inneren in der Gesamtzahl vier miteinander zu kombinieren. Ähnlich wie beim Rückwärtseinschneiden werden wir Hilfsgleichungen aufstellen, die uns in Verbindung mit der Gleichung 58) in die Lage setzen, je zwei der in Rechnung stehenden Gewichte durch die anderen zwei auszudrücken.

Diese besagten Hilfsgleichungen ergeben sich aus 57), indem man den partiellen Differentialquotienten dieser Gleichung nach den einzelnen inneren Gewichten g bildet und die dadurch erhaltenen Gleichungen gleich Null setzt. Man bekommt damit:

$$\frac{\partial F}{\partial g_r} = \frac{\partial [Gaa\,1]}{\partial g_r} = \frac{\partial [gaa]}{\partial g_r} - \frac{2\,[g]\,[ga]\,\frac{\partial [ga]^2}{\partial g_r} - [ga]^2\,\frac{\partial [g]}{\partial g_r}}{[g]^2} =$$

$$= a_r^2 - 2\,a_r\frac{[ga]}{[g]} + \frac{[ga]^2}{[g]^2} = \left(a_r - \frac{[ga]}{[g]}\right)^2 = 0,$$

bzw.

$$a_r - \frac{[ga]}{[g]} = 0$$

oder

$$[g]\,a_r = [ga], \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 60)$$

wobei $r = 1, 2, \ldots\ldots i$ zu nehmen ist.

Somit stehen i Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [g]\,a_1 = g_1 a_1 + g_2\,a_2 + \ldots + g_i\,a_i, \\ [g]\,a_2 = g_1 a_1 + g_2\,a_2 + \ldots + g_i\,a_i, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ [g]\,a_i = g_1\,a_1 + g_2\,a_2 + \ldots + g_i\,a_i \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 61)$$

als Hilfsgleichungen zur Verfügung.

Nun setzt man die Gewichte von $(i + s - 4)$ Richtungen Null und stellt äußere und innere Richtungsgewichte miteinander kombiniert in die Rechnung; dabei werden mit Rücksicht auf einen möglichst großen Wert in F laut Gleichung 57) in erster Linie jene äußeren Richtungen zu wählen sein, deren Gewichte g den größten Koeffizienten a^2 angehören. Im weiteren kann unter Verwendung der Hilfsgleichungen 61) und der Gleichung 58) sowie der damit folgenden Gleichungspaare und der beiden Gleichungen 59) derselbe Vorgang zur Ermittlung der Gewichtsverteilung eingehalten werden wie dies beim Rückwärtseinschneiden bezüglich der Gleichungen 41) und 38) der Fall war. Es werden auch hier mehrere Lösungen für die Gewichtsverteilung im allgemeinen in Betracht kommen und ist jene als die günstigste zu bezeichnen und beizubehalten, welche den größten Wert in F 57) ergibt. Als Kontrolle hat wie früher zu gelten, daß sämtlichen drei Nebenbedingungen nach den Gleichungen 58), 59) durch Einsetzen der errechneten Gewichtszahlen entsprochen wird.

In manchen Fällen der Anwendung wird es wünschenswert erscheinen, das kombinierte Einschneiden durch ein Vorwärtseinschneiden mit drei Richtungen oder durch ein Rückwärtseinschneiden mit vier Richtungen zu ersetzen.

In diesen Fällen kann zur Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung wie folgt vorgegangen werden.

Im ersten Falle gehen die Gleichungen 57), 58) und 59), da hierin die Gewichte g der inneren Richtungen Null zu setzen sind, über in:

$$F = [gaa] = g_1 a_1^2 + g_2 a_2^2 + \ldots + g_s a_s^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 62)$$

und

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & g_1 a_1 b_1 + g_2 a_2 b_2 + \ldots\ldots + g_s a_s b_s = 0, \\ 2. & g_1(a_1^2 - b_1^2) + g_2(a_2^2 - b_2^2) + \ldots + g_s(a_s^2 - b_s^2) = 0 \\ 3. & g_1 + g_2 + \ldots\ldots + g_s = K = \text{konstant.} \end{array}\right\} \quad . \ 63)$$

Wir bekommen damit dieselben Gleichungen wie sie beim Vorwärtseinschneiden der Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung dienten. Es ist demnach in der bereits beim Vorwärtseinschneiden gegebenen Art vorzugehen, um die vorteilhafteste Gewichtsverteilung zu erhalten.

Ersetzt man aber das kombinierte Einschneiden durch ein Rückwärtseinschneiden aus vier Richtungen, so wird, da jetzt in 57), 58) und 59) die Gewichte g der äußeren Richtungen Null zu nehmen sind:

$$F = \frac{[g]\,[gaa] - [ga]^2}{[g]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 64)$$

und

$$\begin{array}{ll} 1. & [g]\,[gab] - [ggab] - [g_\alpha g_\beta(a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha)] = 0, \\ 2. & [g]\,[g(a^2 - b^2)] + [gg(b^2 - a^2)] + 2\,[g_\alpha g_\beta(b_\alpha b_\beta - a_\alpha a_\beta)] = 0, \\ 3. & g_1 + g_2 + \ldots\ldots + g_i = K = \text{konstant.} \end{array}$$

In diesen Gleichungen sind die ersten zwei Summenglieder von $1 \ldots\ldots i$ und das letzte Summenglied für alle Kombinationen von $\alpha = 1, \ldots\ldots (i-1)$ und $\beta = (\alpha + 1), \ldots\ldots i$ auszuwerten.

Die Berechnung der Gewichtszahlen für die vier Richtungen, also der Gewichtsverteilung, kann nun in der beim Rückwärtseinschneiden geschilderten Weise vorgenommen werden; wie immer ist jene Gewichtsverteilung als die günstigste beizubehalten, welche den kleinsten mittleren Punktfehler ergibt.

Vom Standpunkte der Anwendung ist der soeben besprochene zweite Weg zweifellos vorteilhafter als der erste. Denn, für die Ausführung der Beobachtungen kommt hiebei nur ein Instrumentenstandpunkt in Betracht, und weiters ist ja an und für sich das Rückwärtseinschneiden dem Vorwärtseinschneiden bezüglich der Genauigkeit überlegen.

Aus dem soeben Gesagten ist zu entnehmen, daß die für das kombinierte Einschneiden sich ergebende günstigste Gewichtsverteilung nicht unter allen Umständen auch tatsächlich die rationellste für die Bestimmung des Neupunktes ist. Wir haben demnach die Ergebnisse der drei erörterten Fälle miteinander zu vergleichen und dabei zu überlegen, inwieweit vermehrter Arbeitsaufwand am Platze ist, um der sich ergebenden günstigsten Gewichtsverteilung gerecht zu werden.

Bisher hatten wir als Maß des Arbeitsaufwandes die Anzahl der erforderlichen Einstellungen bzw. Beobachtungen aufgestellt. Für die Zwecke der Feldarbeit werden jedoch für die Aufstellung eines rationellen Beobachtungsplanes auch andere Gesichtspunkte zu berücksichtigen sein. Hiebei kommen besonders die Anzahl der Instrumentenaufstellungen, die damit folgende Vergrößerung des Weges und des Zeitaufwandes in Betracht. Es wird sich demnach in Hinblick auf die mit der Ausführung der Beobachtungen in Verbindung stehenden Arbeiten manchmal ein Abgehen von der günstigsten Gewichtsverteilung vorteilhaft erweisen. Man wird gegebenenfalls unter einen kleinen Einbuße an Genauigkeit jene Art der Punkteinschaltung unter den ermittelten Gewichtsverhältnissen wählen, welche in Vergleich zu den anderen ein Mindestmaß an Weg und Zeit, demnach möglichst wenig Instrumentenaufstellungen erfordert.

Beispiele.

Im Anschlusse an die allgemeinen Formeln, welche für die behandelten Arten der Punkteinschaltungsmethoden der Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung zu dienen haben, soll nun für das Vorwärtseinschneiden und für das Rückwärtseinschneiden die Auswertung der aufgestellten Formeln gezeigt werden, wobei auch der Rechnungsvorgang, soweit er sich zur Klarstellung als notwendig erweist, mitgeteilt wird. Um weiters den durch die günstigste Gewichtsverteilung erzielten höheren Grad der Genauigkeit in der Bestimmung des Neupunktes vor Augen zu führen, geben wir vorerst die Ergebnisse der Ausgleichung mit Rücksicht auf die vorgegebenen Gewichtszahlen. Hieran wird sich die Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung reihen; zum Schlusse finden sich die Resultate der Ausgleichung, welche sich in Hinblick auf die günstigste Gewichtsverteilung ergeben. Ferner sei erwähnt, daß die Ermittlung der Gewichtszahlen lediglich mit Rücksicht auf die gegebenen Rechnungskontrollen entsprechend scharf — auf vier Dezimalen — vorgenommen wurde; für die Zwecke der Anwendung wird man jedenfalls mit einer bzw. zwei Dezimalen das Auslangen finden.

1. Vorwärtseinschneiden aus sieben Punkten.

Anläßlich der Triangulierung St. Peter b. Graz 1921 wurde die Bestimmung des unzugänglichen Punktes K durch Vorwärtseinschneiden aus sieben Punkten durchgeführt.

Die diesbezüglichen erforderlichen Angaben sind der folgenden Tabelle zu entnehmen, welche außer den Koordinaten x und y der gegebenen Punkte auch die Messungsergebnisse in Form von orientierten Richtungen enthält. Die Beobachtungen sind gleich genau; wir erteilen jeder das Gewicht $g = 1$, demzufolge sich die Summe der Beobachtungsgewichte $[g] = 7$ ergibt.

	Gegebene Punkte:						
	1 *(D)*	2 *(E)*	3 *(G)*	4 *(F)*	5 *(A)*	6 *(B)*	7 *(C)*
	Koordinaten						
x	2372·041	782·138	1598·874	1734·159	2000·000	2130·444	1980·630
y	1412·016	1123·363	2050·432	632·848	1500·000	1701·336	1752·099
	Orientierte Richtungen nach K						
	171° 02′ 50·9″	30° 09′ 21·7″	264° 32′ 47·4″	103° 38′ 41·7″	174° 26′ 22·6″	193° 58′ 24·0″	203° 35′ 29·0″

Als Näherungskoordinaten für K erhält man aus C und D gerechnet:

$$x_0 = 1512{\cdot}100\,m,$$
$$y_0 = 1547{\cdot}487\,m.$$

Somit folgen die Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned}
v_1 &= -36{\cdot}9x - 324{\cdot}1y - 0{\cdot}2,\\
v_2 &= -122{\cdot}7x + 211{\cdot}3y + 6{\cdot}4,\\
v_3 &= +380{\cdot}6x - 36{\cdot}3y - 3{\cdot}4,\\
v_4 &= -213{\cdot}0x - 51{\cdot}7y + 6{\cdot}4,\\
v_5 &= -40{\cdot}8x - 418{\cdot}8y + 4{\cdot}8,\\
v_6 &= +78{\cdot}2x - 314{\cdot}1y - 5{\cdot}0,\\
v_7 &= +161{\cdot}5x - 369{\cdot}7y + 0{\cdot}1.
\end{aligned}$$

Aus den Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
234.504x - 87.276y - 4.006 &= 0,\\
-87.276x + 514.170y + 621 &= 0
\end{aligned}$$

ergeben sich die Korrektionen x und y mit:

$$x = +\,0{\cdot}017_8\,m,$$
$$y = +\,0{\cdot}001_8\,m$$

und damit die ausgeglichenen Koordinaten für den Punkt K:

$$x_K = 1.512{\cdot}118\,m,$$
$$y_K = 1.547.489\,m.$$

Die weitere Rechnung liefert der Reihe nach:

$$m = \pm\,3{\cdot}51''; \; m_x = \pm\,0{\cdot}007_5\,m; \; m_y = \pm\,0{\cdot}005_1\,m \text{ und } M = \pm\,0{\cdot}009_1\,m.$$

Die zugehörige Fehlerellipse ist bestimmt durch:

$$\varphi = 15^0\,59'\,05''; \; A = m_{\max} = \pm\,0{\cdot}007_7\,m; \; B = m_{\min} = \pm\,0{\cdot}004_8\,m.$$

Soweit die Ergebnisse, wie sie ohne Rücksicht auf die Gewichtsverhältnisse gewonnen werden.

