

Österreichische Zeitschrift
für
Vermessungswesen
und
Photogrammetrie

SCHRIFTFLEITUNG:

W. Hofrat i. R. Dipl.-Ing. Dr. techn.

Josef Mitter

Vorstand i. R. der Abteilung Erdmessung des
Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen
a. o. Univ.-Professor an der Techn. Universität Wien

Dipl.-Ing. Dr. techn.

Hans Schmid

o. Univ.-Professor
an der Techn. Universität Wien

Dr. phil.

Wolfgang Pillewizer

o. Univ.-Professor
an der Techn. Universität Wien

Dipl.-Ing. Dr. techn.

Helmut Moritz

o. Univ.-Professor
an der Techn. Universität Graz

Nr. 2

März 1977

64. Jg.

INHALT:

Abhandlungen:

- Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate Erhart Ecker
Zur Azimutmessung mit Sekundentheodolithen . . . Gottfried Gerstbach
Eine Bedingungsgleichung für eine Diagonale über
mehrere Dreiecke eines Streckennetzes K. R. Neumayr

Mitteilungen, Buchbesprechung, englisches Inhaltsverzeichnis

Mitteilungsblatt zur „Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen und Photo-
grammetrie“, redigiert von Dipl.-Ing. Erhard Erker



Herausgegeben vom

**ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN
UND PHOTOGRAMMETRIE**

Offizielles Organ

der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung

Baden bei Wien 1977

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Für die Schriftleitung der Zeitschrift bestimmte Zuschriften und Manuskripte sind an eines der nachstehenden Mitglieder zu richten:

Schriftleiter:

- a. o. Univ.-Professor *W. Hofrat i. R. Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter*, A 1040 Wien IV, Techn. Universität, Gußhausstraße 27 – 29
- o. Univ.-Prof. *Dipl.-Ing. Dr. techn. Hans Schmid*, A 1040 Wien IV, Techn. Universität
- o. Univ.-Prof. *Dipl.-Ing. Dr. techn. Helmut Moritz*, A 8020 Graz, Techn. Universität, Rechbauerstraße 12
- o. Univ.-Prof. *Dr. phil. Wolfgang Pillewizer*, A 1040 Wien IV, Techn. Universität

Für die Schriftleitung des Mitteilungsblattes und Annoncenteeiles bestimmte Zuschriften sind an *Dipl.-Ing. Friedrich Blaschitz*, A 1082 Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3, zu senden.

Die Manuskripte sind in lesbarer, druckreifer Ausfertigung, die Abbildungen auf eigenen Blättern als Reinzeichnungen in schwarzer Tusche und in möglichst großem, zur photographischen Verkleinerung geeignetem Maßstab vorzulegen. Von Photographien werden Hochglanzkopien erbeten. Es wird gebeten, jeder Arbeit eine Zusammenfassung in Englisch und eine Übersetzung des Titels in Englisch beizufügen. Ist eine Rücksendung der Manuskripte nach der Drucklegung erwünscht, so ist dies ausdrücklich zu bemerken. Bei Vorlage von Rasterklischees: Umschlag 42er Raster, Text 54er Raster.

Die Zeitschrift erscheint viermal pro Jahrgang in zwangloser Folge.

Auflage: 1170 Stück

Bezugsbedingungen: pro Jahrgang

Mitgliedsbeitrag für den Österr. Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie S 250,— Postscheckkonto Nr. 1190.933

Abonnementgebühr für das Inland S 270,—
Abonnementgebühr für das Ausland S 350,—

Einzelheft ... S 70,— Inland bzw. ö.S 90,— Ausland

Alle Preise enthalten die Versandkosten, die für das Inland auch 8% MWSt.

Anzeigenpreis pro $\frac{1}{1}$ Seite 125 × 205 mm S 2200,— einschl. Anzeigensteuer
Anzeigenpreis pro $\frac{1}{2}$ Seite 125 × 100 mm S 1320,— einschl. Anzeigensteuer
Anzeigenpreis pro $\frac{1}{4}$ Seite 125 × 50 mm S 748,— einschl. Anzeigensteuer
Anzeigenpreis pro $\frac{1}{8}$ Seite 125 × 25 mm S 594,— einschl. Anzeigensteuer
Prospektbeilagen bis 4 Seiten S 1320,— einschl. Anzeigensteuer
zusätzlich 18% MWSt.

Postscheckkonto Nr. 1190.933

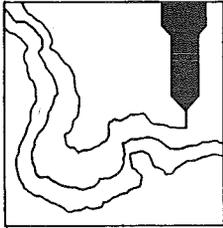
Telephon: (0 22 2) 57 56 55 Kl. 32 95

Zur Beachtung: Die Jahresabonnements laufen mit dem Kalenderjahr und gelten, wie im Pressewesen allgemein üblich, automatisch um ein Jahr verlängert, sofern nicht bis zum 31. 12. des laufenden Jahres die Kündigung erfolgt.

Gefördert durch das Bundesministerium für Wissenschaft und Forschung in Wien

SSPO

SCHWEIZERISCHE SCHULE FÜR PHOTOGRAMMETRIE-OPERATEURE



Nächster Operateurkurs: 5. September 1977 bis 23. März 1978

Sprachen: deutsch, französisch, englisch, spanisch

Anmeldungen: bis 30. Juni 1977

Verlangen Sie Prospekte und Anmeldeformulare bei der Schweizerischen Schule für Photogrammetrie-Operateure

Rosenbergstraße 16
CH-9000 ST. GALLEN

Österreichischer Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Friedrich-Schmidt-Platz 3, 1082 Wien

OEEPE, Sonderveröffentlichungen

Nr. 1: Rinner, *Analytisch-photogrammetrische Triangulation eines Teststreifens der OEEPE*, 31 Seiten, 1962. Preis S 42,—.

Nr. 2: Neumaier und Kasper, *Untersuchungen zur Aerotriangulation von Überweitwinkelaufnahmen*, 4 Seiten, 2 Seiten Abbildungen, 1965. Preis S 10,—.

Nr. 3: Stickler und Waldhäusl, *Interpretation der vorläufigen Ergebnisse der Versuche der Kommission C der OEEPE aus der Sicht des Zentrums Wien*, 4 Seiten, 8 Tabellen, 1967. Preis S 20,—.

Alte Jahrgänge der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen liegen in der Bibliothek des Österreichischen Vereines für Vermessungswesen und Photogrammetrie auf und können beim Österreichischen Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie bestellt werden.

Unkomplette Jahrgänge:

à 20,— S; Ausland 4,— sfr bzw. DM u. Porto

Jg. 1 bis 5 1903 bis 1907
7 bis 12 1909 bis 1914
17 1919
19 1921

Komplette Jahrgänge:

à 40,— S; Ausland 8,— sfr bzw. DM u. Porto

Jg. 6 1908
13 bis 16 1915 bis 1918
18 1920
20 bis 35 1922 bis 1937
36 bis 39 1948 bis 1951

à 72,— S; Ausland 15,— sfr bzw. DM u. Porto

Jg. 40 bis 49 1952 bis 1961

à 100,— S; Ausland 20,— sfr bzw. DM u. Porto

Jg. 50 bis 53 1962 bis 1965

à 130,— S; Ausland 28,— sfr bzw. DM u. Porto

Jg. 54 bis 59 1966 bis 1971

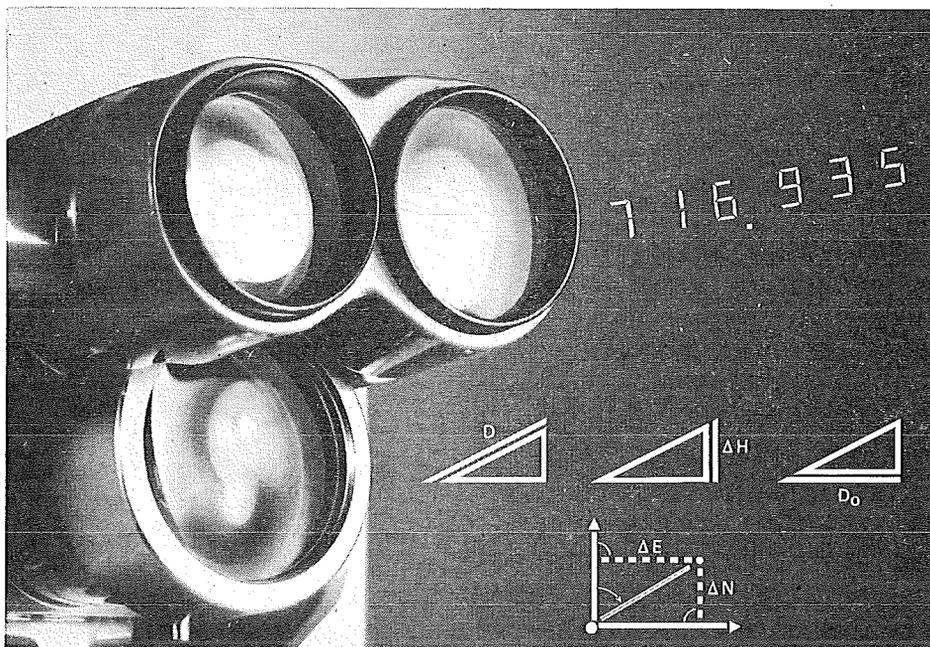
à 160,— S; Ausland 210,— S oder 30,— DM bzw. 35,— sfr u. Porto

Jg. 60 und 61 1972 und 1973

à 210,— S; Ausland 270,— S oder 39,— DM bzw. 44,— sfr. incl. Porto

Jg. 62 und 63 1974 und 1975

Mehr Reichweite. Mehr Funktionen. Mehr Möglichkeiten.



Der Distomat DI3S.

Mit dem Einprismen-Reflektor mißt man bis 1000 m, mit 3 Prismen 1600 m und mit 9 Prismen 2000 m, und dies vollautomatisch. Die Standardabweichung σ jeder Messung wird angezeigt – das gibt dem Beobachter Sicherheit. Neben der Schrägdistanz liefert der DI3S Horizontalabstand, Höhendifferenz und sogar Koordinatenunterschiede auf Tastendruck. Beim Schalten auf Wiederholungsmessung erscheint automatisch alle 3 s die Schrägdistanz, besonders vorteilhaft für Absteckungsarbeiten.

Ablesung und Winkeingabe sind denkbar einfach: 10er-Tastatur und Anzeige sind auf dem Meßstell bedienungsfreundlich angeordnet. Dank Baukastenprinzip paßt der DI3S wie seine Vorgänger auf die Wild-Theodolite T1, T16 und T2. Bei den neuen T1/T16-Modellen ist das Fernrohr mit aufgesetztem Zielkopf durchschlagbar. Verlangen Sie den ausführlichen Prospekt (G1 329) – oder, noch besser, lassen Sie sich dieses neue System doch einmal zeigen.

Wild Heerbrugg AG
CH-9435 Heerbrugg/Schweiz

WILD
HEERBRUGG

• G 47-78

r-a-r-o-s-t

A-1151 WIEN • MÄRZSTR. 7 • TELEX: 1-3731 • TEL. 0222/82 32 31

Österreichische Staatskartenwerke

Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen

A-1080 Wien, Krotenthallergasse 3 Tel. 42 75 46

Österreichische Karte 1:50 000 mit Wegmarkierung (Wanderkarte)	35,—
Österreichische Karte 1:50 000 mit Straßenaufdruck oder ohne Straßenaufdruck	30,—
Österreichische Karte 1:200 000 mit Straßenaufdruck oder ohne Straßenaufdruck	32,—
Generalkarte von Mitteleuropa 1:200 000	
Blätter mit Straßenaufdruck (nur für das österr. Staatsgebiet vorgesehen)	22,—
Gebiets- und Sonderkarten	
Übersichtskarte von Österreich 1:500 000, mit Namensverzeichnis, gefaltet	85,—
Übersichtskarte von Österreich 1:500 000, ohne Namensverzeichnis, flach	56,—
Namensverzeichnis allein	25,—
Übersichtskarte von Österreich 1:500 000, Politische Ausgabe mit Namensverzeichnis, gefaltet	85,—
Übersichtskarte von Österreich 1:500 000, Politische Ausgabe ohne Namensverzeichnis, flach	56,—
Kulturgüterschutzkarten:	
Österreichische Karte 1:50 000 je Kartenblatt	S 100,—
Burgenland 1:200 000	S 130,—
Katalog über Planungsunterlagen	S 200,—
Einzelblatt	S 10,—

Neuerscheinungen

Österreichische Karte 1:25 000 (Vergrößerung d. Österr. Karte 1:50 000) ÖK 25 V mit Wegmarkierungen	S 40,—
Blatt 52, 53, 54, 59, 63, 64, 65, 66, 70, 94, 98, 99, 100, 112, 116, 161, 164	
Österreichische Karte 1:100 000 (Vergrößerung d. Österr. Karte 1:200 000) ÖK 100 V, Blatt 47/12	S 40,—
Österreichische Luftbildkarte 1:10 000, Übersicht	S 100,—

Österreichische Karte 1:50 000

66 Gmunden	161 Knittelfeld	203 Maria Saal
94 Hallein	176 Mühlbach	204 Völkermarkt
115 Reutte	202 Klagenfurt	

Österreichische Karte 1:200 000:

Blatt 47/12 Bruneck Blatt 47/15 Graz Blatt 47/15 Graz u. orohydr. Ausgabe
Blatt 49/16 Brunn

Umgebungs- und Sonderkarten:

Hochschwab 1:50 000	Hohe Wand und Umgebung 1:50 000
Hohe Tauern 1:50 000	Gesäuse 1:50 000

In letzter Zeit berichtigte Ausgaben der Österreichischen Karte 1:50 000

39 Tulln	100 Hieflau	127 Schladming
57 Neulengbach	102 Aflenz Kurort	164 Graz
59 Wien	104 Müzzuschlag	189 Deutschlandsberg
71 Ybbsitz	112 Bezaun	

Österreichischer Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Friedrich-Schmidt-Platz 3, 1082 Wien

Sonderhefte zur Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie

- Sonderheft 1: *Festschrift Eduard Doležal. Zum 70. Geburtstag.* 198 Seiten, Neuauflage, 1948, Preis S 18,—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 2: Lego (Herausgeber), *Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme.* 40 Seiten, 1935. Preis S 24,—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 3: Ledersteger, *Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid.* 140 Seiten, 1948. Preis S 25,—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 4: Zaar, *Zweimedienphotogrammetrie.* 40 Seiten, 1948. Preis S 18,—.
- Sonderheft 5: Rinner, *Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie.* 45 Seiten, 1948. Preis S 18,—.
- Sonderheft 6: Hauer, *Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene.* 31 Seiten. 1949. (Vergriffen.)
- Sonderh. 7/8: Ledersteger, *Numerische Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung. Zur Analyse der Laplace'schen Widersprüche.* 59+22 Seiten, 1949. Preis S 25,—. (Vergriffen)
- Sonderheft 9: *Die Entwicklung und Organisation des Vermessungswesens in Österreich.* 56 Seiten, 1949. Preis S 22,—.
- Sonderheft 11: Mader, *Das Newton'sche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung.* 74 Seiten, 1951. Preis S 25,—.
- Sonderheft 12: Ledersteger, *Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen.* 140 Seiten, 1951. Preis S 35,—.
- Sonderheft 13: Hubeny, *Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoides.* 208 Seiten, 1953. (vergriffen)
- Sonderheft 14: *Festschrift Eduard Doležal. Zum 90. Geburtstag.* 764 Seiten und viele Abbildungen. 1952. Preis S 120,—.
- Sonderheft 15: Mader, *Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern.* 26 Seiten und 12 Tabellen. 1954. Preis S 28,—.
- Sonderheft 16: *Theodor Scheimpflug — Festschrift.* Zum 150jährigen Bestand des staatlichen Vermessungswesens in Österreich. 90 Seiten mit 46 Abbildungen und XIV Tafeln. Preis S 60,—.
- Sonderheft 17: Ulbrich, *Geodätische Deformationsmessungen an österreichischen Staumauern und Großbauwerken.* 72 Seiten mit 30 Abbildungen und einer Luftkarten-Beilage. Preis S 48,—.
- Sonderheft 18: Brandstätter, *Exakte Schichtlinien und topographische Geländedarstellung.* 94 Seiten mit 49 Abb. und Karten und 2 Kartenbeilagen, 1957. Preis S 80,— (DM 14,—).
- Sonderheft 19: *Vorträge aus Anlaß der 150-Jahr-Feier des staatlichen Vermessungswesens in Österreich, 4. bis 9. Juni 1956.*
- Teil 1: *Über das staatliche Vermessungswesen,* 24 Seiten, 1957. Preis S 28,—.
- Teil 2: *Über Höhere Geodäsie,* 28 Seiten, 1957. Preis S 34,—.
- Teil 3: *Vermessungsarbeiten anderer Behörden,* 22 Seiten, 1957. Preis S 28,—.
- Teil 4: *Der Sachverständige — Das k. u. k. Militärgeographische Institut.* 18 Seiten, 1958. Preis S 20,—.
- Teil 5: *Über besondere photogrammetrische Arbeiten.* 38 Seiten, 1958. Preis S 40,—.
- Teil 6: *Markscheidewesen und Probleme der Angewandten Geodäsie.* 42 Seiten, 1958. Preis S 42,—.

ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN UND PHOTOGRAMMETRIE

Herausgegeben vom

Österreichischen Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Offizielles Organ

der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung

SCHRIFTL EITUNG:

a. o. Univ.-Prof. W. Hofrat i. R. Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Hans Schmid

o. Univ.-Prof. Dr. phil. Wolfgang Pillewizer

o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Helmut Moritz

Nr. 2

Baden bei Wien, März 1977

64. Jg.

Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate

Von Erhart Ecker, Berlin

Summary

In this paper several methods of least-squares adjustment in Hilbert spaces, well-known from Krarup's "foundation", are derived from the condition that $\varphi(x, v, k) = \langle Kx, x \rangle_1 + \langle Pv, v \rangle_2 - \langle Ax - v - l, -k \rangle_2$ has a minimum, where $(H_i, \langle \cdot \rangle_i), i = 1, 2$ are Hilbert spaces over \mathbf{R} , $A \in L(H_1, H_2)$ is the linear model, l is the measurement, and where K, P are nonnegative self-adjoint operators on H_1, H_2 , expressing the metric properties of the unknowns $x \in H_1$, and of the residuals $v \in H_2$, respectively. As an illustration an example is given: interpolating potentials in gravity anomalies.