Zur Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung hat man nun nachstehenden Rechnungsweg einzuschlagen.

Da die Summe der Beobachtungsgewichte sieben beträgt, so ist in dem Folgenden als vorgegebener Arbeitsaufwand $K = 7$ einzusetzen. Die Funktionsgleichung 15) lautet in dem vorliegenden Falle:

$$F = 1.362g_1 + 15.055g_2 + 144.856g_3 + 45.369g_4 + 1.665g_5 + 6.115g_6 + 20.082g_7$$

und die Nebenbedingungen nach 16) ergeben sich mit:

1. $8.638\,g_1 - 25.927\,g_2 - 13.816\,g_3 + 11.012\,g_4 + 17.087\,g_5 - 24.563\,g_6 -$
   $- 59.707\,g_7 = 0,$
2. $-53.441\,g_1 - 29.591\,g_2 + 143.538\,g_3 + 42.696\,g_4 - 173.728\,g_5 - 92.544\,g_6 -$
   $- 116.596\,g_7 = 0,$
3. $g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 = K = 7$

Als günstige Richtungen für die Bestimmung des Punktes K können auf Grund einer Skizze jene von den Punkten 1 (D), 2 (E) und 3 (G) angenommen werden. Die Gewichte g_1, g_2, g_3 dieser Richtungen durch die übrigen Gewichte $g_4, \ldots . g_7$ ausgedrückt, ergibt nach 17):

$$g_1 = -0{\cdot}8799\,g_4 - 1{\cdot}4654\,g_5 - 0{\cdot}1592\,g_6 + 0{\cdot}6596\,g_7 + 4{\cdot}6089,$$
$$g_2 = +0{\cdot}4187\,g_4 - 0{\cdot}1653\,g_5 - 1{\cdot}1825\,g_6 - 2{\cdot}5663\,g_7 + 0{\cdot}5597,$$
$$g_3 = -0{\cdot}5388\,g_4 + 0{\cdot}6307\,g_5 + 0{\cdot}3417\,g_6 + 0{\cdot}9067\,g_7 + 1{\cdot}8314.$$

Als zugehörige Gleichung F nach 19) folgt:

$$F = -27.567\,g_4 + 88.536\,g_5 + 37.591\,g_6 + 113.684\,g_7 + 279.986.$$

Da das Absolutglied in F und jene in den Gleichungen für g_1, g_2, g_3 positiv sind, so ist für $g_4 = g_5 = g_6 = g_7 = 0$ mit

$$g_1 = 4{\cdot}6089,$$
$$g_2 = 0{\cdot}5597,$$
$$g_3 = 1{\cdot}8314$$

eine Gewichtsverteilung gefunden. Der damit erreichte Wert in F ergibt sich mit:

$$F = 279.986.$$

Auf Grund der vorliegenden Gleichungen können mit Rücksicht auf die Koeffizienten in F noch weitere Gewichtsverteilungen ermittelt werden, welche in der nachstehenden Tabelle unter Nr. 1 .... 6 eingereiht sind.

Sind alle möglichen Gewichtsverteilungen, die sich zwischen g_1, g_2, g_3 und einem oder zwei der in F auftretenden Gewichte erstrecken, gefunden, so führt zur Ermittlung der Gewichtsverteilung zwischen $g_4 \ldots g_7$ folgender Rechnungsweg zum Ziele.

Man setzt die Gleichungen für g_1, g_2, g_3 gleich Null und drückt g_4, g_5, g_6 durch g_7 aus; dadurch ergeben sich:

$$g_4 = +0{\cdot}7175\,g_7 + 4{\cdot}8046,$$
$$g_5 = +0{\cdot}2309\,g_7 + 0{\cdot}0243,$$
$$g_6 = -1{\cdot}9484\,g_7 + 2{\cdot}1711;$$

damit wird

$$F = +41.106\,g_7 + 231.303.$$

Aus diesen Gleichungen können in Befolgung derselben Überlegungen wie früher die in der Tabelle unter Nr. 7 und 8 angegebenen Gewichtsverteilungen bestimmt werden.

Aus der nun folgenden Tabelle ist zu entnehmen, daß die unter Nr. 6 gegebene Gewichtsverteilung vermöge des größten Wertes in F als die günstigste anzusehen ist. Sie führt, da g_2 gegenüber g_3 und g_5 klein ist, dem Wesen nach auf ein einfaches Vorwärtseinschneiden aus den Punkten 3 und 5, bei welchen die Richtungen entsprechend scharf zu beobachten sind.

Der Rechnungsvorgang der Ausgleichung unter Berücksichtigung der ermittelten Gewichtsverhältnisse geht wegen der Nebenbedingungen:

$$[gab] = 0 \text{ und}$$
$$[gaa] = [gbb]$$

wesentlich einfach vor sich.

Für die folgende Ausgleichungsrechnung wurde die günstigste d. i. die in der Tabelle unter Nr. 6 angeführte Gewichtsverteilung gewählt.

Nr.	Gewichtsverteilung	F	Nr.	Gewichtsverteilung	F
1	$\left.\begin{matrix} g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_1 = 4{\cdot}6089 \\ g_2 = 0{\cdot}5597 \\ g_3 = 1{\cdot}8314 \end{matrix}$	279.986	5	$\left.\begin{matrix} g_2 \\ g_3 \\ g_5 \\ g_6 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_1 = 0{\cdot}7434 \\ g_4 = 5{\cdot}1915 \\ g_7 = 1{\cdot}0651 \end{matrix}$	257.956
2	$\left.\begin{matrix} g_3 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_1 = 1{\cdot}6178 \\ g_2 = 1{\cdot}9829 \\ g_4 = 3{\cdot}3993 \end{matrix}$	186.278	6	$\left.\begin{matrix} g_1 \\ g_4 \\ g_6 \\ g_7 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_2 = 0{\cdot}0398 \\ g_3 = 3{\cdot}8150 \\ g_5 = 3{\cdot}1452 \end{matrix}$	558.445
3	$\left.\begin{matrix} g_2 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_7 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_1 = 4{\cdot}5336 \\ g_3 = 1{\cdot}9931 \\ g_6 = 0{\cdot}4733 \end{matrix}$	297.779	7	$\left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_7 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_4 = 4{\cdot}8046 \\ g_5 = 0{\cdot}0243 \\ g_6 = 2{\cdot}1711 \end{matrix}$	231.203
4	$\left.\begin{matrix} g_2 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_1 = 4{\cdot}7528 \\ g_3 = 2{\cdot}0291 \\ g_7 = 0{\cdot}2181 \end{matrix}$	304.780	8	$\left.\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_6 \end{matrix}\right\} = 0,\ \begin{matrix} g_4 = 5{\cdot}6041 \\ g_5 = 0{\cdot}2816 \\ g_7 = 1{\cdot}1143 \end{matrix}$	277.107

Die Normalgleichungen lauten:

$$558.445x - 5584 = 0,$$
$$558.445y - 5798 = 0,$$

aus denen sich die Korrektionen der Näherungskoordinaten:

$$x = + 0{\cdot}010_0\, m,$$
$$y = + 0{\cdot}010_4\, m$$

ergeben; damit hat man als endgiltige Koordinaten für den Punkt K:

$$x_K = 1512{\cdot}110\, m,$$
$$y_K = 1547{\cdot}497\, m.$$

Die weitere Rechnung ergibt der Reihe nach als mittleren Fehler der Gewichtseinheit:

$$m = \pm 1{\cdot}47'',$$

als Halbmesser des Fehlerkreises:

$$R_0 = A = B = m_x = m_y = \pm 0{\cdot}002{,}_0\, m$$

und schließlich als mittleren Punktfehler:

$$M = \pm 0{\cdot}002{,}_8\, m.$$

Zu bemerken ist, daß von einer Gegenüberstellung der beiden Ausgleichungsergebnisse in diesem Falle strenge genommen nicht gesprochen werden kann; denn, es werden bei der zweiten Ausgleichung dieselben Widersprüche l verwendet, welche sich aus den Beobachtungen ergeben haben, die ohne auf die günstigste Gewichtsverteilung Rücksicht zu nehmen, ausgeführt wurden. Zweifellos wird man aber geringeren Widersprüchen l begegnen, wenn, wie dies im folgenden Beispiele der Fall ist, für die Lage des Neupunktes Bestimmungselemente vorhanden sind, deren Messung sich in Hinblick auf die günstigste Gewichtsverteilung vollzogen hat; demzufolge werden sich dann auch der Fehlerkreis und damit der mittlere Punktfehler kleiner ergeben.

2. Rückwärtseinschneiden aus sieben Punkten.

Bestimmung des Punktes S_{W} (Südwestpfeiler am Observatorium der Technischen Hochschule Graz) aus sieben gegebenen Punkten.

Die hiezu notwendigen Angaben finden sich in der nachstehenden Tabelle. Die Beobachtungen sind gleich genau; sie sind die arithmetischen Mittel aus fünf Richtungssätzen. Wir erteilen jeder das Gewicht $g = 1$, somit ist die Summe der Beobachtungsgewichte durch $[g] = 7$ gegeben.