1. Einleitung

Die verschiedenen Aufgaben der Geodäsie verlangen nach einer möglichst universell verwendbaren Ausgleichungsmethode. Um das im folgenden behandelte Ausgleichungsproblem formulieren zu können, rekapitulieren wir zuvor einige Begriffe.

Sind $(H_i, \langle \cdot \rangle_i), i = 1, 2$ Hilberträume über \mathbf{R} , so bezeichnen wir mit $L(H_1, H_2)$ den Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen von H_1 nach H_2 , der, versehen mit der Operatornorm, ein Banachraum ist. Insbesondere ist $L(H_1, H_1) =: L(H_1)$ mit der Komposition als multiplikative Verknüpfung eine Banachalgebra. Für $A \in L(H_1, H_2)$ bezeichnen wir mit $N(A) := \{x \in H_1: Ax = 0\}$ den Nullraum von A , mit $R(A) := A(H_1) \subset H_2$ den Bildraum von A . Zu $A \in L(H_1, H_2)$ existiert genau eine Abbildung $B \in L(H_2, H_1)$, sodaß für alle $x \in H_1$ und alle $y \in H_2$ $\langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, By \rangle_1$ gilt; dieses zu A eindeutig bestimmte B heißt „die zu A adjungierte Abbildung“, sie wird mit A^T bezeichnet. Ist $K \in L(H_1)$ und $K = K^T$, so heißt K selbstadjungiert.

Die Menge der selbstadjungierten Operatoren aus $L(H_1)$ bezeichnen wir mit $S(H_1)$. $S(H_1)$ ist ein Unterraum von $L(H_1)$; für $K \in S(H_1)$ schreiben wir $K \geq 0$, wenn für alle $x \in H_1$ $\langle Kx, x \rangle_1 \geq 0$ gilt. Für $0 \leq K \in S(H_1)$ ist durch $\langle \cdot \rangle_1, \kappa$:

$H_1 \times H_1 \rightarrow \mathbf{R}, (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle_{1,K} := \langle Kx, y \rangle_1$ eine symmetrische, positiv semidefinite Bilinearform gegeben. Daher gilt die Cauchy/Schwarzsche Ungleichung $|\langle x, y \rangle_{1,K}| \leq \|x\|_{1,K} \|y\|_{1,K}$, wobei $\|\cdot\|_{1,K}$ die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,K}$ induzierte Halbnorm ist, also $\|x\|_{1,K} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{1,K}}$. Daraus folgt insbesondere für $0 \leq K \in S(H_1)$ aus $\langle Kx, x \rangle_1 = 0$, daß $Kx = 0$, also $x \in N(K)$ ist. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,K}$ wird also ein Skalarprodukt für H_1 genau dann, wenn K injektiv ist. Ist H_1 endlichdimensional, so bedeutet $0 \leq K \in S(H_1)$, daß die bezüglich einer Orthonormalbasis zugeordnete Matrix wegen $K \in S(H_1)$ symmetrisch und wegen $0 \leq K$ positiv semidefinit ist; und die Injektivität besagt dann schon die Bijektivität, d. h. für die zugeordnete Matrix sowohl die positive Definitheit, wie auch die Regularität.

Wir können nun das Problem formulieren: gegeben seien \mathbf{R} -Hilberträume $(H_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_i), i = 1, 2, A \in L(H_1, H_2), 0 \leq K \in S(H_1), 0 \leq P \in S(H_2)$ und $l \in H_2$; gesucht sind Lösungen $(x, v) \in H_1 \times H_2$ der Gleichung $Ax = l + v$ unter der Forderung $\|x\|_{1,K}^2 + \|v\|_{2,P}^2 = \text{Minimum}$.

Dem liegt folgende Vorstellung zugrunde: H_1 stellt den Raum der Unbekannten, H_2 den der Messungen und A das lineare (oder linearisierte) Modell dar. Für eine bestimmte Realisierung der Modellparameter $x \in H_1$ läge für $Ax = : y$ eine Messung l vor; ist dabei l fehlerhaft, so verbessern wir l um v zu $y = l + v$, andernfalls identifizieren wir l mit y , wobei dann natürlich $y = l \in R(A)$ sein muß. $0 \leq K \in S(H_1)$ und $0 \leq P \in S(H_2)$ sei so gewählt, daß die (Halb-)Normen $\|\cdot\|_{1,K}$ bzw. $\|\cdot\|_{2,P}$ die metrischen Verhältnisse der Unbekannten bzw. Messungen widerspiegeln.

In 2.1 behandeln wir den Fall der fehlerfreien Messung, setzen also $l = y, v = 0, P = 0$, wodurch sich die Minimumforderung auf $\|x\|_{1,K} = \text{Minimum}$ reduziert. Diesen Fall bezeichnen wir als Interpolation.

In 2.2 behandeln wir den Fall $K = 0, P \neq 0$, wodurch sich die Forderung auf $\|v\|_{2,P} = \text{Minimum}$ reduziert; diesen Fall bezeichnen wir als vermittelnden Ausgleich. Ist z. B. $l \in R(A)$, so $Ax = l + v$ mit $v = 0$ lösbar; ist also A nicht injektiv, so wird x durch die Forderung $\|v\|_{2,P} = \text{Minimum}$ nicht bestimmt. In 2.3 modifizieren wir deshalb 2.2, so daß auch x eindeutig bestimmt wird. In 2.4 behandeln wir den Fall $K \neq 0, P \neq 0$, den wir als Interpolation in fehlerhafte Messungen bezeichnen.

Wir werden sehen, daß sich alle vier Fälle aus denselben notwendigen Bedingungen für ein Minimum der Lagrangefunktion herauspezialisieren, wobei wir kaum über den vom vermittelnden Ausgleich her bekannten Formelapparat hinauskommen. Unser Zugang ist also merktechnisch sehr ökonomisch. In 3.1 bis 3.4 werden zur Theorie von 2.1 bis 2.4 entsprechende Beispiele gegeben, um die trockene Theorie etwas mit Leben zu erfüllen. Wir behandeln hier ein Beispiel aus der Erdmessung, obwohl man ebensogut die Ausgleichung eines Streckennetzes oder die Kalibrierung einer photogrammetrischen Meßkammer hätte zugrundelegen können.

2.0 Interpolation in fehlerhafte Messungen

Problem: Gegeben seien \mathbf{R} -Hilberträume $(H_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_i), i = 1, 2, 0 \leq K \in S(H_1), 0 \leq P \in S(H_2), A \in L(H_1, H_2)$ und $l \in H_2$.

Gesucht sind Lösungen $(x, v) \in H_1 \times H_2$ der Gleichung $Ax = l + v$ unter der Forderung $\|x\|_{1,K}^2 + \|v\|_{2,P}^2 = \text{Minimum}$ (1)

Wir gehen so vor, daß wir erst notwendige Bedingungen suchen, dann auf die verschiedenen Fälle spezialisieren und dann Eindeutigkeitsaussagen für die Lösung durch Einführung zusätzlicher Voraussetzungen anstreben.

Notwendige Bedingungen: Sei $\varphi: H_1 \times H_2 \times H_2 \rightarrow \mathbf{R}$ die durch

$$\begin{aligned} (x, v, k) \rightarrow \varphi(x, v, k) &= \frac{1}{2} \|x\|_{1, K^2} + \frac{1}{2} \|v\|_{2, P^2} - \langle Ax - v - I, k \rangle_2 \quad \dots (2) \\ &= \frac{1}{2} \langle Kx, x \rangle_1 + \frac{1}{2} \langle Pv, v \rangle_2 - \langle Ax - v - I, k \rangle_2 \end{aligned}$$

definierte Funktion. Da P, A, K und die Skalarprodukte stetig sind, ist φ stetig. φ ist stetig differenzierbar (Dieudonné, S. 174), wenn φ bezüglich jeder Variablen partiell stetig differenzierbar ist. Nun ist, wenn D_i die partielle Ableitung nach der i -ten Variablen kennzeichnet, unmittelbar zu sehen, daß

$$(D_1\varphi)(x, v, k) = \langle \cdot, Kx - A^T k \rangle_1 \in H_1' \quad \dots (3.1)$$

$$(D_2\varphi)(x, v, k) = \langle \cdot, Pv + k \rangle_2 \in H_2' \quad \dots (3.2)$$

$$(D_3\varphi)(x, v, k) = -\langle \cdot, Ax - v - I \rangle_2 \in H_2' \quad \dots (3.3)$$

die partiellen Ableitungen von φ an der Stelle $(x, v, k) \in H_1 \times H_2 \times H_2$ sind. Denn es ist für den Zuschlag $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$

$$\varphi(x + h_1, v, k) - \varphi(x, v, k) - (D_1\varphi)(x, v, k)(h_1) = \dots = \frac{1}{3} \langle Kh_1, h_1 \rangle_1,$$

$$\varphi(x, v + h_2, k) - \varphi(x, v, k) - (D_2\varphi)(x, v, k)(h_2) = \dots = \frac{1}{2} \langle Ph_2, h_2 \rangle_2,$$

$$\varphi(x, v, k + h_2) - \varphi(x, v, k) - (D_3\varphi)(x, v, k)(h_2) = \dots = 0,$$

woraus wegen

$$|\varphi(x + h_1, v, k) - \varphi(x, v, k) - (D_1\varphi)(x, v, k)(h_1)| \leq \frac{1}{2} \|K\| \|h_1\|_1^2,$$

$$|\varphi(x, v + h_2, k) - \varphi(x, v, k) - (D_2\varphi)(x, v, k)(h_2)| \leq \frac{1}{2} \|P\| \|h_2\|_2^2,$$

$$|\varphi(x, v, k + h_2) - \varphi(x, v, k) - (D_3\varphi)(x, v, k)(h_2)| = 0$$

die partielle Differenzierbarkeit an der Stelle (x, v, k) und die Richtigkeit der oben vorgegebenen Ableitungen ersichtlich ist. Gleichzeitig sieht man aus (3), daß $D_1\varphi, D_2\varphi, D_3\varphi$ auf $H_1 \times H_2 \times H_2$ stetig ist, φ also stetig differenzierbar ist.

Hat die stetig differenzierbare Abbildung $\varphi: H_1 \times H_2 \times H_2 \rightarrow \mathbf{R}$ an der Stelle (x, v, k) ein Minimum, so muß $\varphi'(x, v, k) = 0$ sein, oder gleichbedeutend, $(D_j\varphi)(x, v, k) = 0$ für $j = 1, 2, 3$, und dies liefert uns die notwendigen Bedingungen

$$Kx = A^T k, \quad \dots (4.1)$$

$$Pv = -k, \quad \dots (4.2)$$

$$Ax = I + v. \quad \dots (4.3)$$

2.1 Interpolation in fehlerfreie Messungen

Wir gehen jetzt davon aus, daß für $Ax = y = l + v$ die Messung l fehlerfrei ist. Wir setzen daher $v = 0$, $y = l$, und verlangen $y \in R(A)$. Die Minimumsforderung reduziert sich auf $\|x\|_{1,K} = \text{Minimum}$, und die notwendigen Bedingungen (4) auf $Kx = A^T k$, $Ax = y$. Ist K bijektiv, so liefert die erste Gleichung $x = K^{-1}A^T k$, und eingesetzt in die zweite Gleichung entsteht

$$AK^{-1}A^T k = y, \quad \dots (5.1)$$

$$x = K^{-1}A^T k. \quad \dots (5.2)$$

(5.1) ist lösbar, wenn $y \in R(AK^{-1}A^T)$ ist, oder wegen der Voraussetzung $y \in R(A)$, wenn $R(A) \subset R(AK^{-1}A^T)$ gilt. Man zeigt aus $0 \leq K \in S(H_1)$ bijektiv leicht, daß $N(A^T) = N(AK^{-1}A^T)$ ist, also $\overline{R(A)} = \overline{R(AK^{-1}A^T)}$, so daß (5.1) lösbar wird, wenn $AK^{-1}A^T$ abgeschlossenen Wertebereich hat. Wir fassen zusammen:

$(H_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_i, i = 1, 2, \text{ seien Hilberträume über } \mathbf{R}, 0 \leq K \in S(H_1) \text{ bijektiv, } A \in L(H_1, H_2), AK^{-1}A^T \text{ mit abgeschlossenem Wertebereich. Dann hat die Gleichung}$

$$Ax = y \text{ unter der Forderung } \|x\|_{1,K} = \text{Minimum}$$

für jedes $y \in R(A)$ genau eine Lösung $x \in H_1$, und diese ist durch das Gleichungssystem (5) bestimmt.

Zum Beweis hat man nach dem zuvor Gesagten nur noch zu zeigen, daß x durch (5) eindeutig bestimmt ist, und für jedes $x' \in H_1$ mit $Ax' = y$ $\|x'\|_{1,K} \geq \|x\|_{1,K}$ folgt, was dem Leser überlassen sei. Man beachte dabei, daß k aus (5.1) nicht eindeutig bestimmt zu sein braucht, aber jede Lösung k von (5.1) gemäß (5.2) auf dasselbe x führt.

2.2 Ausgleich nach vermittelnden Beobachtungen

Für die Gleichung $Ax = l + v$ läuft die Forderung (1) auf den vermittelnden Ausgleich hinaus, wenn wir $K = 0$ setzen, also $\|v\|_{2,P} = \text{Minimum}$ fordern. Die notwendigen Bedingungen (4) reduzieren sich mit $K = 0$ auf

$$A^T k = 0, \quad Pv = -k, \quad Ax = l + v,$$

deren zweite, eingesetzt in die erste

$$A^T P v = 0 \quad \dots (6.1)$$

ergibt; setzt man v aus der dritten Gleichung in (6.1) ein, so erhalten wir

$$A^T P A x = A^T P l, \quad \dots (6.2)$$

$$v = Ax - l. \quad \dots (6.3)$$

(6.2) ist lösbar, wenn $A^T P l \in R(A^T P A)$, oder $R(A^T P) \subset R(A^T P A)$ ist. Wiederum hat man wegen $N(A^T P A) = N(P A)$ die Beziehung $\overline{R(A^T P A)} = \overline{R(A^T P)}$, sodaß (6.2) lösbar ist, wenn $A^T P A$ abgeschlossenen Wertebereich hat. Damit können wir zusammenfassen:

Seien $(H_i, \langle \cdot | \cdot \rangle_i)$, $i = 1, 2$ Hilberträume über \mathbf{R} , $0 \leq P \in S(H_2)$, $A \in L(H_1, H_2)$, $A^T P A$ mit abgeschlossenem Wertebereich. Dann hat die Gleichung $Ax = l + v$ für jedes $l \in H_2$ unter der Forderung $\|v\|_{2,P} = \text{Minimum}$ stets Lösungen $(x, v) \in H_1 \times H_2$ und die Lösungsmenge ist durch

$$T = \{(x, v) \in H_1 \times H_2 : A^T P A x = A^T P l, v = Ax - l\} \quad \dots (6.4)$$

gegeben, wobei für jedes $(x, v) \in T$ $\|v\|_{2,P}$ stationär ist.

Zusatz: Ist P überdies injektiv, so ist v eindeutig bestimmt.

Da wir bereits die Lösbarkeit von (6.2) gesehen haben, ist zum Beweis nur noch zu zeigen, daß für jedes $(x, v) \in T$ $\|v\|_{2,P}$ denselben Wert c hat und für jedes $(x', v') \in H_1 \times H_2$ mit $Ax' = l + v'$ $\|v'\|_{2,P} \geq c$ folgt. Beides ist evident.

Für den Zusatz haben wir folgendes zu zeigen: ist $x_1, x_2 \in H_1$ mit $A^T P A x_i = A^T P l$, $i = 1, 2$, und $v_i = Ax_i - l$, so folgt $v_1 = v_2$. Da dann $x_1 - x_2 \in N(A^T P A)$ und mit injektivem P $N(A^T P A) \subset N(A)$, also $A(x_1 - x_2) = 0$ ist, haben wir $v_1 - v_2 = A(x_1 - x_2) = 0$.

Der vermittelnde Ausgleich ist besonders der endlichdimensionalen Konzeption angepaßt. Ist z. B. $H_1 = \mathbf{R}^u$ und $H_2 = \mathbf{R}^n$, so ist bei regulärem P die Bedingung $n \geq u$ für die Injektivität von $A^T P A$ notwendig, aber selbst $n > u$ nicht hinreichend. Hinreichend für die Regularität der „Normalgleichungsmatrix“ $A^T P A$ und damit die eindeutige Bestimmtheit der Lösung (x, v) ist z. B. P positiv definit und $\dim R(A) = u$.

Da beim vermittelnden Ausgleich das linearisierte Modell häufig den Charakter einer Beseitigung systematischer Fehler hat, ist es in diesen Fällen sinnvoll, für die Messung l ein Genauigkeitsmaß zu definieren, das diesem Charakter Rechnung trägt. Ein solches kann man z. B. durch $(\|v\|_{2,P}^2 / \text{codim } R(A))^{1/2}$ bzw. 0, falls A surjektiv ist, definieren.

Häufig werden für die Inversion der Normalgleichungsmatrix $N := A^T P A$ Programme verwendet, die die Matrizengleichung $NX = E$ durch sukzessive Multiplikation mit Reduktionsmatrizen in $EX = Q$ überführen. Ist N singular, so müßte beim Aufbau der Reduktionsmatrizen eine Division durch Null auftreten. Da aber in rationaler Approximation eine errechnete Null nicht Null zu sein braucht, z. B. $1 \cdot 10^{-9}$ bei 14 Stellen $1 \cdot 10^{-14}$ ergibt, kommt es dann oft nicht zur Fehlermeldung. So kann es bei singulären Normalgleichungsmatrizen und bei Verwendung derartiger Inversionsprogramme, die nicht auf Regularität prüfen, zu plausiblen Ergebnissen und vernünftigen mittleren Fehlern kommen, obwohl QN erheblich von E abweicht. Derartige Fehler kann man vermeiden, wenn man z. B. die nun folgende Modifikation des vermittelnden Ausgleichs anwendet.

2.3 Modifikation des vermittelnden Ausgleichs

Wendet man 2.1 mit $K = I_1$ auf die Lösungsmenge T von 2.2 an, so hat man:

Seien $(H_i, \langle \cdot | \cdot \rangle_i)$, $i = 1, 2$ Hilberträume über \mathbf{R} , $0 \leq P \in S(H_2)$ injektiv, $A \in L(H_1, H_2)$ und $N := A^T P A$ mit abgeschlossenem Wertebereich. Dann hat die Gleichung $Ax = l + v$ mit der Forderung $\|v\|_{2,P} = \text{Minimum}$ und $y := A^T P l$ die Lösungsmenge

$$T = \{(x, v) \in H_1 \times H_2 : Nx = y \text{ und } v = Ax - l\}, \quad \dots (7.1)$$

wobei v eindeutig bestimmt ist. In T gibt es genau eine Lösung (x, v) , die überdies der Forderung $\|x\|_1 = \text{Minimum}$ genügt, und diese ist aus dem Gleichungssystem

$$N^2 k = y, \quad \dots (7.2)$$

$$x = Nk, \quad \dots (7.3)$$

$$v = Ax - I \quad \dots (7.4)$$

gegeben.

Wenn N nicht injektiv war, ist natürlich N^2 erst recht nicht injektiv, d. h. (7.2) ist dann nicht eindeutig lösbar. Jedoch genügt es, eine Lösung k von (7.2) zu finden, denn jede Lösung k von (7.2) führt nach Abschnitt 2.1. auf dasselbe x .

Ist H_1 endlichdimensional, so gestattet der Gaußsche Algorithmus (in sinnvoller Formulierung) die Berechnung einer Lösung k von (7.2), wobei entsprechend dem Defekt von N^2 einige Nullzeilen entstehen und dafür entsprechende Komponenten von k nullgesetzt werden. Gleichzeitig kann damit ein fastsinguläres Verhalten von N oder N^2 abgefangen werden, indem man eine „Nullzeilentoleranz“ vorgibt. Es empfiehlt sich daher immer, beim vermittelnden Ausgleich 2.3 oder eine andere derartige Lösung anzuwenden, die ein schwach singuläres Verhalten von N abfängt.

2.4 Interpolation in fehlerhafte Messungen

Wir behandeln nun den Fall weiter, bei dem mit $K \neq 0 \neq P$ $\|x\|_{1,K^2} + \|v\|_{2,P^2} = \text{Minimum}$ gefordert wird. Eliminiert man aus den Gleichungen (4) k , so entsteht

$$(K + A^T P A) x = A^T P I. \quad \dots (8)$$

Wegen $K + A^T P A \in S(H_1)$ ist die Weiterbehandlung von (8) aber nur für $\dim H_1 < \infty$ sinnvoll. Wir denken bei 2.4 aber auch daran, daß H_1 nicht endlichdimensional ist, z. B. wenn wir das Restpotential x aus fehlerhaften Schwereanomalien I ermitteln wollen. Andererseits wird aber der Meßraum H_2 in fast allen Anwendungen ein geeigneter \mathbf{R}^n sein, so daß es verlockend ist, die Ausgleichung soweit wie möglich in H_2 zu verlegen.

Daß dies aufgrund der notwendigen Bedingungen (4) möglich ist, ergibt sich aus (4), wenn wir P, K bijektiv voraussetzen, denn dann folgt aus $x = K^{-1} A^T k$, $v = -P^{-1} k$, $Ax = I + v$ durch Einsetzen von x, v in die dritte Gleichung

$$(P^{-1} + AK^{-1}A^T) k = I, \quad \dots (9)$$

wobei sich jetzt (9) in H_2 abspielt.

Wir hätten jetzt (9) im Hinblick auf Lösbarkeit und Eindeutigkeit der Lösung zu untersuchen. Nach einer Idee von T. Krarup (Krarup, S. 41) läßt sich das in 2.4 aufgeworfene Problem aber auf 2.1 zurückführen. Dazu statten wir $H_\pi := H_1 \times H_2$ mit dem durch $\langle (x, v), (x', v') \rangle_\pi := \langle x, x' \rangle_1 + \langle v, v' \rangle_2$ definierten Skalarprodukt aus, das die durch $\|(x, v)\|_\pi^2 = \|x\|_1^2 + \|v\|_2^2$ gegebene Norm $\|\cdot\|_\pi$ induziert; diese erzeugt aber auf H_π gerade die Produkttopologie, so daß $(H_\pi, \langle \cdot \rangle_\pi)$ Hilbertraum ist (Floret/Wloka, S. 35, 1.3). Mit $A_\pi: H_\pi \rightarrow H_2, (x, v) \rightarrow A_\pi(x, v) := Ax - v$ stellt sich die Ausgangsgleichung $Ax = I + v$ in der Form $A_\pi(x, v) = I$ dar; überdies sieht

man sofort, daß A_π linear, stetig, surjektiv ist, sodaß trivialerweise die für den Interpolationsfall 2.1 notwendige Voraussetzung $1 \in R(A_\pi)$ erfüllt ist.

Die Forderung $\|x\|_{1, K^2} + \|v\|_{2, P^2} = \text{Minimum}$ bekommt man folgendermaßen in das Schema von 2.1: es sei $K_\pi: H_\pi \rightarrow H_\pi$ erklärt durch $K_\pi(x, v) := (Kx, Pv)$; offenbar ist K_π linear, stetig, selbstadjungiert, und wegen $\langle K_\pi(x, v), (x, v) \rangle_\pi = \langle (Kx, Pv), (x, v) \rangle_\pi = \langle Kx, x \rangle_1 + \langle Pv, v \rangle_2 \geq 0$ für $P \geq 0, K \geq 0$ ist K_π auch positiv, also $0 \leq K_\pi \in S(H_\pi)$. Ferner ist $\|(x, v)\|_{K_\pi^2} = \|x\|_{1, K^2} + \|v\|_{2, P^2}$, sodaß wir das Problem von 2.4 in

$$A_\pi(x, v) = 1, \|(x, v)\|_{K_\pi} = \text{Minimum},$$

also in die Ausgangssituation von 2.1 umgeschrieben haben.

Von 2.1 übernehmen wir die Lösung. Sofern K_π bijektiv ist und $A_\pi K_\pi^{-1} A_\pi^T$ abgeschlossenen Wertebereich hat, ist sie eindeutig bestimmt, und durch $A_\pi K_\pi^{-1} A_\pi^T k = 1, (x, v) = K_\pi^{-1} A_\pi^T k$ gegeben. Nun ist K_π bijektiv genau dann, wenn P und K bijektiv sind, und wenn dies zutrifft, ist K_π^{-1} durch $K_\pi^{-1}(x, v) = (K^{-1}x, P^{-1}v)$ gegeben. Ferner rechnet man leicht

$$A_\pi K_\pi^{-1} A_\pi^T = P^{-1} + AK^{-1}A^T$$

aus, sodaß wir zusammenfassen können:

Seien $(H_i, \langle \cdot | \cdot \rangle_i)$, $i = 1, 2$ Hilberträume über \mathbf{R} , $0 \leq K \in S(H_1)$ bijektiv, $0 \leq P \in S(H_2)$ bijektiv, $A \in L(H_1, H_2)$ und $P^{-1} + AK^{-1}A^T$ mit abgeschlossenem Wertebereich. Dann hat die Gleichung $Ax = 1 + v$ unter der Forderung $\|x\|_{1, K^2} + \|v\|_{2, P^2} = \text{Minimum}$ für jedes $1 \in H_2$ genau eine Lösung $(x, v) \in H_1 \times H_2$, und diese ist aus dem Gleichungssystem

$$(P^{-1} + AK^{-1}A^T)k = 1, \quad \dots (10.1)$$

$$v = -P^{-1}k, \quad \dots (10.2)$$

$$x = K^{-1}A^T k \text{ gegeben} \quad \dots (10.3)$$

Nach 2.1 ist nun nichts mehr zu zeigen. (10.1) läßt sich, falls H_2 endlichdimensional ist, als Matrixgleichung lösen, ebenso (10.2). Erst bei (10.3) folgt der Interpolationsschritt nach H_1 . Bei den oben getroffenen Voraussetzungen über P, K gilt für $N := P^{-1} + AK^{-1}A^T$ $0 < N \in S(H_2)$, sodaß N injektiv und wegen des abgeschlossenen Wertebereichs bijektiv ist. Mit $B := PAK^{-1}A^T$ schreibt sich $N = P^{-1}(I + B)$, sodaß also auch $I + B$ bijektiv ist; sofern also $\|B\| < 1$ ist, hat man $N^{-1} = (I + B)^{-1}P = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B^n P$; für $K = I_1$ kann man also dann die Interpolationsaufgabe ohne Inversion lösen.

3.0 Beispiel

Wir entwickeln erst das Beispiel zu einer gewissen Reife, bevor wir in 3.i die zu 2.i, $i = 1, \dots, 4$ passenden Ausgleichungsfälle darlegen.

Es sei $R > 0$ der „Erdradius“, $\|\cdot\|$ die Quadratsummennorm in \mathbf{R}^3 , $S_R := \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| = R\}$ die R -Sphäre um 0, $K_R := \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| < R\}$ die offene R -Kugel um 0 und $\complement K_R$ das Komplement von K_R in \mathbf{R}^3 . Mit $x_{\text{reg}} (\complement K_R)$ bezeichnen

wir den \mathbf{R} -Vektorraum der in $\mathcal{C}\bar{K}_R$ harmonischen und in $\mathcal{C}K_R$ stetigen und in ∞ regulären Funktionen. Die Abbildung $x: [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbf{R}^3$,

$$(r, \vartheta, \lambda) \rightarrow x(r, \vartheta, \lambda) := (r \sin \vartheta \cos \lambda, r \sin \vartheta \sin \lambda, r \cos \vartheta) \quad \dots (11)$$

vermittelt uns Kugelkoordinaten r, ϑ, λ . Insbesondere ist dann $x(R, \vartheta, \lambda): [0, \pi] \times [0, 2\pi) \rightarrow S_R$ eine Parametrisierung von S_R . Mit $h_1, h_2 \in \mathcal{X}_{\text{reg}}(\mathcal{C}K_R)$ ist dann durch

$$\langle h_1, h_2 \rangle_1 := \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} h_1(x(R, \vartheta, \lambda)) h_2(x(R, \vartheta, \lambda)) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda \quad \dots (12)$$

ein Skalarprodukt für $\mathcal{X}_{\text{reg}}(\mathcal{C}K_R)$ gegeben, denn $\|h\|_1 > 0$ impliziert $h|_{S_R} \neq 0$ und dies wegen der eindeutigen Lösbarkeit der ersten Randwertaufgabe $h \neq 0$.

Bekanntlich sind die durch (Heiskanen und Moritz, S. 31)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n^m \\ \psi_n^m \end{array} \right\} (x(r, \vartheta, \lambda)) := z_n^m \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n^m(\cos \vartheta) \left\{ \begin{array}{l} \cos m \lambda, \quad m = 0, \dots, n, \\ \sin m \lambda, \quad m = 1, \dots, n, \end{array} \right\} \quad n \in \mathbf{N}_0 \quad \dots (13)$$

definierten Funktionen φ_n^m, ψ_n^m aus $\mathcal{X}_{\text{reg}}(\mathcal{C}K_R)$ und mit

$$z_n^m := \left[\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (2 - \delta_{m0}) \right]^{1/2} \quad \dots (13')$$

sind sie in $\mathcal{X}_{\text{reg}}(\mathcal{C}K_R)$ bzgl. $\langle \cdot \rangle_1$ orthonormal. Für $n \in \mathbf{N}_0$ sei $B_n := \{\varphi_n^m : m = 0, \dots, n\} \cup \{\psi_n^m : m = 1, \dots, n\}$, $\mathcal{X}_n := LH(B_n)$. Dann ist \mathcal{X}_n ein Unterraum von $\mathcal{X}_{\text{reg}}(\mathcal{C}K_R)$ der Dimension $2n+1$, und es gilt $\mathcal{X}_n \perp \mathcal{X}^m$ für $n \neq m$. Für $N \in \mathbf{N}_0$ setzen wir $H_{1N} := \bigoplus_{n=0}^N \mathcal{X}_n$; dann ist $\dim H_{1N} = \sum_{n=0}^N (2n+1) = (N+1)^2 =: u$, also $H_{1N} \cong \mathbf{R}^u$. Trivialerweise sind die Räume \mathcal{X}_n, H_{1N} mit $\langle \cdot \rangle_1$ Hilberträume über \mathbf{R} , und $B_n, B_N := \bigcup_{n=0}^N B_n$ sind Orthonormalbasen.

H_{1N} wird für ein geeignetes N in unserem Beispiel der Raum H_1 der Unbekannten, wir sehen ihn deshalb etwas genauer an. Die Isomorphie zwischen H_{1N} und \mathbf{R}^u kann z. B. durch $\varphi: H_{1N} \rightarrow \mathbf{R}^u, h \rightarrow \varphi(h) := (\langle h, b \rangle_1)_{b \in B_N}$ dargestellt werden. Für Interpolationszwecke ist aber ein anderer Isomorphismus wichtiger, dem wir uns jetzt in zwei Schritten nähern. Zunächst definieren wir die Abbildung $k_N: \mathcal{C}K_R \times \mathcal{C}K_R \rightarrow \mathbf{R}$,

$$(x, x') \rightarrow k_N(x, x') := \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^n [\varphi_n^m(x) \varphi_n^m(x') + \psi_n^m(x) \psi_n^m(x')]. \quad \dots (14)$$

Mit dem „Additionstheorem“ (vgl. Heiskanen und Moritz, S. 33) läßt sie sich in der Form

$$k_N(x, x') = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{R^2}{|x||x'|} \right)^{n+1} P_n \left(\frac{x \cdot x'}{|x||x'|} \right) \quad \dots (14')$$

schreiben und man sieht für $x, x' \in \mathcal{C}K_R$

$$k_N(x, x') = k_N(x', x), \quad \dots \quad (14.1)$$

$$k_N(\cdot, x') \in H_1^N, \quad \dots \quad (14.2)$$

$$h \in H_1^N \Rightarrow \langle h(x'), k_N(\cdot, x') \rangle_1 = h, \quad \dots \quad (14.3)$$

wenn wir vereinbaren, daß in derartigen Situationen über die zweimal vorkommende Variable zu integrieren ist.

Für $n \in \mathbf{N}$ und $M_n := \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathcal{C}K_R$ ist die durch

$$(k_N[x_i, x_j])_{i,j=1, \dots, n}$$

definierte Matrix symmetrisch und positiv semidefinit, denn sie kann mit der Definition von k_N formal als dyadisches Produkt geschrieben werden. Dabei stand bis jetzt n nicht in Beziehung zu u . Jetzt behaupten wir für $n = u$: Es gibt $M_u = \{\xi_1, \dots, \xi_u\} \subset \mathcal{C}K_R$, sodaß die Matrix

$$(k_N[\xi_i, \xi_j])_{i,j=1, \dots, u} \quad (u = [N + 1]^2)$$

positiv definit und damit regulär ist. Der Beweis ist trivial, beruht auf der linearen Unabhängigkeit von B_N , und sei dem Leser überlassen. Ist $M_u = \{\xi_1, \dots, \xi_u\}$ gefunden, sodaß $K := (k_N[\xi_i, \xi_j])_{i,j}$ regulär ist, so stellt $\{k_N(\cdot, \xi_i) : i = 1, \dots, u\}$ eine Basis von H_1^N dar, die natürlich nicht orthonormal ist. Damit ist der oben erwähnte Isomorphismus durch die Restriktionsabbildung $R: H_1^N \rightarrow \mathbf{R}^u, k \rightarrow Rh := h|_{M_u} = (h[\xi_i])_{i=1, \dots, u}$ gegeben. Offenbar ist R linear und damit stetig. R ist injektiv, wenn es zu $y \in \mathbf{R}^u$ höchstens ein $h \in H_1^N$ gibt mit $Rh = y$; dies zeigen wir: jedes $h \in H_1^N$ läßt mit der oben erwähnten Basis in der Form $h = \sum_{j=1}^u a_j k_N(\cdot, \xi_j)$ darstellen.

Dann besagt die Gleichung $Rh = y$, nichts anderes als $\alpha K = y$, und da K regulär ist, ist sie durch $\alpha = yK^{-1}$ gelöst, oder ausführlich durch

$$h = \sum_{i=1}^u \sum_{j=1}^u k_N^{(-1)}(\xi_i, \xi_j) y_i k_N(\cdot, \xi_j),$$

womit auch

$$R^{-1}: \mathbf{R}^u \rightarrow H_1^N, y \rightarrow R^{-1}y = \sum_{i=1}^u \sum_{j=1}^u k_N^{(-1)}(\xi_i, \xi_j) y_i k_N(\cdot, \xi_j)$$

bekannt ist, wobei wir für $K^{-1} (k_N^{(-1)}[\xi_i, \xi_j])_{i,j=1, \dots, u}$ geschrieben haben.

In der Praxis ist die Menge der Meßstellen $M_N = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathcal{C}K_R$ sicher nicht so angeordnet, daß $n = u$ gilt und $(k_N(x_i, x_j))_{i,j=1, \dots, n}$ regulär wird; diese Matrix wird dann in der Regel nur echt semidefinit sein: durch $h|_{M_n} = (h[x_i])_{i=1, \dots, n}$ kann man dann unter Umständen viele oder gar kein $h \in H_1^N$ durchlegen und das Bedürfnis nach einer Methode, die eine eindeutige Lösung gestattet, entsteht. Hinzu kommt aber noch etwas:

Obwohl man durch Nivellement in Verbindung mit Schweremessungen das Restpotential — abgesehen von einer globalen Konstanten — in den Punkten von M_n ermitteln kann, möchte man das Restpotential auch aus Schwereanomalien in

den Punkten von M_n interpolieren können. Dazu betrachten wir den Operator $L := -|x| \frac{\partial}{\partial |x|} - 2 = -r \frac{\partial}{\partial r} - 2$, der das Restpotential in sphärischer Approximation auf die harmonisierten Schwereanomalienfunktion, gegeben durch $|x| \Delta g(x)$, abbildet. Auf $\varkappa_{\text{reg}}(\mathbb{C}K_R)$ ist L offenbar nur ein Endomorphismus, aber auf unserem schönen Beispielraum H_1^N (versehen mit $\langle \cdot \rangle_1$) ist L natürlich auch stetig. Wir haben also $L \in L(H_1^N)$; L ist nicht injektiv (und damit auch nicht surjektiv), denn es ist für $h \in \varkappa_n$ mit der Darstellung $h(x) = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} h\left(\frac{x}{|x|}\right)$

$$(Lh)(x) = \left(-r \frac{\partial}{\partial r} - 2\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} h\left(\frac{x}{|x|}\right) = [(n+1) - 2] h(x) = (n-1) h(x),$$

also

$$h \in \varkappa_n \Rightarrow Lh = (n-1)h,$$

was zeigt, daß

$$N(L) = \varkappa_1$$

ist.