	Gegebene Punkte:						
	1 (Hilmwarte)	2 (Domkirche)	3 (St. Peterkirche)	4 (Josefkirche)	5 (Stadtpfarrkirche)	6 (Lisl-Schloßberg)	7 (Reinerwarte)
	Koordinaten						
x	+12,551·85	+ 14,027·69	+ 15,914·48	+ 15,501·26	+ 14,323·95	+ 13,582·17	+ 11,517·39
y	+ 53·86	+ 1,795·64	− 719·28	+ 1,857·31	+ 1,875·18	+ 2,161·63	+ 2,461·63
	Innere Richtungen						
	0° 0′ 0·0″	268° 10′ 56·1″	97° 31′ 7·0″	179° 45′ 55·0″	243° 6′ 20·7″	277° 31′ 29·7″	304° 22′ 9·8″

Als Näherungskoordinaten für den Punkt S_{W} ergeben sich:

$$x_0 = + 14{,}379{\cdot}7\ m,$$
$$y_0 = + 1{,}177{\cdot}2\ m,$$

womit folgende Fehlergleichungen erhalten werden:

$$\begin{aligned}
v_1 &= - 50{\cdot}2x + 82{\cdot}1y + z - 11{\cdot}7,\\
v_2 &= + 251{\cdot}9x + 143{\cdot}4y + z + 10{\cdot}5,\\
v_3 &= - 65{\cdot}7x - 53{\cdot}2y + z + 3{\cdot}4,\\
v_4 &= + 81{\cdot}5x - 134{\cdot}5y + z + 15{\cdot}3,\\
v_5 &= + 293{\cdot}6x + 23{\cdot}5y + z - 7{\cdot}1,\\
v_6 &= + 126{\cdot}6x + 102{\cdot}5y + z + 0{\cdot}0,\\
v_7 &= + 26{\cdot}9x + 60{\cdot}0y + z + 0{\cdot}1.
\end{aligned}$$

Aus den zugehörigen reduzierten Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
116.776x + 24.776y + 1.136 &= 0,\\
24.776x + 55.727y - 2.190 &= 0
\end{aligned}$$

folgen die Korrektionen x und y der Näherungskoordinaten:

$$x = - 0{\cdot}020\ m,$$
$$y = + 0{\cdot}048\ m,$$

womit die ausgeglichenen Koordinaten des Punktes S_{W}:

$$x_{S_{W}} = + 14.379{\cdot}680\ m,$$
$$y_{S_{W}} = + 1.177{\cdot}248\ m$$

erhalten werden. In weiterer Folge bekommt man:

$$m = \pm 10{\cdot}00''; \ m_x = \pm 0{\cdot}030_7\ m; \ m_y = \pm 0{\cdot}044_5\ m \text{ und } M = \pm 0{\cdot}054_1\ m$$

Als Bestimmungselemente für die Fehlerellipse finden wir:

$$\varphi = 109^0\ 31'\ 58''; \ A = m_{max} = \pm 0{\cdot}046_1\ m; \ B = m_{min} = \pm 0{\cdot}028_2\ m.$$

Zwecks Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung ist in den einschlägigen Formeln 37), 38) und 41), da die Summe der Beobachtungsgewichte sieben beträgt, für den vorgegebenen Arbeitsaufwand $K = 7$ zu setzen.

Man geht nun versuchsweise vor, nimmt drei Gewichte — g_2, g_5, g_7 — mit Null an und ermittelt die restlichen vier Gewichte g_1, g_3, g_4, g_6.

Als Hilfsgleichung benützen wir die siebente der Gleichungen 41):

$$188{\cdot}3 = -\,50{\cdot}2\,g_1 - 65{\cdot}7\,g_3 + 81{\cdot}5\,g_4 + 126{\cdot}6\,g_6,$$

womit sich unter Benützung der dritten Gleichung 38):

$$g_1 + g_3 + g_4 + g_6 = 7$$

die Gewichte g_1 und g_3 mit:

$$g_1 = -\,9{\cdot}4985\,g_4 - 12{\cdot}4088\,g_6 + 41{\cdot}8267,$$
$$g_3 = +\,8{\cdot}4985\,g_4 + 11{\cdot}4088\,g_6 - 34{\cdot}8267$$

ergeben.

Durch Einsetzen dieser Werte für g_1, und g_3 in die beiden ersten Gleichungen 38) gelangt man zu den zwei Gleichungen:

$$-\,58\,g_4^2 + 662.978\,g_4 - 88\,g_6^2 + 1{,}015.342\,g_6 - 134\,g_4 g_6 - 3{,}055.152 = 0,$$
$$+\,1{,}868.786\,g_4^2 - 14{,}172.233\,g_4 + 2{,}322.922\,g_6^2 - 15{,}598.695\,g_6 + 4{,}166.983\,g_6 + {}$$
$$+\,26{,}342.273 = 0.$$

Daraus folgen g_4 und g_6, womit aber auch g_1 und g_3 bestimmt sind. Man erhält als Gewichtsverteilung:

$$g_1 = 0{\cdot}0614,\quad g_3 = 2{\cdot}8311,\quad g_4 = 3{\cdot}1625,\quad g_6 = 0{\cdot}9450,\qquad g_2 = g_5 = g_7 = 0;$$

damit wird $F = 43.464.$

Auf Grund der soeben ermittelten Gewichtszahlen kann nun der Beobachtungsplan wie folgt aufgestellt werden.

Als Gewichtseinheit hatten wir das Mittel aus fünf Richtungssätzen angenommen; somit umfaßt der gesamte Arbeitsaufwand 35 Einstellungen in jeder Kreislage, demnach also 70 Einstellungen.

In Hinblick auf die Gewichtszahlen sind nun die Beobachtungen der in Betracht kommenden Richtungen nach den Punkten 1, 3, 4 und 6 in der nachstehenden Weise durchzuführen. Es ist:

	die Richtung	nach	dem	Punkte	1	aus	einer	Einstellung,
	„	„	„	„	3	„	28	Einstellungen,
	„	„	„	„	4	„	32	„
und	„	„	„	„	6	„	9	„

abzuleiten, wobei wie früher abwechselnd in beiden Kreislagen zu beobachten ist.

Die dementsprechend durchgeführten Messungen ergeben als innere Richtungen von dem Punkte S_{IV}

nach dem	Punkte	1	. . . .	131° 34′ 13·5″,
„	„	3	. . . .	229° 05′ 26·4″,
„	„	4	. . . .	311° 20′ 15·2″,
„	„	6	. . . .	49° 05′ 47·6″.

Die nun folgende Ausgleichungsrechnung, welche unter Benützung dieser Beobachtungsergebnisse, denen die vorher berechneten Gewichtszahlen entsprechen, durchgeführt wird, gestaltet sich wegen der Nebenbedingungen

$$[gab\,1] = 0 \text{ und}$$
$$[gaa\,1] = [gbb\,1]$$

verhältnismäßig einfach.

Als Fehlergleichungen erhält man:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\ 50{\cdot}2\,x + \ 82{\cdot}1\,y + z - \ 7{\cdot}3, \\ v_3 &= -\ 65{\cdot}7\,x - \ 53{\cdot}2\,y + z + \ 1{\cdot}9, \\ v_4 &= +\ 81{\cdot}5\,x - 134{\cdot}5\,y + z + 13{\cdot}0, \\ v_6 &= +\ 126{\cdot}6\,x + 102{\cdot}5\,y + z + \ 0{\cdot}0. \end{aligned}$$

Die reduzierten Normalgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} 43.464\,x + 1.782 &= 0, \\ 43.464\,y - 2.734 &= 0, \end{aligned}$$

woraus die Korrektionen der Näherungskoordinaten

$$\begin{aligned} x &= -\ 0{\cdot}041\ m, \\ y &= +\ 0{\cdot}063\ m \end{aligned}$$

und damit als endgiltige Koordinaten für den Punkt S_{IV}:

$$\begin{aligned} x_{S_{IV}} &= +\ 14.379{\cdot}659\ m, \\ y_{S_{IV}} &= +\ \ 1.177.263\ m \end{aligned}$$

folgen. Schließlich erhält man:

$$m = \pm\, 0{\cdot}43'',$$
$$R_0 = A = B = m_x = m_y = \pm\, 0{\cdot}002_1\ m \text{ und}$$
$$M = \pm\, 0{\cdot}0029\ m.$$

Zu diesem Beispiele wäre noch zu bemerken, daß, wie bei dem vorhergehenden, mit allen möglichen Kombinationen der Gewichte der Rechnungsvorgang durchzuführen ist, wobei gegebenenfalls eine andere der Gleichungen 41) als Hilfsgleichung zu benützen sein wird. Wie immer ist dann jene Gewichtsverteilung als die vorteilhafteste zu bezeichnen und beizubehalten, mit welcher der größte Wert in F erreicht wird.

Schlußbetrachtung.

Die Ermittlung der günstigsten Gewichtsverteilung kann jederzeit, sobald nur die Lage des Neupunktes ungefähr bekannt ist — gegebenenfalls auf Grund einer Triangulierungsnetzkarte — vorgenommen werden. Wir benötigen hiezu lediglich außer dem durch die Summe der Messungsarbeiten gegebenen Arbeitsaufwand die Richtungskoeffizienten a und b, welche bekanntlich auf verschiedene Arten entweder rechnerisch oder unter Verwendung von Hilfstafeln bestimmt werden können.

Die Bestimmung der Gewichtsverteilung hat vor Beginn der Feldarbeiten zu erfolgen und ist im wesentlichen der Zimmerarbeit vorbehalten.

Ist die vorteilhafteste Gewichtsverteilung ermittelt, sind somit die für die Bestimmung des Neupunktes in Betracht kommenden Richtungen samt ihren Gewichten bekannt, so ist anschließend der entsprechende Beobachtungsplan anzulegen.

Die Aufstellung des Beobachtungsplanes geht am einfachsten unter Benützung der Anschnittszahlen vor sich; dabei hat man sich zuerst über die Gewichtseinheit zu entscheiden z. B. eine Einstellung in beiden Kreislagen. Die einschlägigen Richtungen sind dann im entsprechenden Verhältnisse ihrer Gewichte zur Gewichtseinheit der Beobachtung zu unterziehen.

In den Fällen der Anwendung sind aber auch für die Anlage eines rationellen Beobachtungsplanes die mit der Ausführung der Beobachtungen verbundenen Arbeiten wie Anzahl der Instrumentenaufstellungen, Größe des Zeitaufwandes und des zurückzulegenden Weges von ausschlaggebender Bedeutung. Man wird daher zu überlegen haben, inwieweit in einzelnen Fällen erhöhter Zeit- und Geldaufwand anzubringen ist, um den Bedingungen der vorteilhaftesten Gewichtsverteilung zu genügen. Manchmal wird sich in Hinblick auf die zuletzt genannten Gesichtspunkte eine andere Gewichtsverteilung als die günstigste vorteilhafter erweisen, obwohl damit die Bestimmung des Neupunktes an Genauigkeit leidet.

Nach Abschluß der Feldarbeiten, die entsprechend dem ausgearbeiteten Beobachtungsplan ausgeführt wurden, ist mit diesen Beobachtungsergebnissen, welchen die vorher ermittelten Gewichtszahlen zukommen, die Berechnung der Koordinaten des Neupunktes nach den Regeln der Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen ungleicher Genauigkeit vorzunehmen.

Die mitgeteilten Beispiele geben ein klares Bild, inwieweit unsere günstigste Gewichtsverteilung den bestehenden Genauigkeitsuntersuchungen bezüglich der richtigen Auswahl der Netzrichtungen Rechnung trägt. Wir ersehen daraus, daß allen jenen Richtungen Gewichte erteilt werden, also entsprechenden Messungen unterzogen werden müssen, welche sich auf den ersten Blick auf Grund bekannter Untersuchungen als die Besten ergeben oder doch mindestens den diesbezüglichen Bedingungen am nächsten stehen.

Die vorstehenden Erörterungen mögen somit ein Beitrag sein zur Genauigkeitsüberlegung, welche jeder endgültigen Bestimmung und Ausgleichung eines Punktes voranzugehen hat, um die besten Bestimmungsstrahlen zu finden und die Gesamtanlage und Auswahl der Messungen entsprechend anzuordnen.

Graz, im Juli 1923.

Zur trigonometrischen Höhenmessung.

Von Prof. HEINRICH HAIDL in Oberhollabrunn.