Wir kommen nun dazu, die Aufgabe zu formulieren. Gegeben sei $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{C}K_R$. Auf M_n seien die Schwereanomalien $\Delta g(x_i)$ ermittelt, fehlerhaft oder fehlerfrei. Wir setzen $(|x_i| \Delta g[x_i])_{i=1, \dots, n} =: \mathfrak{l} \in \mathbb{R}^n =: H_2$. $H_2 = \mathbb{R}^n$ ist also unser Meßraum. Gesucht sind Lösungen $h \in H_1^N$ der Gleichung $((Lh)(x_i))_{i=1 \dots n} = \mathfrak{l}$, oder wenn wir die Restriktionsabbildung von H_1^N auf M_n mit R_n bezeichnen, also $R_n h := h|_{M_n} = (h(x_i))_{i=1, \dots, n}$ erklären, mit

$$A := R_n L \in L(H_1^N, H_2) \quad \dots \quad (15)$$

Lösungen von $Ax = \mathfrak{l} + \nu$. Dabei sollen vorderhand n und $u = (N+1)^2$ in keiner besonderen Beziehung zueinander stehen. Wenn wir jetzt noch eine symmetrische, positiv definite (n, n) -Matrix P wählen, wenn die Schwereanomalien fehlerhaft sind, und $\|\nu\|_{2, P^2} = \nu P \nu^T$ setzen, und auf der H_1^N -Seite für $K = I$, haben wir die Ausgangssituation des theoretischen Teils dieses Artikels hergestellt.

3.1 Interpolation in fehlerfreie Messungen

Wir nehmen nun an, \mathfrak{l} sei fehlerfrei, setzen also in $y = \mathfrak{l} + \nu$ $\nu = 0$ und haben die Gleichung

$$Ah = y \quad \text{unter der Forderung } \|x\|_1 = \text{Minimum}$$

zu lösen. Aus 2.1 folgt, daß für $y \in R(A)$ die Lösung eindeutig bestimmt ist und aus dem Gleichungssystem $AA^T k = y$, $h = A^T k$ gegeben ist. Dies brauchen wir nur noch etwas auszuführen: Wenden wir den Operator L auf die erste (zweite) Variable von k_N an, so machen wir das durch L_1 (L_2) kenntlich. Damit haben wir, wie man sofort nachrechnet, A^T aus

$$A^T : H_2 \rightarrow H_1^N, \quad k \rightarrow A^T k = \sum_{i=1}^n L_1 k_N(x_i, \cdot) k_i.$$

Daraus folgt weiter

$$AA^T k = \left(\sum_{i=1}^n L_2 L_1 k_N[x_i, x_j] k_i \right)_{j=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n = H_2.$$

Wenn wir in \mathbf{R}^n die übliche Orthonormalbasis $\{(\delta_{ij})_{j=1..n} \mid i = 1, \dots, n\}$ und das übliche Skalarprodukt verwenden, können wir die Gleichung

$$AA^T k = y \text{ mit } k = (k_1, \dots, k_n), M(AA^T) = (L_1 L_2 k_N(x_i, x_j))_{i,j=1, \dots, n} =: C$$

in die Matrixgleichung $kC = y$ umsetzen, und wenn k sie löst, ist h aus

$$h = \sum_{i=1}^n L_1 k_N(x_i, \cdot) k_i$$

gegeben.

Die Matrix C , deren Elemente durch

$$\begin{aligned} L_1 L_2 k_N(x_i, x_j) &= \sum_{n=0}^N (n-1)^2 \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{R^2}{|x_i| |x_j|} \right)^{n-1} P_n \left(\frac{x_i \cdot x_j}{|x_i| |x_j|} \right) \\ &= \sum_{n=0}^N (n-1)^2 \sum_{m=0}^n [\varphi_n^m(x') \varphi_n^m(x') + \psi_n^m(x) \psi_n^m(x')] \end{aligned}$$

gegeben sind, ist natürlich symmetrisch und positiv semidefinit, was aus der letzten Formel direkt oder aus $0 \leq AA^T \in S(H_2)$ ersichtlich ist. Sie muß jedoch nicht positiv definit sein. Denn für $N \geq 1$ ist $N(A) \subset \kappa_1$, also A nicht injektiv. Selbst für $N = 0$, $u = (N+1)^2 = 1$ muß C nicht regulär sein: es ist dann nämlich mit

$$w := \left(\frac{R}{|x_1|}, \dots, \frac{R}{|x_n|} \right) \quad C = \frac{1}{4\pi} w^T w;$$

wählt man nun z. B. ausgerechnet drei Meßpunkte, also $n = 3$, so findet man zu $w \in \mathbf{R}^3$ ein $k \in \mathbf{R}^3$ mit $k \neq 0$ und $k \perp w$. Dann ist $kCk^T = \dots = 0$, was zeigt, daß C nicht positiv definit ist.

Die allgemeine Theorie in 3.1 besagt aber, daß AA^T bzw. $M(AA^T) = C$ durchaus nicht injektiv bzw. regulär zu sein braucht, aber trotzdem gemäß $h = A^T k$ die Lösung h eindeutig bestimmt ist.

3.2 Vermittelnder Ausgleich

Wir nehmen an, daß die Messung l für y fehlerhaft sei, setzen also $y = l + v$ an, und suchen mit positiv definitem, symmetrischem $P \in M_{nn}^{\mathbf{R}}$ Lösungen von $Ah = l + v$ unter der Forderung $vPv^T = \text{Minimum}$, wobei $l, v \in H_2 = \mathbf{R}^n$ und $h \in H_1^N$ ist. Nach 2.2 ist die Lösungsmenge durch

$$T = \{(h, v) \in H_1^N \times H_2 : A^T P A h = A^T P l, v = Ah - l\}$$

gegeben, v eindeutig bestimmt, h hingegen nicht unbedingt.

Sinnvoll ist diese Aufgabe beim vorliegenden Beispiel sicherlich nur dann, wenn wir $(N+1)^2 = u$ sehr viel kleiner als n wählen, z. B. um die groben Züge des Restpotentials zu ermitteln. Da wir mit $A^T P A$ jedoch in $L(H_1^N)$ sind, macht das Ausschreiben der Lösungsmenge hier Schwierigkeiten, weil wir noch einmal vom Funktionen- H_1^N in einen entsprechenden Basiskoeffizientenraum übersetzen müssen.

Wir beschränken uns daher auf den einfachsten Fall, also

$$N = 0, u = 1, H_1^0 = LH(\varphi_0^0), \varphi_0^0 = \frac{1}{4\pi} \frac{R}{|\cdot|};$$

dann entspricht die Aufgabenstellung etwa dem Fall, daß anhand des vorhandenen Schwereanomalienmaterials entschieden werden soll, ob die Größe „ kM “ richtig im Normalpotential (Heiskanen und Moritz, S. 67) angesetzt ist.

Es ist dann mit $h = c \frac{R}{|\cdot|}$ und $P = (p_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ $Ah = \left(-c \frac{R}{|x_i|} \right)_{i=1 \dots n}$

$$A^T P A h = \frac{c}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{R^2}{|x_i| |x_j|} p_{ij} \frac{R}{|\cdot|} \epsilon H_1^0,$$

andererseits

$$A^T P \iota = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{R}{|\cdot|} \frac{R}{|x_i|} p_{ij} \iota_j,$$

sodaß sich die Gleichung $A^T P A h = A^T P \iota$ bezüglich des Basiselementes $\frac{1}{4\pi} \frac{R}{|\cdot|}$

in die Gleichung

$$c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{R^2}{|x_i| |x_j|} p_{ij} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{R}{|x_i|} p_{ij} \iota_j$$

übersetzt, die genau dann lösbar ist, wenn der Faktor bei c ungleich Null ist, was bei der positiven Definitheit von P der Fall ist.

3.3 Modifikation des vermittelnden Ausgleichs

Würde man in 3.2 $N = 1, u = (N + 1)^2 = 4$ wählen, so wäre selbst für positiv definites P $A^T P A$ nicht injektiv, wegen $N(A^T P A) = N(A) \supset \kappa_1$, und die $A^T P A$ zugeordnete Normalgleichungsmatrix würde singulär; das sogar für beliebiges $n \geq u = 4$. Bei dem vorliegenden Beispiel weiß man natürlich $N(L) = \kappa_1$, und wird daher sinnvollerweise H_1^N von vornherein ohne κ_1 ansetzen, sodaß dieses Problem gar nicht erst erwächst. Allzuoft hat man aber bei einer Ausgleichungsaufgabe von vornherein diesen Einblick nicht, und dann stellt 2.3 doch einen brauchbaren Algorithmus bereit, Fehler zu vermeiden und eine eindeutig bestimmte Lösung zu bekommen.

3.4 Interpolation in fehlerhafte Messungen

Wir gehen wieder aus von $y = \iota + v, 0 \leq P \in S(H_2)$ bijektiv (also praktisch eine symmetrische, positiv definite (n, n) -Matrix), $K = I_1$; dann ist $Ah = \iota + v$ mit

der Forderung $\|h\|_1^2 + \|v\|_{2,P^2}$ eindeutig lösbar und die Lösung $(h, v) \in H_1^N \times H_2$ durch das Gleichungssystem

$$(P^{-1} + AA^T)k = I, \quad v = -P^{-1}k, \quad x = A^T k$$

bestimmt. Wenn wir die P^{-1} zugeordnete Matrix mit R bezeichnen, setzt sich das um in die Matrixgleichungen

$$k(R + C) = I, \quad v = -kR$$

und für h haben wir dann wie in 3.1 die Darstellung

$$h = \sum_{i=1}^n L_1 k_N(x_i) k_i.$$

Dabei bleiben natürlich in Zusammenhang mit der Wahl von P einige Fragen offen. Zunächst folgt aus $0 \leq P \in S(H_2)$ bijektiv, daß R symmetrisch und positiv definit ist; von 3.1 wissen wir, daß C mindestens positiv semidefinit ist. Also ist $R + C$ symmetrisch, positiv definit, regulär. Das muß auch nach der Theorie von 2.4 so sein.

Andererseits sollte für R die Kovarianzmatrix der harmonisierten Schwereanomalien eingesetzt werden — theoretischen Überlegungen zufolge, die in (Krarup, S. 19, vgl. auch S. 41) ausgeführt sind, also wiederum C . Dann reduziert sich das obige Gleichungssystem aber auf $2kC = I, v = -kC$; da aber C nicht positiv definit zu sein braucht, vgl. 3.1, ist dadurch wohl h eindeutig bestimmt, nicht aber v , und gegenüber dem aus 3.1 mit der Annahme fehlerfreier Messungen bestimmten h erhalten wir jetzt bei Annahme fehlerhafter Messungen $h_{3.4} = \frac{1}{2}h_{3.1}$. Wenn man also für P^{-1} die „theoretisch richtige“ Kovarianzfunktion der harmonisierten Schwereanomalien einsetzt, zeigt diese Überlegung, daß durch die Forderung $\|x\|_1^2 + \|v\|_{2,P^2} = \text{Minimum}$ zuviel Gewicht auf das Verbessern und zuwenig Gewicht auf das Interpolieren gelegt wird.

Literatur

- Dieudonné, J.*: Grundzüge der modernen Analysis. Vieweg, Braunschweig 1971.
Floret, K. und Wloka, J.: Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume. LNM Nr. 56, Springer, Berlin 1968.
Heiskanen, W. A. und Moritz, H.: Physical Geodesy. Freeman, San Francisco 1967.
Krarup, T.: A Contribution to the Mathematical Foundation of Physical Geodesy. Geod. Inst., Kopenhagen 1969.

Zur Azimutmessung mit Sekundentheodoliten

Von *Gottfried Gerstbach*, Wien

Zusammenfassung

Es wird vorgeschlagen, die Neigungskorrektion von Azimutmessungen mit dem Höhenkreis-kompensator anstatt einer Reiterlibelle zu ermitteln. Die Stehachsen der gebräuchlichen Sekundentheodolite (T2, Th2, DKM2-A) sind hierfür von ausreichender Qualität. Probemessungen zeigen, daß schon mit vier Sätzen äußere Genauigkeiten von $\pm 1''$ erreichbar sind.

Abstract

Concerning azimuth measurements by modern one-second theodolites it is proposed to derive the inclination correction by automatic vertical indexing instead of striding levels. The vertical axes of Wild T2, Zeiss Th2 and Kern DKM2-A have sufficient quality for that purpose. Some tests show an accuracy of $\pm 1''$, attainable by 4 sets of observations.

Bei der Bestimmung astronomischer Azimute unterscheidet man zwischen direkten und indirekten Methoden. In dem einen Fall werden Sterndurchgänge im Vertikal des terrestrischen Zieles beobachtet, im zweiten hingegen Horizontalwinkel zwischen dem Ziel und polnahen Sternen gemessen; Varianten hiezu entstehen durch simultane Bestimmung der Breite oder der Zeit. Wegen der notwendigen Steilvisuren sind Neigungskorrekturen unerlässlich, die aber bei kleinen Instrumenten Probleme aufwerfen. Deshalb werden Sekundentheodolite nur selten zur Azimutmessung eingesetzt, obwohl ihre Genauigkeit für die meisten Fälle ausreichen würde.

Die vorliegende Arbeit bezieht sich in erster Linie auf die indirekte Polarisierungsmethode, weil Sekundentheodolite keine Okularmikrometer besitzen und Kreisteilungsfehler heute kaum mehr eine Rolle spielen.

1. Problematik der Neigungsbestimmung mit Reiterlibellen

Da die Alhidadenlibellen Parswerte der Größenordnung $20''$ pro Linie besitzen, muß auch bei sorgfältiger Horizontierung mit Stehachsneigungen von $5-10''$ gerechnet werden. Ihr Einfluß auf die Richtungsmessung wird üblicherweise durch Reiterlibellen bestimmt, welche auf die Theodolitstützen, vereinzelt auch direkt auf die Kippachse aufzusetzen sind. Die für Sekundentheodolite lieferbaren Libellen haben Parswerte $p = 5-6''/2$ mm und durchlaufende Teilung.

Durch Ablesen der Blasenenden (l, r) in beiden Kreislagen I, II bestimmt man die quer zur Steilvisur liegende Komponente der Stehachsneigung oder — exakter ausgedrückt — die mittlere Kippachsneigung i :

$$i' = (l + r)_I - (l + r)_{II} \quad i = \frac{i'}{4} \cdot p \quad \dots (1)$$

Die Neigung i sei positiv, wenn das rechte Achsende im Mittel tiefer liegt; (1) gilt für durchlaufende Teilung, wenn sich der Nullpunkt in Kreislage I rechts befindet. In die Azimutkorrektur, die mit dem Cotangens der Zenitdistanz zunimmt, wird bei der indirekten Polarisierungsmethode auch der Einfluß der täglichen Aberration einbezogen:

$$K \doteq i_{\Delta} \operatorname{ctg} z_{\Delta} - i_{*} \operatorname{ctg} z_{*} + 0,32. \quad \dots (2)$$

Darin bedeuten z_{Δ} und z_{*} die Zenitdistanzen des irdischen Zieles und des Polarsterns. In unseren Breiten ist $\operatorname{ctg} z_{*} > 1$, so daß der zweite Term stark überwiegt. Die Libellenlesungen am Ziel können für $i = 5''$ und $0,32$ -Genauigkeitsforderung nur bei flachen Visuren ($85^{\circ} < z_{\Delta} < 95^{\circ}$) weggelassen werden.

Unter Verwendung einer Reiterlibelle $p \approx 6''/2$ mm ist die Neigungskorrektur (2) durch Ablesefehler von vornherein auf $\pm 0,32-1''$ beschränkt, doch sind andere Nachteile bzw. systematische Fehler gravierender:

- a) Abdeckung zenitnaher Visuren
- b) Instabile Lagerung wegen der kurzen Strecke zwischen den Auflagen
- c) Exponierte Stelle, dadurch hohe thermische Empfindlichkeit der Libelle
- d) Trägheit der Libellenblase
- e) Veränderlichkeit des Parswertes

Fehler nach b) sind vor allem bei Wind spürbar, der neben unruhiger Anzeige eine geringe Verschiebung und Teilentlastung der Libellenstützen verursachen kann. An einer T2-Reiterlibelle wurden schon bei 30 km/h systematische Neigungsfehler bis 1,5 festgestellt. Einseitig wirken auch thermische Fehler, welche vom Temperaturgefälle in der Blase abhängen und nach [9] $320'' \text{ grad cm}^{-1}$ betragen. Bei stillstehendem Instrument würden sie zufolge Abstrahlung und vor allem Konvektion einen nahezu konstanten Wert annehmen und wären unschädlich. Durch den Kreislagenwechsel kommt es hingegen zu veränderlichen Gradienten, die innerhalb weniger Minuten umgekehrtes Vorzeichen annehmen und unter normalen Umständen systematische Fehlanzeigen der Größenordnung 1–2'' verursachen [9]. Ähnliche Fehler entstehen durch die Körperwärme des Beobachters und die Libellenbeleuchtung. Systematische Einflüsse nach b) und c) wirken meist in dieselbe Richtung.

Die Trägheit der Libellenblase geht auf Adhäsion und Rauheit des Glaskörpers zurück, liegt aber im gegenständlichen Fall unter 1'' (T2-Reiterlibelle 0,6). Da die Blase bei Instrumentendrehungen in die Mitte gedrängt wird, äußert sich ihre Trägheit meist in etwas zu kleinen Ausschlägen. Längeres Zuwarten hat wenig Sinn, weil dann andere Fehler — hauptsächlich die thermischen — ansteigen. Schließlich ist der Parswert nur selten hinreichend konstant, sondern hängt von der Lage des Blasenmittelpunktes und in geringerem Maß von Blasenlänge und Temperatur ab. Der erste Effekt geht auf Fehler der Schliffkurve und das Zuschmelzen der Glasröhre zurück und bewirkt bei den üblichen Reiterlibellen Änderungen bis 20%, siehe auch [10]. Durch entsprechend hohen Aufwand läßt sich die Veränderlichkeit des Parswertes bestimmen und korrigieren [3], [11].

Die bei Verwendung von Reiterlibellen auftretenden systematischen Fehler können sich zu erheblichen Beträgen summieren und die Ergebnisse eines Abends um etwa 4'' verfälschen. Einflüsse des Windes sind teilweise schon bei geringen Windstärken feststellbar und unter Feldbedingungen daher fast immer wirksam. Die modernen automatischen Höhenkreiskompensatoren eröffnen jedoch eine Möglichkeit, diesen Fehlern aus dem Wege zu gehen.

Es sei noch kurz auf die systematischen Kippachs-Taumelfehler hingewiesen, die durch Stützenlibellen oder Neigungsmesser nicht erfaßbar sind, während Achslibellen verfälschte Werte liefern. Diese sekundären Achsfehler sind eine Folge der „Zapfenungleichheit“, genauer der ungleichen Durchmesserfehler beider Achszapfen. Bei modernen Sekundentheodoliten liegen aber die Durchmesserfehler unter $0,3 \mu\text{m}$ (Toleranz nach [1] $0,5 \mu\text{m}$), so daß für 10 cm Lagerabstand die zenitdistanzabhängigen Neigungs- und Richtungsänderungen 0,6 nicht überschreiten dürften. Tatsächlich stimmen die in Kapitel 5 und 6 angeführten DKM2-A-Azimute mit den Referenzwerten gut überein. Bestehen die Durchmesserfehler nur in einer Elliptizität, treten bei rechtwinkligen V-Lagern keine Neigungsfehler auf, während die Richtungsänderungen unter 0,4 bleiben. (Zum Vergleich seien Maximalwerte aus [11] zitiert:

DKM3 0,"2 bzw. 0,"3, T4 0,"5 bzw. 0,"7; beim T4 kommt ein nicht reproduzierbarer azimuthaler Wälzeffekt bis 0,"75 hinzu). Weitere Neigungs- und Richtungsfehler entstehen durch jedes Hantieren am Theodolit, können jedoch unter 1" gehalten werden und sind teils zufälliger Natur, teils in beiden Kreislagen umgekehrt wirksam.

2. Neigungsbestimmung mit Höhenkreiskompensatoren

Unter Annahme hinreichend exakt gefertigter Achsen kann die Neigungskorrektur (2) im Rahmen der Koinzidenzgenauigkeit mit Hilfe des Höhenkreismikrometers und des Kompensators bestimmt werden [6]. Von Kollimation und Kippachsfehler sei im folgenden abgesehen, da ihr Einfluß bei Messung in zwei Kreislagen verschwindet und Polaris in diesem Zusammenhang als unbewegtes Ziel anzusehen ist. Wenn die ideale Stehachse um den Winkel ν gegen das Lot geneigt ist und das Azimut u der Zielachse in gewohnter Weise auf die Richtung des Gefälles bezogen wird, ist in Kreislage I die Zenitdistanz des geklemmten Fernrohrs bzw. die mittlere Kippachsneigung

$$z_u = \bar{z} + \nu \cdot \cos u \qquad i_u = -\nu \cdot \sin u$$

und somit

$$i_u = \frac{1}{2} \left(z_u + \frac{\pi}{2} - z_u - \frac{\pi}{2} \right). \qquad \dots (3)$$

Dank des Höhenkompensators ergibt sich die wirksame Kippachsneigung als halbe Differenz von Mikrometerlesungen, wenn man den geklemmten Höhenkreis in den quer zur Steilvisur liegenden Azimuten koinzidiert. Bei der Polarismethode führt man diese östliche und westliche Koinzidenz zweckmäßig zwischen den Polarsternzielungen verschiedener Kreislagen aus. Die innere Genauigkeit der Neigungsbestimmung nach (3) ist bei modernen Theodoliten mit ihren ausgezeichneten Ableseoptiken besser als eine halbe Sekunde, die Fehler der Kompensatoren (ca. $\pm 0,"3$) bleiben im allgemeinen unwesentlich. Versuchsmessungen am Kern DKM2-A und Zeiß Th2 ergaben als mittleren Fehler einer zweifachen Koinzidenz etwa $\pm 0,"6$, in i somit $\pm 0,"4$. (Der erste Wert erfährt eine unabhängige Bestätigung durch den mittleren Gewichtseinheitsfehler einer DKM2-A-Meßreihe [4] nach der Methode gleicher Höhen). Etwaige einseitige Auffassungsfehler der Koinzidenzen ($1-2''$) fallen bei zügiger Meßabfolge wegen der Differenzbildung weitgehend heraus. Eines der untersuchten Th2-Instrumente zeigte unmittelbar nach sehr raschen Schwenkungen bis $3''$ kleinere Zenitdistanzen; bei der Neigungsbestimmung mit mechanischen Kompensatoren (Gelenkviereck, siehe [7]) sollte man daher abrupte Drehungen vermeiden.

Prinzipiell läßt sich (3) auch bei älteren Theodoliten mit der Libelle des Höhenkreises anwenden, welche eine Reiterlibelle nahezu ersetzen kann und im Gegensatz zu dieser gegen thermische Einflüsse und Wind gut geschützt ist. Mühevolleres Einspielen und Kreiskoinzidieren erübrigt sich, wenn man die Abstände der gespiegelten Blasenenden mit einem kleinen Maßstab ausmißt. Auf diese Weise hat der Verfasser mit dem T2 unter erheblicher Zeitersparnis trotz Parswerten von $20''/2$ mm innere Genauigkeiten der Neigungsbestimmung von $\pm 0,"6$ erzielt.

Da die Neigungsmessung in anderen Stellungen als die Polariszielung erfolgt, wären die genannten Zahlenwerte nur bei idealen Stehachsen und hundertprozentig stabiler Aufstellung mit äußeren Genauigkeiten gleichzusetzen. Die zweite Forderung wird natürlich von Pfeilern, aber auch von guten Stativen hinreichend ($< 1''$) erfüllt, Taumelfehler sind jedoch aus fertigungstechnischen und konstruktiven Gründen bei allen Theodoliten zu erwarten. Ihre Komponenten in Richtung der Ziel- und Kippachse werden im folgenden als Längs- und Querfehler L , Q bezeichnet und wie in (3) mit Indizes entsprechend der Alhidadenrichtung versehen. Abgesehen von geringfügigen Zapfenungleichheiten der Kippachse wirkt auf die Steilvisur ihre mittlere Neigung aus beiden Kreislagen

$$\begin{aligned} i_u' &= \frac{1}{2} (-v \cdot \sin u + Q_u + v \cdot \sin [u + \pi] - Q_{u + \pi}) = \\ &= -v \cdot \sin u + \frac{1}{2} (Q_u - Q_{u + \pi}), \quad \dots (4a) \end{aligned}$$

während die Höhenkreiskoinzidenzen den Wert

$$\begin{aligned} i_u'' &= \frac{1}{2} \left(v \cdot \cos \left[u + \frac{\pi}{2} \right] + L_{u + \frac{\pi}{2}} - v \cdot \cos \left[u - \frac{\pi}{2} \right] - L_{u - \frac{\pi}{2}} \right) = \\ &= -v \cdot \sin u + \frac{1}{2} \left(L_{u + \frac{\pi}{2}} - L_{u - \frac{\pi}{2}} \right) \quad \dots (4b) \end{aligned}$$

liefern, welcher um die halben Differenzen der Längs- und Querfehler verfälscht ist. Ob die Azimutmessungen hievon zufällig oder systematisch beeinflusst werden, hängt von der Charakteristik und Periodizität der Taumelbewegungen ab. Sie beeinträchtigen die Neigungsbestimmung mit Kompensatoren kaum, wie die folgenden Untersuchungen an sieben verschiedenen Sekundentheodoliten zeigen.

3. Zylindrische Stehachsen

Die meisten Universalinstrumente besitzen zylindrische Vertikalachsen, deren Genauigkeit von der Führungslänge, dem Spiel zwischen Zapfen und Bohrung sowie der Verteilung des Fettfilmes abhängt. Geprüft wurden die Achsen je zweier Zeiß Th2- und Wild T2-Theodolite, wovon letztere allerdings noch nicht mit dem neuen Höhenkompensator ausgestattet waren. Drei der Theodolite wurden dem Verfasser von den Instituten für Allgemeine Geodäsie und für Landesvermessung der TU Wien zur Verfügung gestellt, wofür herzlicher Dank ausgesprochen sei. Die Messungen fanden auf Pfeilern im Meßkeller der TU Wien statt, so daß thermische Einflüsse auf die zur Bestimmung der Querfehler notwendigen Reiterlibellen ($p = 2''$ bzw. $4''/2$ mm) minimal blieben.

Um bei vertretbarem Zeitaufwand genügend dichtes Zahlenmaterial zu erhalten, wurden die Ablesungen pro Durchgang in 12 äquidistanten Richtungen vorgenommen. Bewährt hat sich die Reihenfolge 0, 90, 180, 270, 30, 120, 210, 300, 60, 150, 240, 330°, die einen Kompromiß zwischen 30°- und 180°-Schritten darstellt. Kleine bzw. gemächliche Schwenkungen sind angesichts mechanischer Kompensatorfehler angezeigt, während bei 180°-Drehungen der Einfluß abrupterer Änderungen

und systematischer Koinzidenzfehler auf die Bestimmung der mittleren Stehachsneigung am kleinsten ist. Die Richtungen beziehen sich zweckmäßigerweise auf eine bestimmte Stelle des Unterbaues, etwa den Kreisverstellungsknopf.

Die Komponenten x , y der mittleren Stehachsneigung in den Richtungen $\alpha = 0^\circ$ und 90° wurden aus den zweimal 12 Lesungen l_i (Mikrometer bzw. Blasenmitte) durch Ausgleich nach vermittelnden Beobachtungen berechnet. Für die Längsfehler lauten die auf Tektronix TEK 31 ausgewerteten Formeln

$$x = \frac{2}{n} [\cos \alpha_i \cdot l_i] \quad y = \frac{2}{n} [\sin \alpha_i \cdot l_i] \quad z = \frac{[l_i]}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad \dots (5)$$

Die ausgeglichenen Differenzen $l_i - x \cdot \cos \alpha_i - y \cdot \sin \alpha_i - \bar{z}$ der Meßwerte enthalten neben den Taumelbewegungen noch die Koinzidenz- bzw. Ablesefehler, die aber nach Kapitel 2 weit unter $1''$ liegen. In den Abbildungen stellen die Linienzüge jeweils Mittelwerte der Längs- und Querfehler von drei aufeinanderfolgenden Durchgängen dar.

Die Längsfehler der beiden Th2-Exemplare (Abb. 1–2) betragen im Schnitt $\pm 1,0''$ bzw. $1,1''$ und liegen zu 92% unter $2''$, die Querfehler sind mit $\pm 1,4''$ etwas größer. Der Unterschied dürfte auf die Empfindlichkeit dieser Theodolite gegen seitliche Belastungen zurückgehen, welche nach Aufstecken der Nachtbeleuchtung schon an der Alhidadenlibelle (!) deutlich festzustellen ist, sich aber beim Meßvorgang dank der leichtgängigen konzentrischen Bedienungsknöpfe doch nur wenig auswirkt. Die Stehachse ist jedenfalls weniger stabil als der neuartige Unterbau [7] und verlangt sorgfältige Instrumentenbedienung. Wichtiger als die Kleinheit der Taumelfehler ist die Tatsache, daß sie sich nahezu regellos verhalten, wie die durcheinanderlaufenden Linienzüge zeigen. Daher steigt mit zunehmender Satzanzahl neben der inneren auch die äußere Genauigkeit von Azimutmessungen an, systematische Neigungsfehler sind kaum zu befürchten.

Die Taumelfehler von T2-Stehachsen sind noch etwas kleiner und erreichten nur in 3 von 96 Fällen $2''$. Die Durchschnittswerte von Abb. 3 betragen $\pm 1,0''$ und $\pm 0,7''$, von Abb. 4 $\pm 0,9''$ und $\pm 0,7''$. Auch hier handelt es sich um eine praktisch zufällige Charakteristik, so daß der Theodolit für die beschriebene Neigungsbestimmung gut geeignet und eine Reiterlibelle überflüssig ist. Bei normaler Handhabung der Bedienungsknöpfe bleiben die Neigungsänderungen unter $\pm 1''$, erst grobe Manipulation verursacht Werte von $2''$.

Aus den Originaldaten von Th2 und T2 geht hervor, daß eine nach (3) ermittelte Neigung die äußere Genauigkeit von $\pm 1,3''$ bzw. $\pm 1,0''$ aufweist, während die innere mit Kompensator $\pm 0,4''$ beträgt. Wie in Abschnitt 5 gezeigt wird, ist dies für Zielungen mit Sekundentheodoliten ausreichend. Um das Schmiermittel zwischen Zapfen und Bohrung besser zu verteilen, sollte man sich dennoch angewöhnen, beim Kreislagen- und Zielwechsel die Alhidade immer im gleichen Sinn weiterzubewegen. Will man an einem einzelnen Abend optimale Ergebnisse erreichen, ist es außerdem günstig, den Unterbau auf dem Pfeiler bzw. Stativ ein- oder mehrmals zu verdrehen.

Zum Vergleich seien aus [11] die Taumelfehler eines Wild T4 genannt, der allerdings ein halbkinematisches Achsensystem besitzt. Sie zeigen hauptsächlich Perioden von 8860° , 784° , 579° und 60° mit Einzelamplituden bis $0,6''$. Die qua-

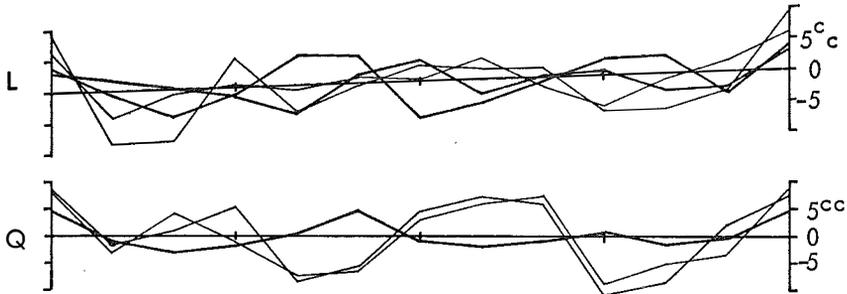


Abb. 1: Th2 Nr. 72743

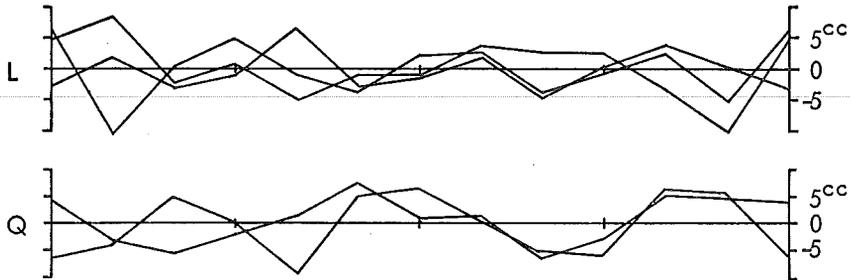


Abb. 2: Th2 Nr. 64488

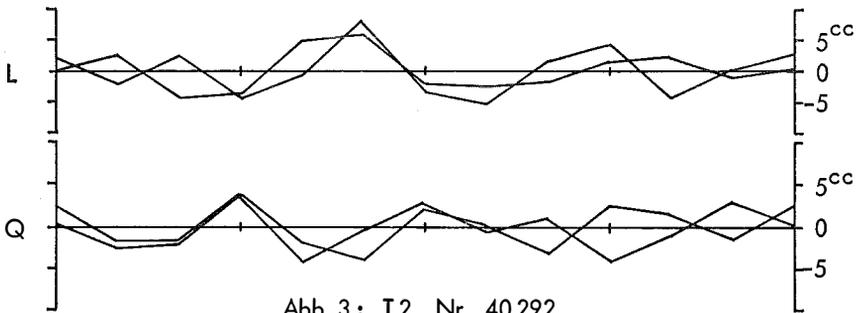


Abb. 3: T2 Nr. 40292

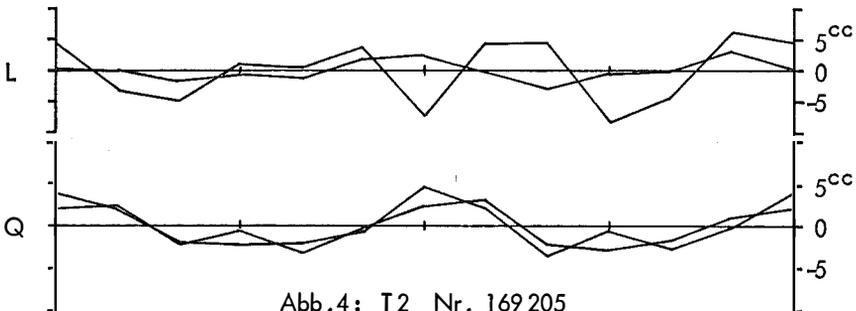


Abb. 4: T2 Nr. 169205

Abb. 1—4:

Taumelfehler von Th2- und T2-Stehachsen (Längs- und Querkomponenten). Messung in 12 äquidistanten Alhidadenstellungen 0—360° zum Unterbau, jeweils Mittel aus drei Durchgängen

dratischen Mittelwerte der Längs- und Querkomponenten betragen je $\pm 0,4''$, ihre Maximalwerte $1,1''$ bzw. $0,9''$.

4. Achsialkugellager-Stehachsen

Bei der Achskonstruktion des Kern DKM2-A, welche H. Wild schon 1938 im DKM2 eingeführt hat, wird die Stehachse durch eine horizontale Kugellaufbahn mit ca. 11 cm Durchmesser definiert [1]. Ihre Genauigkeit hängt nur von der Ebenheit der Lauffläche ab, weil die Kugeln innerhalb $0,1 \mu\text{m}$ gleiche Größe haben. Der DKM2-A besitzt ferner einen Flüssigkeitskompensator, der auch nach Erschütterungen keine systematischen Fehler zeigt und seine hohe Nenngenaugkeit von $\pm 0,3''$ im praktischen Einsatz unter Beweis stellt [4].

Zur Prüfung der Achsfehler wurden drei am Institut für Höhere Geodäsie vorhandene Theodolite herangezogen. Die Längskomponenten wurden wie vorhin mit Kompensator und Höhenkreismikrometer bestimmt (Genauigkeit einer dreifachen Koinzidenz im Meßkeller $\pm 0,4''$), die Querkomponenten mit einer aufgesetzten $4''$ -Libelle (2 Lesungen $\pm 0,4''$) bzw. im Fall der Abb. 7 mit einem speziellen Kippachsmikrometer (4 Koinzidenzen $\pm 0,6''$, siehe Schlußkapitel). In den Abbildungen 5–7 sind wieder die Mittel je dreier aufeinanderfolgender Meßreihen dargestellt, wobei die drei Originalwerte im Gegensatz zu den Zylinderachsen meist innerhalb $0,6''$ zusammenfallen.