Die trigonometrisch gemessenen Höhenunterschiede werden nach der Formel

$$h = a \operatorname{cotg} z + \frac{1-k}{2r} a^2 = I + II \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

berechnet, worin a die horizontale Entfernung zwischen Stand- und Zielpunkt, gemessen in der Höhe des Landeshorizontes, z die Zenitdistanz, k die Vorzahl der Strahlenbrechung und r den Erdhalbmesser bedeuten.

Es läßt sich nun, wie es z. B. Abendroth *) tut, das Verbesserungsglied II in den Zenitwinkel einbeziehen und die Formel in folgende Form bringen:

$$h = a \operatorname{cotg}\left[z - \frac{\rho\,(1-k)}{2\,r}\,a\right] = a \operatorname{cotg}\,(z - \delta) \ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

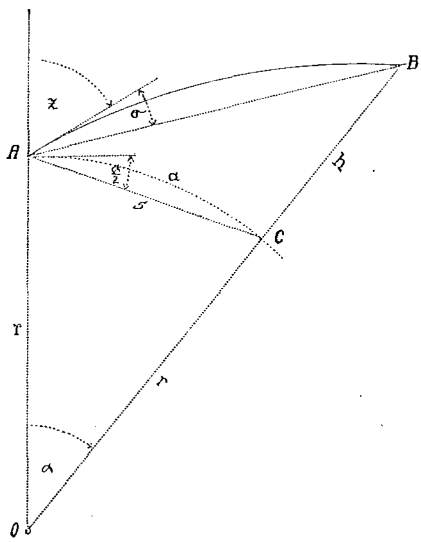
Die Formel 2) hat nun gegen 1) unverkennbare Vorteile; sie ist eingliedrig und das Verbesserungsglied δ wächst linear mit a, während jenes der Formel 1) quadratisch mit a zunimmt. Die Größe $\delta = \delta_1\, a$ läßt sich mit dem Rechenschieber bestimmen oder kann leicht einer Tafel entnommen werden. Formel 2) ist entschieden leichter zu handhaben und, wie im folgenden gezeigt werden soll, auch genauer als 1).

A. Ableitung der Formel 1).

Ist α der zum Bogen a gehörige Mittelpunktswinkel, die Sehne $AC = s$, und σ der Refraktionswinkel, so ist im Dreiecke ABC

$$\sphericalangle A = 90^0 - \left(z - \frac{\alpha}{2} + \sigma\right), \quad \sphericalangle B = z - \alpha + \sigma \text{ und}$$

$$\frac{h}{s} = \frac{\cos\left(z - \frac{\alpha}{2} + \sigma\right)}{\sin\,(z - \alpha + \sigma)} = \frac{\cos z + \left(\frac{\alpha}{2} - \sigma\right)\sin z - \frac{1}{8}\,(\alpha - 2\sigma)^2 \cos z - \ldots}{\sin z - (\alpha - \sigma)\cos z - \frac{1}{2}\,(\alpha - \sigma)^2 \sin z - \ldots}$$



Die Entwicklung dieses Ausdruckes in eine Reihe nach Potenzen von α und σ bis zu den Gliedern zweiter Ordnung gibt

*) Abendroth, Praxis des Vermessungsingenieurs, S. 211,
Gl. 58 a)... $h = a \operatorname{cotg}\,[z - K a]\,.\left(1 + \frac{H_1 + H_2}{2\,r}\right)$, worin $K = \frac{\rho\,(1-k)}{2\,r} = \frac{Z_1 + Z_2 - 180^0}{2\,a}$
und der Faktor $1 + \frac{H_1 + H_2}{2r}$ die Reduktion auf den Messungshorizont bedeuten.

$$\frac{h}{s} = \operatorname{cotg} z . \Big[1 + \left(\frac{\alpha}{2} - \sigma\right) \operatorname{tang} z - \tfrac{1}{8} (\alpha - 2\sigma)^2 + (\alpha - \sigma) \operatorname{cotg} z +$$
$$+ \tfrac{1}{2} (\alpha - \sigma)^2 + (\alpha - \sigma)^2 \operatorname{cotg}^2 z + \left(\frac{\alpha}{2} - \sigma\right)\left(\alpha - \sigma\right) + \ldots\Big]$$
$$= \operatorname{cotg} z + \left(\frac{\alpha}{2} - \sigma\right) + (\alpha - \sigma) \operatorname{cotg}^2 z + (\tfrac{7}{8}\alpha^2 - 2\alpha\sigma + \sigma^2) \operatorname{cotg} z$$
$$+ (\alpha - \sigma)^2 \operatorname{cotg}^3 z.$$

Setzt man nun $\alpha = \frac{a}{r}$, $\sigma = \frac{k a}{2r}$ und beachtet, daß $s = 2r \sin \frac{\alpha}{2} = 2r\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}\right) = a - \frac{a^3}{24 r^2}$ ist, so erhält man bis zu den G iedern dritter Ordnung genau

$$h = a \operatorname{cotg} z + \frac{(1-k)\, a^2}{2r} + \frac{(2-k)\, a^2}{2r} \operatorname{cotg}^2 z + \left(\frac{5}{6} - k + \frac{k^2}{4}\right) \frac{a^3}{r^2} \operatorname{cotg} z$$
$$+ \frac{(2-k)^2\, a^3}{4 r^2} \operatorname{cotg}^3 z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3)$$

Die ersten zwei Glieder bilden den gebräuchlichen Näherungswert des Höhenunterschiedes. Drückt man nun $a \operatorname{cotg} z$ durch diesen Näherungswert von h aus, nämlich $a \operatorname{cotg} z = h - \frac{(1-k)\, a^2}{2r}$, und führt den so erhaltenen Ausdruck in die Reihe 3) ein, so erhält man unter Vernachlässigung aller Glieder von höherer als der dritten Ordnung

$$h = a \operatorname{cotg} z + \frac{(1-k)\, a^2}{2r} + \left(1 - \frac{k}{2}\right) \frac{h^2}{r} - \left(1 - 3k + 4k^2\right) \frac{a^2 h}{6 r} + \left(1 - k\right) \frac{h^3}{r^2}.$$

Läßt man nun noch in den letzten drei Gliedern den Einfluß der Strahlenbrechung außer acht, indem man $k = o$ setzt*), so entsteht die übliche Formel samt den zur Beurteilung des Genauigkeitsgrades der Formel bei weitem ausreichenden Gliedern zweiter und dritter Ordnung

$$\underline{h = a \operatorname{cotg} z + \frac{(1-k)\, a^2}{2r}} + \frac{h^2}{r} - \frac{a^2 h}{6 r^2} + \frac{h^3}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4)$$

B. Ableitung der Formel 2).

Setzt man $z - \frac{\alpha}{2} + \sigma = y$, so ist im Dreiecke ABC $\sphericalangle A = 90^0 - y$, $\sphericalangle B = y - \frac{\alpha}{2}$ und

$$\frac{h}{s} = \frac{\cos y}{\sin\left(y - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\cos y}{\sin y - \frac{\alpha}{2} \cos y - \frac{\alpha^2}{8} \sin y - \ldots} =$$
$$= \operatorname{cotg} y . \left[1 + \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} y + \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha^2}{4} \operatorname{cotg}^2 y + \ldots\right]$$

Drückt man wieder s und α durch a und r aus, so erhält man bis zur dritten Potenz von a genau die Reihe

*) Man könnte wohl auch für k einen Mittelwert einsetzen, doch kann man davon absehen, da es ja hauptsächlich auf die Größenordnung der betreffenden Glieder ankommt.

$$h = a \operatorname{cotg} y + \frac{a^2}{2r} \operatorname{cotg}^2 y + \frac{a^3}{12 r^2} \operatorname{cotg} y + \frac{a^3}{4 r^2} \operatorname{cotg}^3 y + \ldots\ldots 5),$$

in der schon das erste Glied die gesuchte Näherungsformel darstellt. Um nun auch hier wieder die Fehlerglieder zweiter und dritter Ordnung schätzen zu können, beachten wir, daß das zweite Glied näherungsweise $= \frac{h^2}{2r}$ ist, so daß man in den Gliedern höherer Ordnung $a \operatorname{cotg} y = h - \frac{h^2}{2r}$ setzen darf. Vernachlässigt man die hiebei entstehenden Glieder von der vierten Ordnung ab, so erhält man

$$\underline{h = a \operatorname{cotg} \left[z - \frac{\rho (1-k)}{2r} a\right]} + \frac{h^2}{2r} + \frac{a^2 h}{12 r^2} - \frac{h^3}{4 r^2} \ldots\ldots\ldots\ldots 6)$$

C. Die Genauigkeit der beiden Formeln 1) und 2).

Schon ein flüchtiger Blick auf die Formeln 4) und 6) lehrt, daß die ersten zwei Fehlerglieder in 6) nur halb so groß sind als jene der Formel 4), während das letzte Glied in 6) gar nur ein Viertel des Wertes desselben in 4) besitzt. Da aber das letzte Glied von der höchsten Ordnung ist, so darf man es ganz unbeachtet lassen und kann sagen, der Fehler der Formel 2) ist halb so groß als jener der Formel 1), womit gezeigt ist, daß die zweite Formel genauer ist, als die erste.

Um auch die Größe der Fehler beurteilen zu können, setzen wir

$$r = 6.381\ km\ \ [3{\cdot}80489],\ \ k = 0{\cdot}14$$

und drücken auch h und a in Kilometern, dagegen den Höhenfehler in Millimetern aus.

Der Fehler der Formel 1) wird durch die drei letzten Glieder in 4) dargestellt und ist in den vorausgesetzten Einheiten näherungsweise

$$f_1 = 160\, h^2 - 0{\cdot}004\, a^2 h + 0{\cdot}025\, h^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7)$$

Die beiden Fehlerglieder dritter Ordnung bleiben in allen vorkommenden Fällen weit unter der Fehlergrenze der Messungen, selbst für $a = 20\ km$ und $h = 4\ km$ erreichen diese Glieder nur die Beträge 6·4 bzw. 1·6 *mm*.

Ausschlaggebend ist also allein das Fehlerglied zweiter Ordnung; es besitzt für $h = 2{\cdot}5\ km$ den nicht mehr unbedeutenden Wert $f_1 = 1{\cdot}00\ m$, während der Fehler der Formel 2) diesfalls doch nur $f_2 = 0{\cdot}50\ m$ beträgt. Bei einem Höhenunterschied von $h = 1000\ m$ machen die Fehler nur 0·16 *m* bzw. 0·08 *m* aus und sind bei Höhenunterschieden von einigen hundert Metern völlig bedeutungslos.

Nimmt man mit Jordan den mittleren Fehler des Zenitwinkels $\triangle z = \pm 5''$ und die Unsicherheit des Wertes der Strahlenbrechung zu $\triangle k = \pm \frac{k}{4} = \pm 0{\cdot}035$ an, so betragen die beiden dadurch bedingten mittleren Höhenfehler auf eine Entfernung von $a = 10\ km$ je $\pm 0{\cdot}25\ m$ und im ganzen $\pm 0{\cdot}35\ m$. Denselben Fehler erreicht die Formel 2) für $h = 2010\ m$, die Formel 1) schon bei $h = 1485\ m$.

Zu Gunsten der Formel 1) könnte man etwa die größere Genauigkeit anführen, die man erreicht, indem man den Logarithmus des Gliedes *II* auf 5 Dezimalstellen berechnet, während man in Formel 1) den Winkel δ auf ganze Sekunden abrundet. Dieser Grund ist jedoch hinfällig, wenn man sich die bedeutenden oben angegebenen Fehler des Zenitwinkels und des Refraktionswinkels vor Augen hält. Die mit dem Gliede *II* der Formel 1) erreichte Genauigkeit ist in der Beobachtung nicht begründet und daher irreführend.