Daß sich die Linienzüge praktisch decken, bedeutet eine weitgehende Reproduzierbarkeit der Stehachsbeziehung. Die Taumelfehler erreichen jedoch Beträge von $1-2''$ und zeigen eine ausgeprägte 120° -Periode. Letztere hat ihre Ursache in den Dreipunktauflagen von Lauf- und Tragrings, die lokale Spannungen erzeugen. Nach [1] liegen die Deformationen unter $\pm 1''$, was aber offenbar zu gering angesetzt ist. Auch die Stehachse eines DKM3 verhält sich ähnlich, nur liegen die Maximalbeträge bei $\pm 0,8''$ [11]; der institutseigene DKM3-A Nr. 162 312 zeigt Taumelfehler von $\pm 0,7''$.

Der Längsfehler L verläuft mit rund 30° Phasenverschiebung hinter Q , was sich mit einem einfachen Modell veranschaulichen läßt: der Laufring des Kugellagers wird durch die Theodolitstützen versteift und liegt auf dem dreifach ausgebuchteten Tragrings auf. Weil die Neigungsbestimmung mittels Höhenkompensator in gegenüber der Steilvisur um 90° verschwenkten Azimuten erfolgt, kommt es im Verein mit der 120° -Taumelperiode und der 30° -Phasenverschiebung zu dem Effekt, daß einem aufsteigenden Ast von Q_u ein absteigender von $L_u + \frac{\pi}{2}$ entspricht und umgekehrt. Daher wird (4a), (4b) etwa gleichstark, aber im entgegengesetzten Sinn beeinflußt. Die Differenz

$$i_u'' - i_u' = \frac{1}{2} \left(L_u + \frac{\pi}{2} - L_u - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} (Q_u - Q_u + \pi) \quad \dots (6)$$

nimmt rasch große Werte an, so daß ohne Kenntnis oder Berücksichtigung der Taumelfehler die Azimute bis zum Maximalbetrag

$$|i_u'' - i_u'|_{\max} \cdot \text{ctg } z = (|L|_{\max} + |Q|_{\max}) \cdot \text{ctg } z \approx 3'' \cdot \text{tg } \varphi \quad \dots (7)$$

verfälscht werden können. Bei Polarismessungen in mittleren Breiten bedeutet dies rund $3''$, was der Größenordnung systematischer Libellenfehler entspricht und den Vorteil der besprochenen Methode zunichte machen würde.

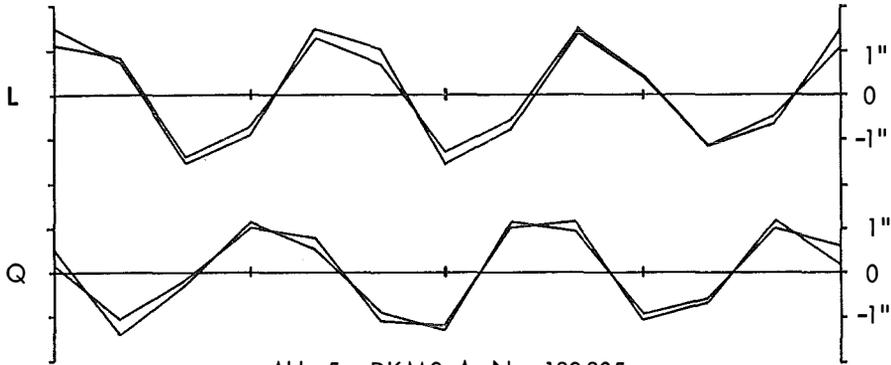


Abb. 5: DKM2-A Nr. 182805

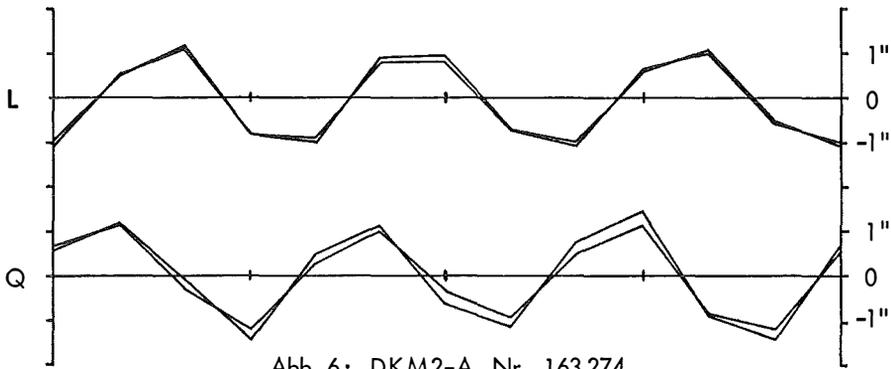


Abb. 6: DKM2-A Nr. 163274

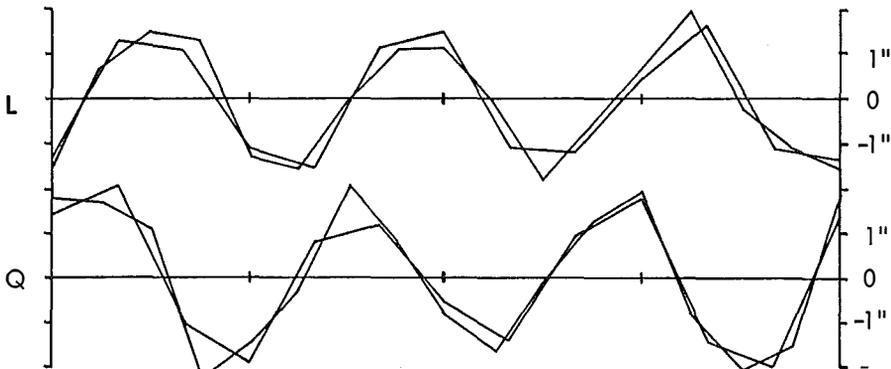


Abb. 7: DKM2-A Nr. 231119

Abb. 5–7:

Taumelfehler von DKM2-A-Stehachsen (Längs- und Querkomponenten). Jeweils Mittel aus drei Durchgängen in 12 bzw. 16 äquidistanten Alhidadenstellungen

Man muß es jedoch nicht dem Zufall überlassen, ob und in welche Richtung das Resultat verfälscht wird. Hierbei erweist sich die gute Reproduzierbarkeit der Bewegung von Kugellager-Stehachsen als entscheidender Vorteil. Die Maximalfehler sinken beispielsweise auf etwa die Hälfte, wenn eine Fußschraube nach Norden weist [6]; von dieser Möglichkeit wurde in einem Teil der Probemessungen Gebrauch gemacht — siehe nächstes Kapitel.

Praktisch fehlerfrei (innerhalb $m_i \approx 0,3''$) ist jede Neigungsmessung von Polariszielungen, wenn die vier Hauptrichtungen mit Nullstellen der Taumelfehler zusammenfallen. In Abbildung 6 und 7 trifft dies bei Fußschraubenazimuten von etwa 10° , 70° , 130° usw. zu. Als Grundlage genügt eine einzige Bestimmung der Längsfehler des verwendeten Theodolits, da die Kurvenform und Phasenverschiebung $L - Q$ über Jahre hinweg erhalten bleibt. Sogar ohne jede Detailkenntnis kann man präzise mittlere Neigungskorrekturen ableiten, wenn man die Azimutmessungen in beliebiger Lage beginnt und nach einigen Sätzen den Unterbau um 60° verdreht. Auf diese Weise kehrt sich das Vorzeichen des Fehlers (6) um, während er seinen Betrag gemäß Abb. 5–7 auf $\pm 0,3'' \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2+2} = \pm 0,3''$ beibehält. Damit sind für ein Satzpaar äußere Genauigkeiten der Neigungsbestimmung von $\pm 0,3''$ möglich, die jener von wind- und temperaturschutzten Sekundenlibellen [11] entsprechen.

Die Stehachse des DKM2-A hat noch weitere für die astrogeodätische Praxis positive Eigenschaften. Dank des großen Laufringes ist der Theodolit sehr unempfindlich gegen einseitigen Druck. Selbst grobe Manipulation führt nur Neigungsänderungen von $1''$ herbei, bei normaler Handhabung betragen sie kaum $0,5''$. Man darf das Instrument daher ohne wesentlichen Genauigkeitsverlust auch mit Handschuhen bedienen, was für manche Gebirgsstationen einen entscheidenden Vorteil darstellt. Ferner kann — im Gegensatz zu zylindrischen Stehachsen — durch Temperatureinflüsse oder schlechte Schmiermittelverteilung kein Lagerspiel entstehen.

5. Probemessungen mit dem DKM2-A

Um die Neigungsbestimmung mittels Höhenkreiskompensator praktisch zu erproben, führte der Verfasser auf der Dachterrasse der TU Wien an neun Abenden Azimutmessungen durch. Es wurden hauptsächlich die zwei in Abb. 5 und 7 untersuchten Theodolite eingesetzt und insgesamt drei terrestrische Ziele beobachtet. Standpunkt war der Pfeiler 8 ($\varphi = 48^\circ 11' 50''$), von wo ein Diplomand des Institutes für Höhere Geodäsie [8] im Jahre 1973 die Azimute derselben Ziele mit einem Wild T4 bestimmt hatte. Da jeweils über 40 Sätze (Polarismethode) aus sieben bis acht Nächten vorliegen, können diese Ergebnisse als Referenz dienen:

Terrestrisches Ziel	Azimut nach [8]	Sätze	Distanz
Sendemast Kahlenberg, Positionslicht	$343^\circ 08' 25,83 \pm 0,16''$	40	9,3 km
Donauturm, rotes Blinklicht	$31^\circ 42' 01,95 \pm 0,20''$	50	5,7 km
Elisabethkirche, Zifferblatt-Zentrum	$143^\circ 55' 04,44 \pm 0,22''$	48	0,8 km

Allerdings dürften sie noch einen systematischen Fehler beinhalten, der von Zapfeningleichheiten der Kippachse herrührt und bei Polarisbeobachtungen immer gleichartig wirkt. Ein nachträgliches Achsnivellement des verwendeten T4 zeigte charakteristische Neigungsänderungen der Hängelibelle von $-0,7''$ bis $+0,9''$, die auf Taumelfehler der Kippachse von ca. $\pm 0,4''$ schließen lassen. Die Azimutalkomponente dürfte nach [11] etwas größer sein ($0,5:0,7''$), konnte aber nicht untersucht werden. Ein Neigungsmaximum tritt gerade bei $z \approx 315^\circ$ auf; diese Taumelkomponente hätte zur Folge, daß die obengenannten Azimute um rund $0,3''$ zu klein wären.

Mit dem DKM2-A wurde ebenfalls nach der indirekten Polarismethode im folgenden Schema beobachtet:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ziel (Kreislage I, 2 Einstellungen mit je 2 Koinz.)} \\ \text{Polaris (Kreislage I, 2 Einstellungen mit je 2 Koinz.)} \\ \text{Neigungsbestimmung (je 3 Koinzidenzen Ost/West)} \\ \text{Polaris (Kreislage II, 2 Einstellungen)} \\ \text{Ziel (Kreislage II, 2 Einstellungen)} \end{array} \right\} = 1 \text{ Satz}$$

Die Zeitnehmung der Polariszielungen (Bisektion am Mittelfaden) erfolgte mit einer auf Sternzeit regulierten Stoppuhr Ulysse Nardin. Die Tabelle enthält die Ergebnisse von 68 Sätzen, nach der Beobachtungszeit in 17 Gruppen zu je 4 Sätzen zusammengefaßt. Die Ortssternzeiten erstrecken sich von 9 bis 21 Uhr, 12 Sätze wurden nach Mitternacht gemessen. Alle Azimute beziehen sich auf den momentanen Pol; die Reduktionsunterschiede zu den Referenzmessungen liegen in summa unter $0,05''$.

An den beiden ersten Abenden wurden rote Positionslichter angezielt, die nicht gleichzeitig mit Polaris scharf zu fokussieren waren. Deshalb wählte der Verfasser später meistens das weiß beleuchtete Zifferblatt der Kirchturmuhre als Ziel, welches trotz seiner Nähe problemlos einzustellen war. Allerdings geht diese Visur knapp östlich an einem Kamin vorbei, was die Beobachtungen manchmal erschwerte. Daß an zwei Abenden nach Aufkommen westlicher Winde die Resultate deutlich größer ausfallen, könnte durch Lichtablenkung infolge der warmen Abgase verursacht sein.

Entsprechend der Empfehlung des vorigen Kapitels wurde am 3.—5. Abend eine Fußschraube bzw. in den folgenden Nächten eine Nullstelle des Quer-Taumelfehlers Q ungefähr nach Norden ausgerichtet. Ab diesem Zeitpunkt stimmen die Azimute mit den Referenzmessungen zufriedenstellend überein. Das Mittel aller „wahren“ Fehler ist $+0,54 \pm 0,41''$, ohne die Werte der ersten drei Zeilen (systematische Achseinflüsse) und der beiden vom Kamin beeinträchtigten Messungen sogar nur $+0,23 \pm 0,20''$. Getrennt nach den beiden Instrumenten ergibt sich $-0,16''$ und $+0,59''$, was zu einem Teil Resteinflüsse der Kippachs-Taumelfehler widerspiegeln könnte.

Die empirische innere Genauigkeit eines Satzes beträgt im quadratischen Mittel der 17 Gruppen $m = \pm 1,12''$. Aus den mehrfachen Polarseinstellungen folgt der mittlere Fehler einer Sternzielung samt zweifacher Koinzidenz zu $m_* = \pm 1,10''$, was mit dem Wert $\pm 1,12''$ von Meridian- und Polariszenitdistanzen [5] S. 71 harmoniert. Die terrestrischen Zielfehler sind nur etwa 5% kleiner. Da die Kreis-

Datum	Mittleres Azimut (aus je 4 Sätzen)	Inn. Gen. pro Satz	„Wahrer Fehler“				Mittel	Anmerkung
			einzelne Sätze					
9. 9. 74	31°41'58,“29 ± 0,“88	± 1,“77	- 1,“9	- 3,“5	- 6,“1	- 3,“1	- 3,“66	
12. 9. 74	343°08'30,“23 ± 0,“41	± 0,“82	3,“6	5,“5	4,“2	4,“2	4,“40	lockere Zenitokulare
12. 9. 74	08'27,“29 ± 0,“71	± 1,“33	0,“1	1,“7	1,“2	~ 4,“0	1,“46	
17. 7. 75	143°55'04,“17 ± 0,“24	± 0,“47	- 0,“2	- 0,“1	- 0,“9	0,“1	- 0,“27	ab hier eine Fußschraube nach Nord
17. 7. 75	55'05,“18 ± 0,“67	± 1,“33	0,“7	0,“8	- 1,“0	2,“4	0,“74	
17. 7. 75	55'03,“14 ± 0,“54	± 1,“07	- 1,“6	- 2,“7	- 0,“4	- 0,“5	- 1,“30	
12. 4. 76	143°55'04,“70 ± 0,“71	± 1,“42	- 1,“1	1,“1	- 0,“8	1,“8	0,“26	
12. 4. 76	55'06,“71 ± 0,“75	± 1,“50	0,“2	3,“5	2,“0	3,“3	2,“27	rauch. Kamin stört!
28. 4. 76	143°55'04,“98 ± 0,“28	± 0,“57	1,“3	0,“4	0,“5	- 0,“1	0,“54	
30. 4. 76	31°42'01,“94 ± 0,“42	± 0,“84	0,“8	- 0,“8	- 0,“7	0,“7	- 0,“01	ab hier eine Nullstelle von Q nach Nord
30. 4. 76	42'02,“33 ± 0,“66	± 1,“32	2,“3	0,“1	- 0,“3	- 0,“6	0,“38	
30. 4. 76	42'01,“83 ± 0,“52	± 1,“04	- 0,“2	- 0,“5	- 1,“1	1,“3	- 0,“12	
1. 5. 76	143°55'04,“85 ± 0,“58	± 1,“17	- 0,“6	0,“2	2,“1	- 0,“1	0,“41	
1. 5. 76	55'06,“40 ± 0,“42	± 0,“83	1,“0	1,“6	2,“5	2,“7	1,“96	rauch. Kamin stört!
5. 5. 76	143°55'06,“06 ± 0,“43	± 0,“85	1,“6	2,“2	2,“2	0,“4	1,“62	
7. 5. 76	143°55'04,“98 ± 0,“57	± 1,“13	- 0,“6	0,“1	0,“7	2,“0	0,“54	
7. 5. 76	31°42'01,“90 ± 0,“39	± 0,“77	0,“8	0,“3	- 0,“5	- 0,“8	- 0,“05	

teilungsfehler des DKM2-A $m_k \approx \pm 0,42$ ausmachen [1] und die Neigungsbestimmungen innere Genauigkeiten $m_i \approx \pm 0,4$ aufweisen, besteht zum erstgenannten Betrag eine Diskrepanz von

$$\Delta \approx \sqrt{m^2 - \frac{1}{2}(m_*^2 + 2m_k^2) - (m_i \cdot \operatorname{tg} \varphi)^2} = \\ = \sqrt{1,12^2 - \frac{1}{2} \cdot 1,10^2 - 0,42^2 - (0,4 \cdot \operatorname{tg} \varphi)^2} = \pm 0,52.$$

Sie dürfte neben halbsystematischen „Durchgangsfehlern“ der Sternbeobachtung (nach [5] ca. $\pm 0,3$) hauptsächlich aus Fehlern bestehen, die von der Zeigerstellung des angezielten Uhrzentrums abhängen und auch in [8] vermutet werden. Die jeweils zusammengefaßten vier Sätze dauerten nämlich im Schnitt fast 40 Minuten, weil ohne Protokollführer gearbeitet wurde. Ein Teil von Δ mag ferner auf Neigungsänderungen während des Satzes zurückgehen.

Für die 24 Messungen des 3.–5. Abends liegt der mittlere wahre Fehler von $\pm 1,52$ schon relativ nahe bei der inneren Genauigkeit $\pm 1,13$ eines Satzes. Der Unterschied wird wegen (6) noch geringer, wenn statt einer Fußschraube eine Nullstelle von Q nach Norden weist: die entsprechenden Zahlenwerte der letzten 32 Sätze (vier Abende) lauten $\pm 1,26$ und $\pm 1,01$. Ähnliches läßt sich für Satzpaare durch die früher erwähnten 60° -Verdrehungen des Unterbaues völlig voraussetzungsfrei erreichen. Dies bedeutet aber, daß, von den vielzitierten „Abendfehlern“ abgesehen, kaum systematische Einflüsse wirksam sind und der mittlere Fehler einer Gruppe beinahe der äußeren Genauigkeit entspricht.