D. Der Gebrauch der Formel 2).

Die Formel 2) ist vor allem bequemer zu handhaben als die Formel 1), da sich der Winkel $z—\delta$ leicht bilden läßt. Besonders bei kleinen Entfernungen, wo sich die Berechnung des Gliedes II in der gebräuchlichen Formel nicht mehr lohnt, kann man die Krümmung des Erdsphäroids mühelos berücksichtigen.

Um den gesuchten Höhenunterschied auf Zentimeter genau zu erhalten, hat man die Entfernungen $a > 400\,m$ die Erdkrümmung zu berücksichtigen, will man aber auf Millimeter genau rechnen, so muß man schon von $120\,m$ an die vollständige Formel benützen.

Bei Entfernungen unter dieser Grenze empfiehlt es sich, den Winkel z auf ganze Sekunden ab- und nicht aufzurunden, da hiedurch auch für die kleinsten Entfernungen die Erdkrümmung völlig berücksichtigt erscheint.

Es empfiehlt sich, für jede größere zusammenhängende Höhenmessung den mittleren örtlichen Umständen entsprechend eine Tafel der Verbesserung des Zenitwinkels anzulegen. Eine solche sei hier für $k = 0{\cdot}14$ wiedergegeben. (Tafel 1.)

Setzt man $\delta = \delta_1 \,.\, a$, wobei δ_1 die Verbesserung für $a = 1\,km$ ist, so ist $\delta_1 = \frac{\rho(1-k)}{2r} = 13{\cdot}90''$ [1·14300], also $\delta = 13{\cdot}9'' \,.\, a_{(km)}$. Die Tafel läßt man nach ganzen Sekunden fortschreiten und man entnimmt ihr jene Sekundenzahl, die der gegebenen Entfernung oder deren Logarithmus am besten entspricht. Behufs Herstellung der Tafel berechnet man jene Entfernungen $a = \frac{\delta}{\delta_1}$, für welche δ ganzzahlige Werte annimmt.

$$\text{Für } \delta = 1'' \text{ wird } a_1 = \frac{2r}{\rho(1-k)} = 72{\cdot}0\,m \text{ [1 857].}$$

Will man die vorliegende Tafel 1 auch für andere Werte von k benützen oder Tafeln entwerfen, so braucht man die gegebenen a-Werte nur mit dem Faktor $\frac{0{\cdot}86}{1-k} = f$ multiplizieren oder die Logarithmen derselben um $\log f$ zu vergrößern. Die Tafel 2 enthält daher für die Werte k zwischen 0·00 und 0·30 die Werte $\log f$ nebst a_1 und $\log a_1$ sowie δ_1'' für $a = 1\,km$. Schließlich gibt sie die Tageszeiten zu den einzelnen Werten von k, berechnet nach Jordan unter der Annahme eines halben Tagbogens von 7 Stunden (für einen mittleren Sommertag).

Endlich gibt Täfelchen 3 eine Übersicht der mittleren Beobachtungsfehler. Nach den schon im Abschnitte *C* gegebenen Voraussetzungen ist der mittlere Fehler des Zenitwinkels $\triangle z = \pm 5''$, ferner

$\triangle\delta = \frac{\rho\, k\, a}{8 r} = \pm\, 0{\cdot}56''.\, a$. Mithin ist der Gesamtfehler des Winkels $z - \delta \ldots m = \pm \sqrt{25 + 0{\cdot}31\, a^2}$ und der mittlere Höhenfehler $\triangle\, h = \pm \frac{m\, a}{\rho}$. Setzt man das Gewicht der Beobachtung auf die Entfernung $a = 1\ km$ gleich 10, so ist das Gewicht allgemein $p = \frac{10\, m_1^2}{a^2\, m^2} = \frac{253}{(25 + 0{\cdot}31\, a^2)\, a^2}$.

Läßt man das Gewicht einfach mit dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportional abnehmen, was vielleicht vorzuziehen wäre, um die Beobachtungen auf größere Entfernungen nicht allzusehr zurückzudrängen, erhält man $p' = \frac{10}{a^2}$.

Tafel 1.

Höhenunterschied $h = a \operatorname{cotg}(z - \delta)$; $\log \delta = \log a + 8{\cdot}143$.
$k = 0{\cdot}14$.

a	$\log a$	δ	a	$\log a$	δ	a	$\log a$	δ		a	$\log a$	δ	
Meter		″	Meter		″	Meter		′	″	Meter		′	″
36	1 56	0·5	2088	3·320	29	4176	3 621	0	58	6768	3·831	1	34
72	1·86	1·0	2160	3·335	30	4248	3·629	0	59	6912	3·840	1	36
144	2·16	2	2232	3·349	31	4320	3·636	1	0	7056	3·849	1	38
216	2·34	3	2304	3·363	32	4392	3·643	1	1	7200	3·857	1	40
288	2·46	4	2376	3·376	33	4464	3·650	1	2	7344	3·866	1	42
360	2·56	5	2448	3·389	34	4536	3·657	1	3	7488	3·875	1	44
432	2·64	6	2520	3·402	35	4608	3·664	1	4	7632	3·883	1	46
504	2·70	7	2592	3·414	36	4680	3·671	1	5	7776	3·891	1	48
576	2·76	8	2664	3·426	37	4752	3·677	1	6	7920	3·899	1	50
648	2·81	9	2736	3·438	38	4824	3·684	1	7	8064	3·907	1	52
720	2·86	10	2808	3·449	39	4896	3·690	1	8	8208	3·915	1	54
792	2·90	11	2880	3·460	40	4968	3·697	1	9	8352	3·922	1	56
864	2·94	12	2952	3·471	41	5040	3·703	1	10	8496	3·930	1	58
936	2·97	13	3024	3·481	42	5112	3·709	1	11	8640	3·937	2	0
1008	3·004	14	3096	3·491	43	5184	3·715	1	12	8784	3·944	2	2
1080	3·034	15	3168	3·501	44	5256	3·721	1	13	8928	3·951	2	4
1152	3·062	16	3240	3·511	45	5328	3·727	1	14	9072	3·958	2	6
1224	3·088	17	3312	3·521	46	5400	3·733	1	15	9216	3·965	2	8
1296	3·113	18	3384	3·530	47	5472	3·739	1	16	9360	3·972	2	10
1368	3·136	19	3456	3·539	48	5544	3·744	1	17	9504	3·978	2	12
1440	3·159	20	3528	3·548	49	5616	3·750	1	18	9648	3·985	2	14
1512	3·180	21	3600	3·557	50	5688	3·755	1	19	9792	3·991	2	16
1584	3·200	22	3672	3·565	51	5760	3·761	1	20	9936	3·998	2	18
1656	3·219	23	3744	3·574	52	5904	3·772	1	22	10.080	4·004	2	20
1728	3·238	24	3816	3·582	53	6048	3·782	1	24	10.440	4·019	2	25
1800	3·256	25	3888	3·590	54	6192	3·792	1	26	10.800	4·034	2	30
1872	3·273	26	3960	3·598	55	6336	3·802	1	28	11.520	4·062	2	40
1944	3·289	27	4032	3·606	56	6480	3·812	1	30	12.240	4·088	2	50
2016	3·305	28	4104	3·614	57	6624	3·822	1	32	12.960	4·113	3	0

Tafel 2.

k	δ_1	a_1	$\log a_1$	$f = \frac{0{\cdot}86}{1-k}$	$\log f$	Tageszeit	
	″	Meter					
0·00	16·16	61·9	1·792	0·860	9·934		
0·05	15·35	65·1	1·814	0·905	9·957		
0·10	14·55	68·7	1·837	0·955	9·980	12 h	
0·11	14·39	69·5	1·842	0·966	9·985	10^{00}	14^{00}
0·12	14·22	70·3	1·847	0·977	9·990	9^{00}	15^{00}
0·13	14·06	71·1	1·852	0·989	9·995	8^{20}	15^{40}
0·14	13·90	72·0	1·857	1·000	0·000	7^{40}	16^{20}
0·15	13·74	72·8	1·862	1·012	0·005	7^{00}	17^{00}
0·16	13·58	73·7	1·867	1·024	0·010	6^{30}	17^{30}
0·17	13·42	74·6	1·873	1·042	0·016	6^{00}	18^{00}
0·18	13·26	75·5	1·878	1·050	0·021	5^{40}	18^{20}
0·19	13·09	76·4	1·883	1·062	0·026	5^{20}	18^{40}
0·20	12·93	77·3	1·888	1·075	0·031	5^{00}	19^{00}
0·25	12·13	82·2	1·915	1·147	0·058		
0·30	11·32	87·6	1·943	1·219	0·086		

$$\delta = \frac{\rho\,(1-k)}{2\,r} = \frac{13{\cdot}9''}{f}, \quad a_1 = \frac{2\,r}{\rho\,(1-k)} = 72.f.$$

Tafel 3.

a	m	$\triangle h$	$p = \frac{1}{(\triangle h)^2}$	$p' = \frac{10}{a^2}$.	a	m	$\triangle h$	$p = \frac{1}{(\triangle h)^2}$	$p' = \frac{10}{a^2}$.
km	″	Meter			*km*	″	Meter		
0·2	5·0	0·005	250	250	7	6·4	0·21	0·13	0·20
0·4	5·0	0·010	62	62	8	6·7	0·26	0·09	0·16
0·6	5·0	0·015	28	28	9	7·1	0·31	0·06	0·12
0·8	5·0	0·020	15	15	10	7·5	0·36	0·044	0·10
1·0	5·0	0·024	10	10	12	8·3	0·48	0·025	0·07
2	5·2	0·050	2·3	2·5	15	9·7	0·70	0·012	0·044
3	5·3	0·077	1·0	1·1	20	12·1	1·18	0·004	0·025
4	5·5	0·108	0·5	0·6	30	17·3	2·51	0·001	0·011
5	5·7	0·139	0·3	0·4					
6	6·0	0·174	0·2	0·3					

$$m = \pm \sqrt{25 + 0{\cdot}31\,a^2}\ \text{Sekunden}, \quad \triangle h = \pm \frac{m\,a}{\rho}, \quad p = \frac{253}{(25 + 0{\cdot}31\,a^2)\,a^2}.$$

E. Beispiel.

Es sei $a = 10\,km$, $z = 85^0\,2'\,19''$, $k = 0{\cdot}14$, $r = 6381\,km$ 3·8049].

a) In der strengen Formel $h = a \dfrac{\cos\left[z - \rho\,(1-k)\,\dfrac{a}{2\,r}\right]}{\sin\left[z - \rho\,(2-k)\,\dfrac{a}{2\,r}\right]} = a\ \dfrac{\cos\,[z - \delta_1\,a]}{\sin\,[z - \delta_2\,a]}$

betragen die Abzugsglieder $\delta_1\,a = 13{\cdot}9\,a = 139'' = 2'\,19''$,

$\delta_2\, a = 30 \cdot 0\, a = 300'' = 5'\, 0''$ und der Höhenunterschied zwischen dem Zielpunkt und der Fernrohrkippachse ist

$$h = a \frac{\cos 85^0\, 0'\, 0''}{\sin 84^0\, 57'\, 19''} = \underline{874 \cdot 947\, m}\, [2 \cdot 9419816].$$

b) Die Formel 2) gibt $h = a \operatorname{cotg} 85^0\, 0'\, 0'' = \underline{874 \cdot 887\, m.}$

c) Nach der Formel 1) ist $h = a \operatorname{cotg} 85^0\, 2'\, 19'' + 0 \cdot 06739\, a^2 =$
$= 868 \cdot 096 + 6 \cdot 739 = \underline{874 \cdot 835\, m.}$

Der Fehler des zweiten Ergebnisses nach Formel 2) beträgt also 60 *mm*, jener des dritten nach der gebräuchlichen Formel 1) . . . 112 *mm*.

Auch hier zeigt sich der Fehler der Formel 2) rund halb so groß als der von 1), womit die Zweckmäßigkeit der vorgeschlagenen Formel dargetan ist.

F. Die Gewichtsberechnung der Höhendiagonalen.

Jordan gibt im zweiten Bande seines Handbuches im Abschnitte „Höhenmessung aus einem Zwischenpunkte" eine Tafel: „Mittlere Fehler der trigonometrischen Höhenmessung aus einem Zwischenpunkte" nach der Formel $m = \sqrt{0 \cdot 0005876\, (a_1^2 + a_2^2) + 0 \cdot 000006485\, (a_1^2 - a_2^2)^2}$ Meter, wobei a_1 und a_2 in Kilometern gegeben sind. In dieser Tafel sind nun alle Zahlen ein und derselben Spalte von der obersten bis zu dem in der Diagonale der Tafel stehenden unterstrichenen Wert stets nur wenig voneinander verschieden. Deshalb liegt es nahe, sich in jeder Spalte mit dem unterstrichenen Wert zu begnügen, d. h. die kleinere Entfernung a_2 in der Jordanschen Formel ein für allemal gleich a_1 zu setzen und m als Funktion der größeren Entfernung a_1 allein zu betrachten. Die Formel geht dann über in $m = 0 \cdot 034\, a_1$. Bezeichnet man für $a_1 = 1\, km$ das Gewicht der Höhendiagonale mit 10, so ist allgemein $p' = \frac{10}{a_1^2}$, wenn a_1 die größere der beiden Entfernungen ist (Tafel 3!).

Geometer und Besoldungsregelung.

Von Vermessungsrat Ing. Karl Lego.

Die Besoldungsfrage und die Studienreform nehmen in diesen Tagen für den Geometer eine Bedeutung an, die weit über den Rahmen einer gewöhnlichen Lohn- und Standesfrage hinausgeht und zu einer hochwichtigen, seinen Lebensnerv berührenden Angelegenheit wird; hochwichtig deshalb, weil es sich um das Schicksal und die Zukunft des Geometers auf Jahre hinaus handelt.

Die dem Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen unterstellten Geometer, ein durchwegs homogen aus akademisch vorgebildeten Beamten zusammengesetzter Stand, kämpfen schon seit 20 Jahren für eine ihrer Vorbildung und ihren Leistungen entsprechende Wertung. In fast allen europäischen Staaten sind die hochschulmäßig vorgebildeten Geometer vollwertige Akademiker und auch in den durch die Aufteilung Österreichs gebildeten Nachfolgestaaten haben die Geometer dieses Ziel erreicht. Nur dem österreichischen Mutterlande, von welchem die Bewegung ausgegangen war, blieb noch die Erfüllung dieser Bestrebungen vorbehalten.

In der letzten Nummer der Zeitschrift wurde der von der Regierung aufgestellte Entwurf zur Revision der Reihung mitgeteilt. Der Fünfundzwanzigerausschuß hat ihn zu einem neuen Elaborat umgearbeitet. In diesem wurde den Geometern, zufolge Antrag der Gewerkschaftskommission der Akademiker, die volle Gleichstellung mit den übrigen Hochschulabsolventen ohne irgend einen Unterschied weder in der Besoldungsklasse noch in den Wartefristen zugebilligt. Infolge des immer näher rückenden Zeitpunktes, welcher die letzte Etappe der Besoldungsregelung verwirklichen sollte, wurden die Verhandlungen über die Reihungsrevision mit den über die Besoldungsregelung vereinigt. Die Regierung hatte in den am 23. April dem Fünfundzwanzigerausschuß überreichten Grundzügen zur neuen Besoldungsregelung, die Geometer in die IV. Hauptgruppe „Beamte des höheren Dienstes", und zwar in die Unterabteilung a) gereiht, während die Vollakademiker die Gruppe b) bildeten. In dem vom Fünfundzwanzigerausschuß ausgearbeiteten Abänderungsvorschlag wurden die Unterabteilungen der vier Hauptgruppen zu selbständigen Gruppen aufgelöst, in welchen die Gruppe 8 den Geometern, die Gruppe 9 den Vollakademikern zugewiesen wurde*). Unter Hinweis auf den äußerst kleinen Stand der neu zu bildenden Gruppe, deren Nachwuchs sich nach erfolgter Ausgestaltung des geodätischen Studiums aus vollwertigen Akademikern zusammensetzen wird, wodurch der Geometerstand ohnehin in der Gruppe 9 aufgehen müßte, ersuchten die Vertreter der Geometer um Vereinigung der Gruppen 8 und 9, welchem Wunsch der Fünfundzwanziger-Ausschuß entsprach.

Nunmehr gaben auch die Regierungsvertreter in der Sitzung am 19. Mai die Erklärung ab, daß auch sie mit der Zusammenziehung der Gruppen 8 und 9 zu einer gemeinsamen Akademikergruppe 8 einverstanden sind.

Die kürzere Studiendauer und der frühere Diensteintritt der bisherigen Geometer hätte durch eine Kürzung ihrer anrechenbaren Dienstzeit Ausdruck zu finden, und zwar wären nach dem Vorschlag der Regierung den Geometern hiefür vier Jahre von ihrer „anrechenbaren" Dienstzeit abzuziehen. Mit dieser reduzierten Dienstzeit sind sie als Vollakademiker zu behandeln, wonach sie nach sechs reduzierten Dienstjahren die ehemalige IX., nach zwölf die VIII. und nach achtzehn Dienstjahren die VII. Rangsklasse zu erreichen haben.

Der bei den Verhandlungen errungene kleine Erfolg ist nicht nur von moralischer, sondern auch von praktischer Bedeutung, weil die Geometer nunmehr bei allen Dienst- und Standesfragen, wie Systemisierung, Diäten usw. als Vollakademiker zu behandeln sind.

Unter der vorhin erwähnten „anrechenbaren" Dienstzeit versteht man die Zeit vom Tage des Diensteintrittes vermindert zum zwei Ausbildungsjahre. Diese Zeit wird vermehrt um zweieinhalb Kriegsjahre für diejenigen, welche während der Kriegszeit Staatsangestellte waren, so wie um die auf Grund des

---

*) Die Bundesangestellten werden in vier Kategorien unterschieden: 1. Hoheitsbeamte, 2. Bundesheer und Heeresverwaltung, 3. Wachkörper, 4. Monopole und Bundesbetriebe.

Die Hoheitsbeamten werden in acht Gruppen eingeteilt. Die 5. Gruppe bilden die Kanzleibeamten, zur 6. gehören die Grundkatasterführer. Die 7. Gruppe umfaßt die Maturanten und die 8. die Akademiker. Die Beamten der 5. Gruppe können im Wege des Zeitaufstieges von der XII. bis in die IX. Rangsklasse, die der 6. Gruppe von XII bis VIII, die der 7. von XI bis VIII und die der 8. Gruppe von X bis VII gelangen. Innerhalb jeder Rangs-(Bezugs-)klasse gelangt der Beamte jedes zweite Jahr in eine höhere Gehaltsstufe (Biennien).

Gesetzes vom 7. August 1923, B.-G.-Bl. Nr. 504, für die Vorrückung angerechneten Zeiträume. Den kriegsbeschädigten Bundesangestellten werden, ohne Unterschied ihrer Kriegsdienstleistung, statt der zweieinhalb Kriegsjahre fünf Kriegsjahre in die anrechenbare Dienstzeit einbezogen. Ferner wird ihnen für jedes im Feld zugebrachte Kriegsjahr ein halbes Biennium (Maximum zwei Biennien) in einer für jede Beamtengruppe einheitlich bestimmten Rangsklasse zugerechnet. Für die Akademiker sollen hiefür die Biennien der IX. Rangsklasse gelten, doch sind die Verhandlungen über die Höhe der Rangsklasse noch nicht abgeschlossen.

Ein Vorrücken über die durch das Zeitavancement erreichbare VII. Rangsklasse hinaus ist nur im Wege der freien Beförderung auf systemisierte Posten möglich. Die Systemisierung für die höheren Rangsklassen wird gleichzeitig mit der Überführung in das neue Besoldungssystem erfolgen. In späterer Zeit wird diese Teilsystemisierung durch eine Systemisierung von Stellen in der VIII., IX. u. X. Rangsklasse zu einer vollen Systemisierung ergänzt werden. Die Systemisierung von Posten in den durch das Zeitavancement erreichbaren Rangsklassen hat den Zweck, außer den auf diesem Wege zu besetzenden Stellen noch eine Anzahl für eine raschere Beförderung offen zu halten. Die Verhandlungen über die Systemisierung werden in den nächsten Tagen erfolgen.

Wien, am 17. Juni 1924.

Literaturbericht.

1. Bücherbesprechungen.

Dr. Ing. P. Werkmeister, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Stuttgart und Professor in Eßlingen: Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomographie). Mit 164 Textabbildungen (8), VIII, 194 S.). Berlin, Verlag Julius Springer 1923.

Der in der geodätischen und photogrammetrischen Fachliteratur wohlbekannte Autor tritt hier mit einer Arbeit hervor, mit der er zunächst praktische Ziele verfolgt und dazu beitragen möchte, der graphischen Tafel, dem Nomogramme, einen weiteren Raum im praktischen Rahmen zu sichern; um den Techniker, der mehr oder weniger komplizierte, sich oft wiederholende Rechnungen zu erledigen hat, zu entlasten.

Mit Recht hat der Verfasser auf weitere Behandlung der vielfach auftretenden theoretischen Probleme absichtlich verzichtet, die Entwicklungen elementar gehalten und sich auf die Anwendung von Cartesischen Koordinaten bei seinen Untersuchungen beschränkt.

In drei großen Abschnitten, in welchen die Funktionen mit ein und zwei, drei und mehr als drei Veränderlichen behandelt werden, zeigt der Autor, wie hiefür Tafeln entworfen werden können; es wird in sehr klarer Darstellung der wesentliche Teil dessen geboten, was man wissen muß, um eine graphische Tafel selbständig zu entwerfen.

Es ist pädagogisch und didaktisch von großem Werte, daß die behandelten Beispiele einfachster Art sind und so gewählt wurden, daß besondere fachtechnische Kenntnisse nicht erforderlich sind. Jeder Techniker, gleichgültig ob Geometer, Bau-, Maschinen- oder Elektroingenieur, kann an den geschickt gewählten Beispielen viel lernen; die Nutzanwendung für seine Praxis wird ihm gewiß nicht schwer fallen.