Die innere Genauigkeit der oben tabulierten Azimutsätze wird unter gleichen Umständen auch von anderen Beobachtern (W. Rössler, Institut für Höhere Geodäsie; H. Veigl [12]) etwa erreicht. Sie ist mit jener von T4-Messungen vergleichbar, die nach [8], [10] S. 660 und [2] bei gleicher Beobachtungsanordnung $\pm 1,23$, $\pm 1,26$, $\pm 0,8$ (Pfeilerstation) bzw. $\pm 1,3$ (Hochstand) beträgt. Offenbar kann also der DKM2-A nach Elimination der systematischen Neigungsfehler ein großes Universalinstrument ersetzen.

Alle bisher genannten Werte gelten für Messungen auf einem stabilen Pfeiler. Wird der Sekundentheodolit auf einem Stativ montiert, steigen die Fehler natürlich etwas an. Leider konnten an der TU keine Azimute auf Stativ gemessen werden, weil die Terrasse mit Wegplatten auf Schotterbett belegt ist, die beim Stellungswechsel des Beobachters starke Neigungen verursachen. Wie die folgende Abschätzung zeigt, wirken sich aber die „Stativfehler“ so wenig aus, daß der Unterschied zum Pfeiler erst in längeren Beobachtungsreihen nachweisbar wäre.

Um die Fehleranteile trennen zu können, wurden bei Tag die Winkel zwischen sehr gut definierten Zielen gemessen. Mit einem DKM2-A ergaben sich bei mäßigem Wind (15 km/h) innere Genauigkeiten eines einfachen Winkels von $\pm 0,82$ (Pfeiler) und $\pm 1,00$ (Stativ), woraus ein zufälliger Stativfehler $m_s = \pm 0,40$ pro Einstellung folgte. Unter sehr ungünstigen Verhältnissen (böiger Wind 40 km/h, Regenschauer) waren die Genauigkeiten eines in beiden Kreislagen gemessenen Winkels $\pm 0,79$ bzw. $\pm 0,97$ mit $m_s = \pm 0,56$. Die Gesamtresultate auf Pfeiler und

Stativ stimmen an den zwei Tagen auf $+0,3''$ bzw. $-0,1''$ überein, so daß bei zügiger Meßfolge keine systematischen Stativeinflüsse zu befürchten sind.

Auch die Neigungsfehler wurden untersucht, zeigten aber keine nennenswerten Beträge. Streng eingestellte Stativ (Zeiß, Kern) reagieren auf die bei normaler Theodolitmanipulation auftretenden leichten Berührungen mit Neigungsänderungen $m_{is} < 1''$, die erst bei ziemlich grober Vorgangsweise auf $\pm 3''$ ansteigen. Wenn die Bedienungsknöpfe in den beiden Kreislagen mit ungefähr gleichem Druck betätigt werden, ist die gemessene mittlere Kippachsneigung praktisch frei von systematischen Fehlern. Gleichmäßiger Wind wirkt sich ebenfalls nicht negativ aus.

Ein mit dem DKM2-A auf Stativ gemessener Azimutsatz dürfte also unter normalen Feldbedingungen ($m_s \leq 0,6''$, $m_{is} < 1''$) in mittleren Breiten $\varphi \approx 48^\circ$ eine innere Genauigkeit von

$$m \approx \sqrt{\frac{1}{2}(m_*^2 + m_s^2 + \frac{1}{2}m_{is}^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + 2m_k^2) + \Delta^2 + (m_i^2 + \frac{1}{2}m_{is}^2) \operatorname{tg}^2 \varphi} \leq \\ \leq \sqrt{\frac{1}{2}(1,10^2 + 0,6^2 + 0,78^2 + 2 \cdot 0,42^2) + 0,5^2 + 0,90^2} = \pm 1,53''$$

besitzen. Sie liegt auch im ungünstigeren Fall nur ein Drittel über dem Pfeilerwert $\pm 1,12''$. Daß die Verwendung eines Statives wesentliche Einsparungen an Kosten und Zeit mit sich bringt, liegt auf der Hand.

6. Abschließende Betrachtungen

Grundsätzlich gibt es noch andere Möglichkeiten, die auf Steilvisuren wirksame Achsneigung zu bestimmen oder auszuschalten. Man kann zum Beispiel die Neigungseinflüsse direkt an der Ziellinie kompensieren, wie dies beim Jenauer Theo 002 durch einen Pendelspiegel geschieht. An Sekundentheodoliten sind derartige Konstruktionen nicht möglich und auch kaum sinnvoll. Die Firma Kern hat jedoch einen anderen Weg eingeschlagen und in einige Exemplare des DKM2-A spezielle Kippachsmikrometer eingebaut. Dies ist möglich, weil die Flüssigkeit des Höhenkreis-kompensators natürlich auch in Kippachsrichtung horizontal steht.

Ein derartiges Instrument befindet sich am Institut für Höhere Geodäsie der TU Wien und wird gegenwärtig von einem Diplomanden unter Leitung von Prof. Dr. K. Bretterbauer auf seine astro-geodätische Eignung untersucht [12]. Die vorläufigen Resultate von 66 bzw. 78 Azimutmessungen nach zwei Zielen folgendes erkennen: die größten Differenzen der acht bzw. neun Abendmittel sind $2,3''$ und $2,2''$, während ihre mittleren Fehler bei $\pm 0,7''$ liegen. Die innere Genauigkeit eines Satzes beträgt etwa $\pm 1,53''$, wobei im Gegensatz zu den im vorigen Kapitel angeführten Messungen nur eine terrestrische Zielung pro Kreislage vorgenommen wurde. Referenzbeobachtungen dreier Abende (8–12 Sätze) ergaben die „wahren“ Fehler $+0,4''$, $-0,6''$ und $-1,8''$, im Mittel $-0,66 \pm 0,58''$. Der Verfasser hat mit demselben DKM2-A 28 Sätze gemessen, welche innere Genauigkeiten von $\pm 1,32''$ und wahre Fehler zwischen $-2''$ und $+3''$ zeigen; die sieben Abendwerte liegen zwischen $-0,76''$ und $+1,29''$, ihr Mittel beträgt $+0,41 \pm 0,23''$. Die optische Qualität der Koinzidenzmarken des Kippachsmikrometers ist allerdings

noch verbesserungswürdig. Übrigens hat gerade dieser Theodolit (siehe Abbildung 7) Stehachs-Taumelfehler bis 2".

Wie die vorigen Kapitel zeigen, können aber auch mit normalen Sekundentheodoliten Azimutmessungen hoher Genauigkeit durchgeführt werden. Wenn die mittlere Kippachsneigung gemäß (3) mit dem Höhenkompensator bestimmt und auf die Besonderheiten der Taumelfehler geachtet wird, sind mit dem DKM2-A Satzgenauigkeiten von $\pm 1,2''$ leicht erreichbar, so daß sich große Universale auch für Punkte 1. Ordnung erübrigen. Beobachtungen mit den Sekundentheodoliten T2 und Th2 lassen mittlere Fehler von $\pm 1,7''$ bzw. $\pm 1,9''$ erwarten, die bei vier Sätzen auf unter 1" absinken. Von „Abendfehlern“ abgesehen, ist die Differenz zwischen innerer und äußerer Genauigkeit relativ klein. Die systematischen Fehler sind beim DKM2-A von der Größenordnung 0,5 und können allenfalls durch Referenzbeobachtungen ermittelt werden. Messungen am Stativ liefern um 0,3 höhere mittlere Fehler, systematische Einflüsse scheinen dabei nicht aufzutreten.

Daß somit Reiterlibellen überflüssig werden, wirkt sich angesichts ihrer diversen regelmäßigen Fehler vor allem bei Wind und auf höher gelegenen Punkten sehr positiv aus. Nachdem moderne Sekundentheodolite auch für genaue Breiten- und Längenbestimmungen ($\pm 0,3''$) hervorragend geeignet sind [4] [6], sollten sich die astrogeodätischen Meßtrupps ihre Arbeit im buchstäblichen Sinne leicht machen. Bedenkt man schließlich die Tatsache, daß auf vielen Feldstationen infolge äußerer Einflüsse die Abendmittel um $\pm 1''$ streuen [2], ist ein guter Sekundentheodolit mit Höhenkreiskompensator das ideale Instrument für Laplacepunkte im Hochgebirge.

Die vorgeschlagene Methode der Neigungskorrektion ist natürlich auch für Präzisionsvermessungen in steilem Gelände und für Ablotungen geeignet. Im ersten Fall wird man zweckmäßigerweise statt zahlreicher individueller Neigungen nur zwei Komponenten des Stehachsfehlers bestimmen.

Literatur

[1] *Aeschlimann, H.*: Der neue Sekundentheodolit Kern DKM2-A. Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik, Fachblatt, Jg. 70, S. 15–28, Winterthur 1972.

[2] *Bretterbauer, K.*: Refraktionsanomalien und die Genauigkeit astronomisch-geodätischer Beobachtungen. Vortrag bei der Int. Conference on Geodetic Measuring Technique, Budapest 1966.

[3] *Deichl, K.* und *H. Ludwig*: Zur Eichung von Sekundenlibellen. Zeitschrift für Vermessungswesen, Jg. 96, S. 193–202, Stuttgart 1971.

[4] *Gerstbach, G.*: Astronomische Breiten- und Längenbestimmung mit dem DKM2-A. Kern-Bulletin Nr. 22, S. 3–6, Aarau 1975.

[5] *Gerstbach, G.*: Analyse persönlicher Fehler bei Durchgangsbeobachtungen von Sternen. Geowissenschaftliche Mitteilungen, Heft 7, S. 51–102, Wien 1975.

[6] *Gerstbach, G.*: Astro-geodätische Messungen hoher Genauigkeit mit kleinen Instrumenten. Vortrag am 17. März 1976, Außeninstitut der TU Wien. Geowissenschaftliche Mitteilungen, voraussichtlich Heft 11, Wien 1976.

[7] *Hallermann, L.*: Einige Ergebnisse der Untersuchungen an Sekundentheodoliten. Int. Konferenz über Methoden und Instrumente der geodätischen Netzverdichtung, Budapest 1970.

[8] *Hauswirth, E. K.*: Die Bestimmung astronomischer Azimute mittels der Polarismethode. Nicht veröffentl. Diplomarbeit, Institut für Höhere Geodäsie, TU Wien 1974.

[9] *Milovanović, V.*: Beitrag zur Erklärung der Systematischen Fehler bei der astronomisch-geodätischen Ortsbestimmung. DGK Reihe C, Heft 129, München 1968.

[10] Ramsayer, K.: Jordan/Eggert/Kneißl, Handbuch der Vermessungskunde, 10. Auflage, Band IIa: Geodätische Astronomie, Stuttgart 1970.

[11] Schwebel, R.: Untersuchung instrumenteller Fehler von Universal- und Passageinstrument mit Hilfe von Autokollimation. DGK Reihe C, Heft 117, München 1968.

[12] Veigl, H.: Untersuchung eines neuen Sekundentheodolits der Fa. Kern auf seine Eignung zur astronomischen Ortsbestimmung (Arbeitstitel). Diplomarbeit, Institut für Höhere Geodäsie, TU Wien 1976.

Eine Bedingungsgleichung für eine Diagonale über mehrere Dreiecke eines Streckennetzes

Von K. R. Neumayr, Graz

1. Einleitung

In Streckennetzen treten neben den bekannten Bedingungsgleichungen (Diagonalenviereck, Zentralbedingung) auch Bedingungsgleichungen für Diagonale auf, welche über mehrere Dreiecke des Streckennetzes gehen. Für die Aufstellung dieser Bedingungsgleichung wird in [1] S. 636 bis 640 ein allgemeiner Weg aufgezeigt (— die Feststellung in [2] S. 63, das Aufstellen einer nichtlinearen Bedingungsgleichung sei unmöglich, trifft nicht zu —). Die praktische Aufstellung bereitet jedoch Schwierigkeiten, weil bisher ein Schema hierfür fehlte. Auf Anregung von K. Rinner wurde die Aufgabe einer schematischen Aufstellung dieser Bedingungsgleichung untersucht und ein Lösungsweg gefunden. Über diesen wird nachstehend berichtet.

2. Ableitung der Bedingungsgleichung

2.1. Ansatz:

Vom Anfangspunkt A der Diagonale $S_{A,B}$ wird über die Netzseiten S_i ($i = 1, n$) ein Polygonzug zum Endpunkt der Diagonale B gelegt. Als Brechungswinkel β_i ($i = 1, n - 1$) werden einfache Dreieckswinkel oder ihre Ergänzung auf 400^g verwendet, ihre Berechnung erfolgt mit Hilfe der gegenüberliegenden Seiten p_i ($i = 1, n - 1$). Diese Seiten erhalten ein Vorzeichen je nachdem, ob sie links ($\text{sign.}(p_i) = +$) oder rechts ($\text{sign.}(p_i) = -$) vom Polygonzug (in der Richtung der Bezeichnung) liegen (siehe Fig. 1 a, 1 b, 1 c).

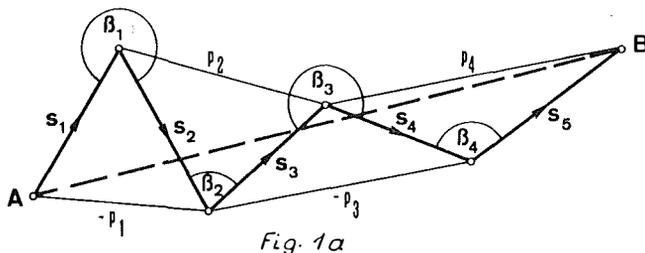


Fig. 1 a

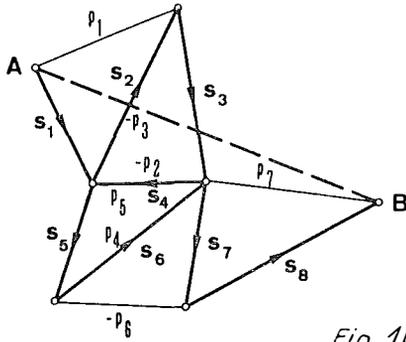


Fig. 1b,c

2.2 Allgemeine Form

Mit den Koordinatenunterschieden $\Delta x_{A,B}$ und $\Delta y_{A,B}$ zwischen Anfangs- und Endpunkt der Diagonale lautet die allgemeine Bedingungsgleichung:

$$s^2_{A,B} = \Delta x^2_{A,B} + \Delta y^2_{A,B} \quad \dots (1)$$

Nach Einführung der Richtungswinkel der Polygonseiten t_i ($i = 1, n$) kann man daraus folgende Beziehungen ableiten:

$$\Delta x_{A,B} = \sum_{i=1}^n s_i \cos t_i; \quad \Delta y_{A,B} = \sum_{i=1}^n s_i \sin t_i \quad \dots (2a, b)$$

$$\Delta x^2_{A,B} = \sum_{i=1}^n (s_i^2 \cos^2 t_i + 2 s_i \cos t_i \sum_{k=i+1}^n s_k \cos t_k) \quad \dots (3a)$$

$$\Delta y^2_{A,B} = \sum_{i=1}^n (s_i^2 \sin^2 t_i + 2 s_i \sin t_i \sum_{k=i+1}^n s_k \sin t_k) \quad \dots (3b)$$

$$s^2_{A,B} = \sum_{i=1}^n [s_i^2 + 2 s_i \sum_{k=i+1}^n s_k \cos (t_i - t_k)] \quad \dots (4)$$

Diese Gleichung ist von der Orientierung des Netzes unabhängig, es kommen nur Richtungswinkeldifferenzen vor, die durch die Brechungswinkel ausgedrückt werden können.

$$s^2_{A,B} = \sum_{i=1}^n [s_i^2 + 2 s_i \sum_{k=i+1}^n (-1)^{k-1} s_k \cos (\sum_{j=1}^{k-1} \beta_j)] \quad \dots (5)$$

Die Berechnung der Brechungswinkel aus den Seiten kann nach dem Cosinussatz erfolgen.

$$\beta_j = \text{sign}(p_j) \arccos \frac{s_j^2 + s_{j+1}^2 - p_j^2}{2 s_j s_{j+1}} \quad \dots (6)$$

Daraus folgt für die Diagonale in Abhängigkeit der Strecken die Bedingung:

$$s^2_{A,B} = \sum_{i=1}^n \left[s_i^2 + 2 s_i \sum_{k=i+1}^n (-1)^{k-1} s_k \right. \\ \left. \cos \left(\sum_{j=1}^{k-1} \text{sign } p_j \arccos \frac{s_j^2 + s_{j+1}^2 - p_j^2}{2 s_j s_{j+1}} \right) \right] \quad \dots (7)$$

Um die Linearisierung zu erleichtern, wird Formel (5) in Matrizenform dargestellt. Mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{a}^T = (s_1, s_2, s_3, s_4 \dots s_n) \quad \text{und}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -\cos \beta_1 & \cos(\beta_1 + \beta_2) & \dots & (-1)^{n-1} \cos \left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \right) \\ -\cos \beta_1 & 1 & -\cos \beta_2 & \dots & (-1)^{n-2} \cos \left(\sum_{i=2}^{n-1} \beta_i \right) \\ \cos(\beta_1 + \beta_2) & -\cos \beta_2 & 1 & \dots & (-1)^{n-3} \cos \left(\sum_{i=3}^{n-1} \beta_i \right) \\ -\cos(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) & \cos(\beta_2 + \beta_3) & -\cos \beta_3 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (-1)^{n-1} \cos \left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \right) & (-1)^{n-2} \cos \left(\sum_{i=2}^{n-1} \beta_i \right) & (-1)^{n-3} \cos \left(\sum_{i=3}^{n-1} \beta_i \right) & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

folgt hierfür die Beziehung

$$s^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{B} \mathbf{a} \quad \dots (8a)$$

Die Matrix der Brechungswinkel \mathbf{B} ist symmetrisch und kann aus der nachstehend eingeführten Dreiecksmatrix \mathbf{A} gebildet werden.

$$s^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{B} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{a} = 2 \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a} \quad \dots (8b)$$