Der Rezensent, der vor Jahren in seinem geodätischen Kolleg die Grundlagen zur Herstellung von Nomogrammen geboten hat und eine Sammlung von geodätischen Nomogrammen von seinen Hörern ausführen ließ, begrüßt die Herausgabe einer gediegenen Anleitung zur Anlage von graphischen Tafeln durch einen Fachkollegen aufs wärmste und freut sich, daß neben gründlichem theoretischen Können in der vorliegenden Arbeit auch das pädagogische Talent des Verfassers zur Geltung kommt.

Möge diese schöne Schrift zur Vereinfachung und Konzentration der Geistesarbeit des Technikers mächtig beitragen und möge sie, da der Verlag für eine tadellose Ausstattung in Papier, Druck und Illustration alles getan hat, viele und dankbare Leser finden!

D.

Bibliotheks-Nr. 650. Dr. A. Witting, Oberstudienrat am Gymnasium zum heil. Kreuz in Dresden: Abgekürzte Rechnung nebst einer Einführung in die Rechnung mit Logarithmen. Mit vier Figuren im Text und zahlreichen Aufgaben (IV, 51).

Bibliotheks-Nr. 651. Dr. A. Witting: Funktionen, Schaubilder und Funktionstafeln. Eine elementare Einführung in die graphische Darstellung und in die Interpolation. Mit 26 Figuren im Text, drei Tafeln und zahlreichen Aufgaben (IV, 41).

Beide Schriften sind als Bändchen Nr. 47 u. 48 in der Sammlung: Mathematisch-physikalische Bibliothek, herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1922.

In den vorstehenden zwei Bändchen der anerkannt guten Mathematisch-physikalischen Bibliothek sind die Erfahrungen eines im mathematischen Unterrichte der Mittelschule mit Erfolg tätigen Lehrers niedergelegt, der schon durch mehrere ausgezeichnete Arbeiten in dieser Sammlung hervorgetreten ist. Mit der Abgekürzten Rechnung wendet sich der Autor an Anfänger; mit den Funktionen, Schaubildern und Funktionstafeln werden geringe Kenntnisse in algebrischer und geometrischer Hinsicht vorausgesetzt, aber unbedingt nötig ist die völlige Vertrautheit mit der abgekürzten Rechnung.

Wir bedauern, daß uns durch den Raummangel die Hände gebunden sind und wir eine eingehende Besprechung dieser drucktechnisch sehr gut ausgestatteten Werkchen, die bestens empfohlen werden, nicht bieten können.

D.

Bibliotheks-Nr. 652. C. Müller, Geheimer Regierungsrat und o. Professor in Bonn: Kalender für Landmessungswesen und Kulturtechnik. 47. Jahrgang für 1924 (Auszug), 112 S., Stuttgart, Verlag K. Wittwer. Geheftet K 29.000.

Die schweren wirtschaftlichen Verhältnisse machten es unmöglich, für das Jahr 1924 einen vollständigen Neudruck des ganzen Kalenders zu veranlassen; es wird daher ein Auszug geboten: der allgemeine Teil des Kalenders, der Schreibkalender und die 18. Mitteilung: „Neues auf dem Gebiete des Landmessungswesens und ihren Grenzgebieten", eine wie in den früheren Jahren sehr fleißige und mühevolle Zusammenstellung aller Neuerungen im Vermessungswesen von September 1922 bis September 1923.

Den Besitzern früherer Jahrgänge des Kalenders ist die Anschaffung des neu gedruckten Kalenderteiles erleichtert und da dieser Teil ohne Schwierigkeit mit dem zweiten Teile eines früheren Jahrganges vereinigt werden kann, so verfügt der Geometer dann über einen kompletten Kalender mit dem sonstigen reichen Inhalte.

Wir können daher den Auszug bestens empfehlen.

D.

Bibliotheks-Nr. 653. H. Blumenberg, vereideter Landmesser und Eisenbahnamtmann: Deutscher Landmesserkalender für das Jahr 1924. Dreiundzwanzigster Jahrgang. Liebenwerda, Verlag von R. Reiß, G. m. b. H. Preis gebunden 2 Goldmark.

In vermessungstechnischen Kreisen Österreichs ist auch der Deutsche Landmesserkalender nicht unbekannt. Gleich nach Übernahme der Redaktion durch den Landmesser Blumenberg wurde der Kalender vorteilhaft verändert; im vorliegenden Jahrgange liegt der Kalender in vollständiger Neubearbeitung ganzer Abschnitte und in bedeutender Erweiterung vor.

In elf Abschnitten werden ein Terminkalender, mathematische Tabellen, mathematische Formeln, Notizen aus der Physik, Maße und Gewichte, amtliche Fehlergrenzen, Landmeßkunde, Kulturtechnik, Drainage, Ingenieurwissenschaften, astronomische Notizen, statistische Angaben, Merktafeln und ein Notizkalender geboten.

So sehen wir den ehemaligen Mühlenhardtschen Kalender durch einen Mann der Praxis für die Praxis dem heutigen Stande entsprechend gründlich umgearbeitet; der Geometer findet in dem Kalender in wohldurchdachter Zusammenstellung alles, was er bei seinen Arbeiten auf dem Felde dringend braucht.

Der Deutsche Landmesserkalender für das Jahr 1924 stellt in seiner Neufassung ein Taschen- und Nachschlagebuch für jeden Vermessungsfachmann dar; er ist vom Verlag tadellos ausgestattet, so daß die Praktiker gern nach diesem vorzüglichen Behelfe greifen werden.

Es sei die Geometerschaft auf diesen modernisierten Kalender ganz besonders aufmerksam gemacht. *D.*

Bibliotheks-Nr. 654. Reichsamt für Landesaufnahme in Berlin: Jahresbericht des Reichsamtes für Landesaufnahme 1921/22. Mit fünf Anlagen (8^0, 74 S.). Verlag des Reichsamtes für Landesaufnahme, Berlin 1923.

Dieser inhaltsreiche Tätigkeitsbericht zerfällt in zwei Teile: 1. In die Berichte der einzelnen Abteilungen des Institutes, und zwar der trigonometrischen, der topographischen, der photogrammetrischen, der kartographischen und der Betriebsabteilung, sowie der Zweigstelle Landesaufnahme Sachsen; er zeigt, daß trotz finanzieller Nöte, trotz beengender Einschränkungen redlich und intensiv gearbeitet wird, den alten Ruf der Landesaufnahme nicht nur zu wahren, sondern ihn zu festigen und der Welt zu zeigen, daß deutsche Arbeits- und Schaffensfreude ungebrochen und unermüdlich am Werke sind, die Fortschritte der Wissenschaft nutzbringend zu verwerten.

2. In den Anhang, der die wissenschaftlichen Arbeiten der Beamten des Reichsamtes bringt. Die verdienstvolle Arbeit des Regierungsrates Thilo: „Untersuchungen von drei Invardrähten im September 1922", weiters die gründliche Studie des Direktors Thamm: „Geologische Betrachtungen über das Gebiet der topographischen Aufnahme bei Lötzen" und der interessante Beitrag zur Aerophotogrammetrie des Vermessungsamtmannes Adam: „Kartenberichtigung schwer zugänglicher Gebiete auf Grund von Lichtbildern", bekunden den wissenschaftlichen Geist, der die maßgebenden Beamten des Reichsamtes erfüllt.

Wenn man in dem Berichte der „Photogrammetrischen Abteilung" liest: „Am Ende des Berichtsjahres erhielt die Abteilung vom Reichsverkehrsministerium die Nachricht, daß die sechs Flugzeuge der zur Abteilung gehörenden Luftbildgruppe nach Weisung des Garantiekomitees der Entente bis zum 5. November d. J. (1922) außer Betrieb zu setzen seien, da sie nicht den von der Entente aufgestellten Begriffsbestimmungen entsprächen," so kann man sich die Schwierigkeiten und Hindernisse vorstellen, die allerorten gemacht werden, um deutsches Streben und Schaffen zu unterbinden.

Doch all diesen Widerwärtigkeiten bietet das Reichsamt für Landesaufnahme mutig die Stirne und geht unentwegt mit Erfolg an die vorgefaßten Pläne. Auf dem XX. Deutschen Geographentage zu Leipzig gab die Ausstellung in einer Auswahl der Hilfsmittel und Erzeugnisse einen Einblick in das Wesen und die Ziele der verschiedenen Arbeitsgebiete des Reichsamtes, die allgemeinen Beifall fanden. Die Fertigstellung der sechs-, sieben- und zehnstelligen Logarithmentafeln mit dezimaler Unterteilung des alten Nonagesimalgrades, die der Welt zum Geschenke gemacht wurden, bedeuten eine Kulturtat, auf die Deutschland mit Recht stolz sein kann.

Das von General Weidner geleitete Reichsamt für Landesaufnahme blickt auf ein arbeitsreiches Jahr mit schönen Erfolgen zurück, seine Beziehungen zu den Landesaufnahmen des Auslandes gestalten sich freundlich und werden der Entwicklung der geodätischen Wissenschaft nur nützlich sein. *D.*

---

2. Zeitschriftenschau.

Allgemeine Vermessungsnachrichten.

Nr. 1. Buhr: Wiederherstellung der Polygonpunkte.

Nr. 2. Buhr: Wiederherstellung der Polygonpunkte (Schluß). — Sitzungsberichte der zweiten Tagung des Beirats f. d. Vermessungswesen am 3. u. 4. Mai 1923 in Kassel (6. Fortsetzung).

Nr. 3. Meineke: Kurze Übersicht über Bedeutung und Inhalt der für Preußen gültigen landwirtschaftlichen Siedlungs- und Rentengutsgesetze und Ausführungsbestimmungen. — Sitzungsberichte der zweiten Tagung des Beirats f. d. Vermessungswesen am 3. u. 4. Mai 1923 in Kassel (7. Fortsetzung und Schluß).

Nr. 4. Abendroth: Der Beirat für das Vermessungswesen. — Mielecke: Eine Untersuchung zur vorläufigen Steuer vom Grundvermögen. — Meineke: Fortsetzung und Schluß vom Artikel in Nr. 3.

Nr. 5. Kneist: Die Grundsteuer in Preußen. — Vorläufige Steuer vom Grundvermögen. — Bestimmung der Absteckungselemente für Straßenbrechungspunkte.

Nr. 6. Koerner: Verwendung von Lichtbildern aus Luftfahrzeugen zu Kartenzwecken. — Meineke: Der Gang des landwirtschaftlichen Siedlungsverfahrens in Preußen. — Michaelis: Zur Landmesserausbildung.

Nr. 7. Brauneis: Stereophotogrammetrie. — Schleussinger: Berechnung der Höhenabschnitte und der Höhe aus den drei Seiten eines Dreieckes. — Meineke: Brennende Steuer- und Bodenfragen. — Müller: Gebührenordnung des Stadtvermessungsamtes Oppeln.

Nr. 8. Brauneis: Stereophotogrammetrie. (1. Fortsetzung). — Lüdemann: Das Kreuzvisier von R. Stützer. — Kohlschütter: Werte der westl. Mißweisung der Magnetnadel für 1924/25.

Nr. 9. Brauneis: Stereophotogrammetrie (2. Fortsetzung). — Schmidt: Die Preisbildung städtischen Baulandes nach dem Kriege. — Ewald: Das Luftbild im Dienst der Forstwirtschaft.

Nr. 10. Dorn: Geländeaufnahmen mit Gefällmesser als Vorarbeit für den Entwurf des Wegenetzes bei ländlichen Umlegungen, Feldbereinigungen usw. — Brauneis: Stereophotogrammetrie (3. Fortsetzung).

Nr. 11. Brauneis: Stereophotogrammetrie (4. Fortsetzung). — Meineke: Neue Bestimmungen über Ödlanderschließung. — Kerl: Arbeitszettel für den Abschluß der Veränderungsnachweisung zur Staatssteuernovelle der Grundvermögenssteuer.

Nr. 12. Lüdemann: Der zweite deutschösterreichische Markscheidertag in Leoben vom 15. bis 17. November 1923. — Zimmermann: Formeln für die Berechnung von Linienschnitten. — Kerl: Erweiterter Geschäftskreis der preußischen Katasterämter. — Brauneis: Stereophotogrammetrie (Schluß).

Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik.

Nr. 1. Fricker: Die geschichtliche Entwicklung der Stadtvermessung Zürich bis zum Jahre 1923 (Fortsetzung).

Nr. 2. Fricker: Die geschichtliche Entwicklung der Stadtvermessung Zürich bis zum Jahre 1923 (Fortsetzung). — Roesgen: Ingénieurs ruraux et géomètres. — Wirtschaftliche Durchführung der Grundbuchvermessung und Güterzusammenlegung. — Ritter: Ein neuer Distanztransporteur. — Fischer: Ein Beitrag zum „Schlottern" der Stehachse von Theodoliten und Nivellierinstrumenten.

Nr. 3. Fricker: Die geschichtliche Entwicklung der Stadtvermessung Zürich bis zum Jahre 1923 (Fortsetzung). — Wirtschaftliche Durchführung der Grunbuchvermessung und Güterzusammenlegung (Schluß). — Hellebrand: Über das vereinigte Einschneiden. — Jahresbericht des Schweizer Geometervereines (in deutscher und französischer Sprache).

Nr. 4. Fricker: Die geschichtliche Entwicklung der Stadtvermessung Zürich bis zum Jahre 1923 (Schluß). — Hauptversammlung des Schweizer Geometervereines und Vortragskurs (deutsch und französisch). — Roesgen: Ingénieurs ruraux et géomètres.

Zeitschrift für Instrumentenkunde.

12. Heft 1923. Cranz: Totalreflektierende Prismen (Schluß).

1. Heft 1924. Löschner: Die Einstellgenauigkeit bei Mollenkopfschen Werkstattwasserwagen. — Bock: Über die Störung der Chronometerunruh durch die Spiralmasse.

2. Heft. Lüdemann: Einige Mitteilungen über die Entwicklung der Beleuchtung von Maßstellen an geodätischen Vermessungsinstrumenten.

3. Heft. Bericht über die Tätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt im Jahre 1923.

Zeitschrift für Vermessungswesen.

Heft 1 u. 2. Schlötzer: Über den räumlichen Rückwärtseinschnitt. — Weyh: Bayerns Gesetz über die Erschließung von Baugelände.

Heft 3 u. 4. Berroth: Der Meridianbogen Großenhain—Pola und die Lotrichtung im preußischen, bayerischen, österreichischen und ungarischen Triangulierungshauptpunkt. — Panther: Vermarkungswesen in Baden.

Heft 5 u. 6. Berroth: Schluß des Artikels aus Heft 3 u. 4. — Schlötzer: Berichtigung zu dem Artikel: Über den räumlichen Rückwärtseinschnitt. — Hillen: Teilbebauungsplan Colditz. — Groll: Die Umlegung I in Köln—Deutz. — Panther: Fortsetzung u. Artikel aus Heft 3 u. 4.

Heft 7 u. 8. Müller: Universitätsprofessor Dr. Joh. Frischauf †. — Hammer: Zwei Sätze von Gauß. — Kohlschütter: Werte der westlichen Mißweisung der Magnetnadel für 1924. — Deubel: Die Benützung der Reste älterer Polygonnetze usw. — Panther: Schluß vom Artikel von Heft 3, 4, 5 u. 6.

Vereins-, Gewerkschafts- und Personalangelegenheiten.

1. Vereinsnachrichten.

Der Bericht über die am 6. April 1924 abgehaltene a. o. Hauptversammlung des österreichischen Geometervereines wird wegen Raummangels in der nächsten Nummer der Zeitschrift erscheinen.

2. Personalien.

Todesfälle: Vermessungsrat Ing. Alois Z o l l n e r des Bezirksvermessungsamtes Kufstein ist am 7. Mai 1924 nach schwerem Leiden im Spital in Innsbruck gestorben. — Hilfsämteroberdirektor Alfons M a y r des Bezirksvermessungsamtes Innsbruck ist am 17. April 1924 nach langem schweren Leiden, Kanzleiadjunkt Josef B e r g h o f e r des Bezirksvermessungsamtes Weiz am 7. April 1924 nach schwerem Leiden gestorben.

Auszeichnung: Der Präsident des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen Ing. Alfred G r o m a n n und Ing. Josef S p e l a k wurden mit Beginn des Studienjahres 1923/24 zu Mitgliedern der Kommission für die Abhaltung der Staatsprüfung am Kurse zur Heranbildung von Vermessungsgeometern an der Techn. Hochschule in Wien ernannt.

Pensionierung: Obervermessungsrat Johann S c h r i m p f, Amtsleiter des Katastralmappenarchives in Wien, wurde mit 1. Mai 1924 in den dauernden Ruhestand versetzt.

Versetzungen: Obervermessungsrat Ing. Johann Č e m u s vom Bundesamte für Eich- und Vermessungswesen zur Agraroberbehörde in Wien, Vermessungsrat Ing. Viktor K l a r, Leiter des Bezirksvermessungsamtes in Wien zum Amtsleiter des Katastralmappenarchives Wien, Vermessungsrat Ing. Franz S i m o n e k, Amtsleiter des Bezirksvermessungsamtes St. Pölten, zum Leiter des Bezirksvermessungsamtes Wien.

Titelverleihungen: Der Bundespräsident hat mit Entschließung vom 31. Mai d. J. dem Hofrat Ing. Franz W i n t e r die 18. Besoldungsgrupppe,

und mit Entschließung vom 23. Mai d. J. dem Obervermessungsrate Ing. Johann S c h r i m p f anläßlich seiner Versetzung in den dauernden Ruhestaud den Titel eines Hofrates verliehen;

weiters hat der Bundespräsident mit Entschließung vom 31. März 1924 verliehen:

den Titel eines Hofrates mit Nachsicht der Taxe dem Obervermessungsrate Ing. Artur S t a r e k;

den Titel eines Obervermessungsrates den Vermessungsräten, Ing. Gottlob J e l e n und Ing. Oskar S u c h a n e k;

den Titel eines Vermessungsrates den Vermessungsoberkommissären Ing. Alfred H e r z, Ing. Heinrich A m e r s d o r f e r, Ing. Jaroslaus D o l e s c h e l, Ing. Bruno O l e n s k y, Ing. Karl K l a f f e n b ö c k, Ing. Alfred L e i x n e r und Ing. Emil W a n i e k, sämtlichen mit Nachsicht der Taxe;

den Titel eines Vermessungsassistenten den Vermessungspraktikanten Erich J a n i k, August W i m m e r, Eduard E s s e r, Robert T i l g n e r, Josef P a s c h i n g, Friedrich S c h i f f m a n n, Friedrich Z a j i c e k;

den Titel eines Regierungsrates dem Rechnungsdirektor Franz S t o u r z h;

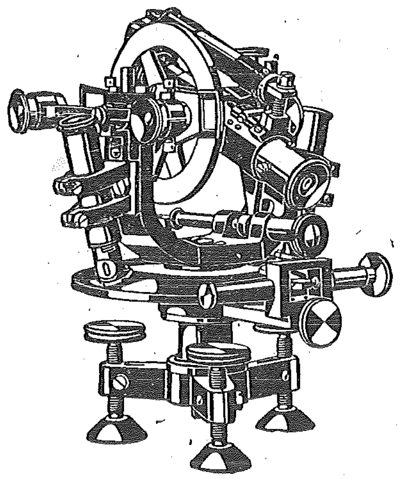
den Titel eines Hilfsämteroberdirektors den Hilfsämterdirektoren Franz Josef Z a i l l e n t h a l l, Alfons M a y r, Ignaz F u ß, Rudolf H i n t e r m a y r, Johann D i e m, Johann W e i ß, Karl M a n n und Franz T h e w a n g e r;

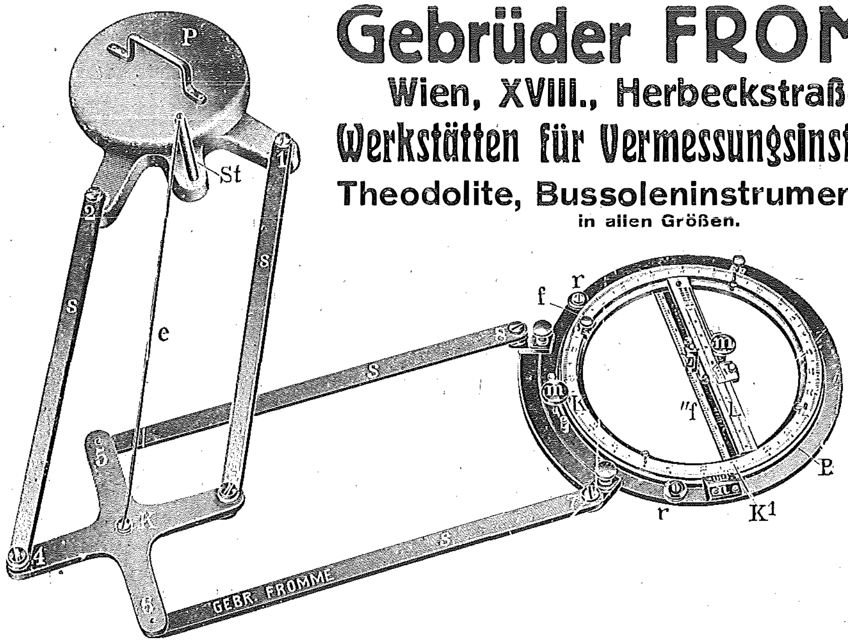
den Titel eines Hilfsämterdirektors den Kanzleiadjunkten Julius A m b r o s, Johann S a m m e t, Ferdinand B r e n n e i s, Josef K u c z e r a, Ernst S t r a s s e r n, Viktor S a l z e r, Leopold D e n k, Josef H ä m i n g e r, Georg A i c h e r;

den Titel eines Kanzleiadjunkten den Kanzleioffizialen Franz W i t t e k, Franz L e b e d a, Christian B i e d e r m a n n, Adolf K a r l, Robert B i x n e r, Alfred T r o s t, Friedrich S i e g l;

den Titel eines Kanzlisten den Bundesbeamten Alois M a r c h e t t i, Alois F a l l, Michael M i l d s c h u h und Johann D o u j a k.

Eigentum und Verlag des Vereines. — Verantwortlicher Redakteur: **Franz Schönstein**, Wien, XII. Aichholzgasse 11 a.
Druck von Rudolf M. Rohrer in Baden.




GEBR. FROMME

Eigentum und Verlag des Vereines. — Verantwortlicher Redakteur: Franz Schönstein, Wien, XII., Aichholzgasse 11 a.