Die geometrische Bedeutung des darin vorkommenden Vektors

$$\mathbf{B} \mathbf{a} = (s \cos \alpha_1, s \cos \alpha_2, s \cos \alpha_3 \dots s \cos \alpha_n)^T \quad \dots (9)$$

ist aus Fig. 2 ersichtlich

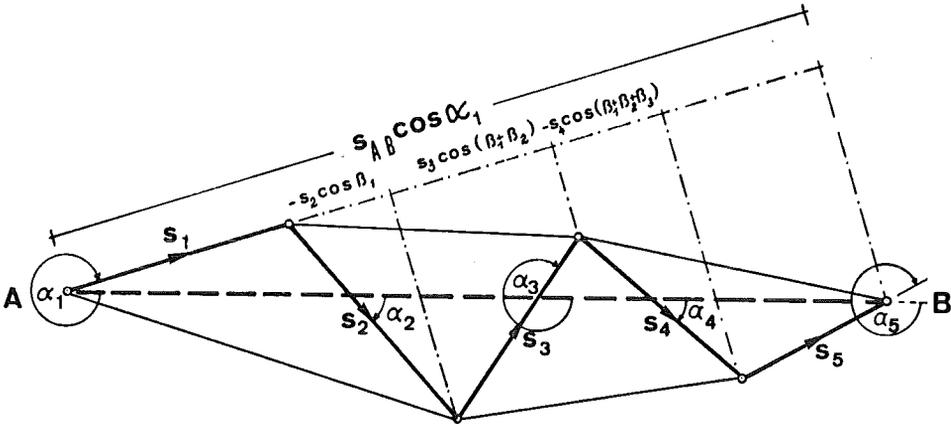


Fig. 2

2.3. Linearisierung

Durch Differentiation von Gleichung (8) folgt:

$$\begin{aligned}
 2 s ds &= 2 da^T A a + 2 a^T A da + 2 a^T dA a \\
 s ds &= (Aa)^T da + a^T A da + a^T dA a \quad \dots (10) \\
 s ds &= a^T B da + a^T dA a
 \end{aligned}$$

Die Differentiation von A nach β_i und die Zusammenfassung und Umformung der Koeffizienten von $d\beta_i$ ergibt die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 a^T dA a &= s \sum_{i=1}^{n-1} d\beta_i \sum_{k=1}^i s_k \sin \alpha_k \\
 ds &= \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i ds_i + \sum_{i=1}^{n-1} d\beta_i \sum_{k=1}^i s_k \sin \alpha_k \quad \dots (11)
 \end{aligned}$$

Für ein Streckennetz müssen die Brechungswinkel durch Seiten ersetzt werden. Hiefür erhält man durch Linearisieren von Formel (6) die Gleichung

$$d\beta_i = \frac{1}{s_i s_{i+1} \sin \beta_i} [(s_{i+1} \cos \beta_i - s_i) ds_i + (s_i \cos \beta_i - s_{i+1}) ds_{i+1} + p_i dp_i]$$

Werden Hilfsgrößen

$$2 F_i = s_i s_{i+1} \sin \beta_i, \quad l_i = \frac{s_{i+1} \cos \beta_i - s_i}{2 F_i}, \quad m_i = \frac{s_{i-1} \cos \beta_{i-1} - s_i}{2 F_i}, \quad r_i = \frac{p_i}{2 F_i} \quad \dots (12)$$

eingeführt, so folgt daraus die für die Netzseiten linearisierte Bedingungsgleichung:

$$ds = \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i ds_i - \sum_{i=1}^{n-1} ds_i (l_i + m_i) \sum_{k=1}^i s_k \sin \alpha_k - \sum_{i=1}^{n-1} dp_i r_i \sum_{k=1}^i s_k \sin \alpha_k \quad \dots (13a)$$

Nach Zusammenfassung der Koeffizienten von ds_i folgt als Ergebnis:

$$ds = \sum_{i=1}^n ds_i [\cos \alpha_i - \sum_{k=1}^i (l_i + m_i) s_k \sin \alpha_k] - \sum_{i=1}^{n-1} dp_i (\sum_{k=1}^i r_i s_k \sin \alpha_k) \quad \dots (13b)$$

In dieser gilt $m_1 = 0$ und $l_n = m_n = 0$.

Geometrische Deutung der Hilfsgrößen:

Die in Gl. (12) eingeführten Hilfsgrößen l_i , m_i und r_i können geometrisch entsprechend Fig. 3 erklärt werden:

$$\begin{aligned} r_i &= \text{sign}(p_i) \frac{p_i}{2F_i} = \text{sign}(p_i) \frac{1}{h_i} \\ l_i &= \frac{s_{i+1} \cos \beta_i - s_i}{p_i h_i} = \text{sign}(p_i) \sqrt{\frac{1}{h_i^2} - \frac{1}{s_i^2}} \\ m_{i+1} &= \text{sign}(p_i) \sqrt{\frac{1}{h_i^2} - \frac{1}{s_{i+1}^2}} \quad \dots (14) \end{aligned}$$

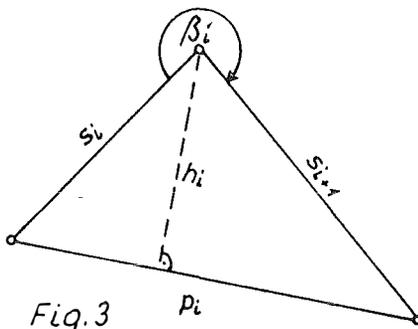


Fig. 3

2.4. Programmerstellung

Zur praktischen Anwendung der abgeleiteten Bedingungsgleichungen wurde das Unterprogramm BEDIAG in FORTRAN IV für die Rechanlage des Rechenzentrums Graz (UNIVAC 494) erstellt.

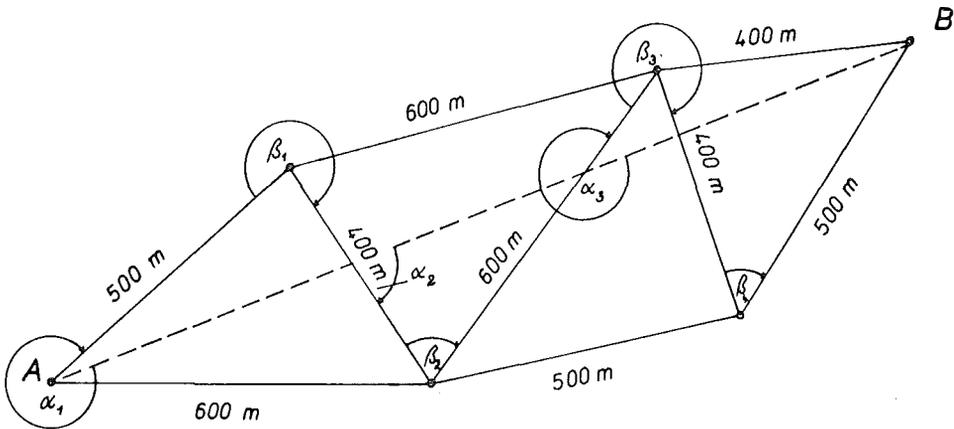
- Eingabeparameter: S (N) — Vektor der Polygonseiten
 P (N) — Vektor der gegenüberliegenden Seiten (mit Vorzeichen)
 N — Anzahl der Polygonseiten
- Ausgabeparameter: SKOEF (N) — Vektor der Koeffizienten der Polygonseiten für die linearisierte Bedingungsgleichung
 PKOEF (N) — Vektor der Koeffizienten der gegenüberliegenden Seiten für die linearisierte Bedingungsgleichung
 BETA (N) — Brechungswinkel des Polygonzuges
 ALFA (N) — Winkel zwischen Diagonale und Polygonseiten

Die benötigte CP-Zeit für die Aufstellung einer Bedingungsgleichung über vier bis sechs Dreiecke ist 0,1 sec.

3. Praktische Beispiele

Die Bedingungsgleichung kann wegen ihrer allgemeinen Form für alle netzeigenen Bedingungen in Streckennetzen verwendet werden. Sie ermöglicht somit eine weitgehende Automatisierung bei der bedingten Ausgleichung. Die Anwendung im Fehlerfortpflanzungsgesetz läßt eine einfache Fehlerrechnung für mittels Dreiecksketten (Traversen) verbundene Punkte zu.

1. Beispiel: Diagonale über vier Dreiecke



Koeffizienten der Bedingungsgleichung

	Polyg. S.	Gegen. S.	Beta	Alfa	Koeffizienten
1	500,000			377,8152	0,55271
2	400,000	- 600,000	307,9786	85,7939	-0,26297
3	600,000	600,000	78,3653	364,1592	0,20264
4	400,000	- 500,000	338,0321	102,1912	-0,23370
5	500,000	400,000	57,0198	359,2110	0,32307

Anzahl der Polygonseiten: 5

Länge der Diagonale: 1452,936

Der Programmausdruck enthält in den beiden ersten Spalten die Eingabedaten (Polygonseiten und Gegenseiten), außerdem die Brechungswinkel und die Winkel der Polygonseiten gegen die Diagonale und in den beiden letzten Spalten die Koeffizienten der Seiten. Die linearisierte Bedingungsgleichung lautet:

$$ds = 0,55271 ds_1 - 0,26297 ds_2 + 0,20264 ds_3 - 0,23370 ds_4 + 0,32307 ds_5 + 0,51625 dp_1 + 0,58164 dp_2 + 0,25419 dp_3 + 0,76575 dp_4$$

A. Bedingter Ausgleich für gleichgewichtige Streckenmessungen
 eingeführter Meßwert $s = 1452,78$ m
 mit den gemessenen Strecken gerechnet (s) = 1452,937 m

$$s + v_s = (s) + ds$$

$$w_s = (s) - s = + 0,157 \text{ m}$$

$$ds - v_s + w_s = 0$$

Ergebnis: verbesserte Seiten s_i, p_i und s

$$s_1 = 499,97 \text{ m}$$

$$p_1 = 599,97 \text{ m}$$

$$s_2 = 400,01 \text{ m}$$

$$p_2 = 599,97 \text{ m}$$

$$s_3 = 599,99 \text{ m}$$

$$s = 1452,84 \text{ m}$$

$$p_3 = 499,99 \text{ m}$$

$$s_4 = 400,01 \text{ m}$$

$$p_4 = 399,96 \text{ m}$$

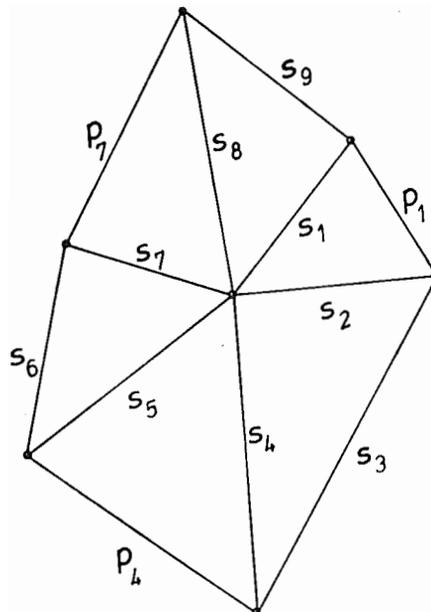
$$s_5 = 499,98 \text{ m}$$

B. Fehlerfortpflanzung für die Diagonale s

mittlerer Fehler der Meßstrecken	mittlerer Fehler der Diagonale aus dem Netz	bei Direktmessung
$ms_i = \pm 10 \text{ mm} \pm 10^{-5}s_i$	$ms = \pm 15,2 \text{ mm}$	$ms = \pm 17,6 \text{ mm}$
$ms_i = \pm 10^{-5}s_i$	$ms = \pm 6,8 \text{ mm}$	$ms = \pm 14,5 \text{ mm}$
$ms_i = \pm 10 \text{ mm}$	$ms = \pm 11,2 \text{ mm}$	$ms = \pm 10,0 \text{ mm}$

2. Beispiel: Bedingter Ausgleich einer Zentralfigur

$$\text{Gewichtannahme: } P_{st} = \frac{c}{s_i^2}$$



Koeffizienten der Bedingungsgleichung

	Polyg. S.	Gegen. S.	Beta	Alfa	Koeffizienten	
1	30686,337			103,8080	-0,43462	
		24298,197	50,8548			1,06627
2	31746,092			354,6628	0,29694	
		-49293,770	337,3219			-0,31148
3	59162,895			91,9847	1,15830	
		-31746,092	363,9507			-1,39155
4	49293,779			255,9354	-1,15673	
		43535,371	63,1698			0,79179
5	40807,558			119,1052	0,68315	
		-26731,406	354,7327			-2,10355
6	33217,045			273,8379	1,15016	
		-40807,558	305,4802			-1,80656
7	26731,406			379,3181	1,65774	
		43590,729	79,2514			1,19726
8	44038,904			258,5696	-1,69657	
		-30686,337	351,1908			0,15339
9	28852,316			9,7604	1,00259	

Anzahl der Polygonseiten: 9

Länge der Diagonale: 0,107782

	Seite	Koeffizienten	Gewichte	Verb (mm)
$s_1 = 30$	686,377	-0,28123	0,95579	+ 1,1
$s_2 = 31$	746,092	-1,09461	0,89303	+ 4,6
$p_1 = 24$	298,197	+1,06627	1,52441	- 2,6
$s_3 = 59$	162,895	+1,15830	0,25713	- 16,9
$s_4 = 49$	293,779	-1,46821	0,37040	+ 14,8
$p_4 = 43$	535,371	+0,79179	0,47486	- 6,2
$s_5 = 40$	807,558	-1,12341	0,54047	+ 7,8
$s_6 = 33$	217,045	+1,15016	0,81568	+ 1,3
$s_7 = 26$	731,406	-0,44581	1,25954	- 5,3
$p_7 = 43$	590,729	+1,19726	0,47366	- 9,5
$s_8 = 44$	038,904	-1,69657	0,46407	+ 13,7
$s_9 = 28$	852,316	+1,00259	1,08116	- 3,5

Literaturverzeichnis

[1] Jordan - Eggert - Kneissl: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. VI.

[2] Linkwitz, K.: Über die Substitution von Variablen bei der Ausgleichung nichtlinearer bedingter Beobachtungen“, ZfV 1972, S. 57.

Mitteilungen

Professor HAUER zum 70. Geburtstag

Professor *Dr. Friedrich Hauer* feierte am 1. September seinen 70. Geburtstag — seiner aktiven Einstellung gemäß am Deutschen Geodätentag in München. Wer ihn dort kennenlernte, konnte nur schwerlich dieses Alter zur Kenntnis nehmen; seine Schüler und Kollegen sind ebenso ungläubig und müssen das Datum am eigenen Alter nacheichen.

Betrachtet man hingegen Hauers wissenschaftlichen und beruflichen Lebensweg, tritt eine entgegengesetzte Verwunderung ein. Der Jubilar ist einer der ganz wenigen Geodäten in jedem Sinn des Wortes. Sein Horizont reicht nicht nur dem Interesse, den Publikationen und den praktischen Arbeiten nach über unseren gesamten Fachbereich, sondern, was noch schwerer wiegt, auch der echten, nach außen verantwortlichen Berufsposition nach!

Hauer wurde am 1. September 1906 in Thaya, Niederösterreich, geboren, besuchte dort die Volksschule und 1917 bis 1924 die Realschule in Waidhofen an der Thaya. In Wien inskribierte er sodann gleichzeitig, seinem weit gestreuten Interessensgebiet entsprechend, Bauingenieurwesen und Vermessungswesen an der Technischen Hochschule, wie auch astronomische und mathematisch-physikalische Vorlesungen an der philosophischen Fakultät der Universität. Am 27. Juni 1932 legte er die 2. Staatsprüfung aus Vermessungswesen ab und wurde sodann zunächst wissenschaftliche Hilfskraft, dann wissenschaftlicher Assistent bei den Professoren Schumann und Hopfner an der Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie an unserer Hochschule. Bereits am 15. Dezember 1934 wurde er zum Doktor der Technischen Wissenschaften promoviert.

Neben seiner Forschungstätigkeit war er in einer seltenen Intensität in den Lehrbetrieb integriert: von der vorzeitigen Pensionierung Hopfners im Frühjahr 1938 bis zu seiner Rückkehr 1945 sowie nach seinem tragischen Unfalltod 1949 neuerlich im Wintersemester 1949/50 supplierte er sämtliche Gegenstände der Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie; half wegen des kriegsbedingten Assistentenmangels beim Übungsbetrieb der Institute für Allgemeine Geodäsie und Angewandte Geodäsie aus; supplierte ab Herbst 1947 nach dem Ableben von Professor Dokulil teilweise am Institut für Allgemeine Geodäsie.

Trotz dieser Belastung habilitierte sich Hauer am 25. Juni 1940 aus Landesvermessung und Kartenentwurfslehre.

Im Juni 1949 erlangte er die Befugnis eines Ingenieurkonsulenten für Vermessungswesen.

Mit 18. Feber 1950 wurde er zum Ordentlichen Professor für Geodäsie und zehnten Vorstand des Institutes für Allgemeine Geodäsie ernannt.

Dort entfaltete er eine überaus fruchtbare Lehrtätigkeit.

Die meisten Vermessungsschaffenden unseres Bereiches sind durch Hauers Schule gegangen und erinnern sich an die außerordentliche Klarheit und das pädagogische Geschick seiner Vorlesungen, welche alle Probleme der Vermessungskunde umfaßten.

Seine eigene Forschungstätigkeit sowie die seines Institutes war von steter Anpassung an aktuelle Probleme gekennzeichnet.

Seine wissenschaftlichen und praktischen Arbeiten gliederten sich in zeitlicher Reihenfolge:

- a) Untersuchungen über Kreisteilungsfehler und die Achsfehler von Instrumenten sowie die zu ihrer Ermittlung gehörenden Apparaturen;
Entwicklung eines Gerätes zur Prüfung von Kreisteilungen;
- b) Untersuchungen zu Problemen der sphärischen Trigonometrie; der Satz von Legendre und sein Beweis; Untersuchungen zur Berechnung rechtwinkliger und rechtseitiger sphärischer Dreiecke;
- c) Arbeiten aus der Kartenentwurfslehre, insbesondere über die flächentreue Abbildung des Rotationsellipsoides in die Ebene durch Systeme geringster Streckenverzerrung;
- d) Arbeiten aus dem Bereiche der Allgemeinen Geodäsie, Untersuchungen über die Größe ihres Anwendungsbereiches, die Genauigkeit langer Polygonzüge und Entwurf sowie Berechnung von Kontrolltafeln zur Polygonzugsberechnung;

- e) Arbeiten allgemeiner Art aus verschiedenen Bereichen des Vermessungswesens, wie Grundlagenvermessungen für den Neubau von Bundesstraßen und Autobahnen, für Projektierungsarbeiten zum U-Bahn-Bau in Wien, für Brückenbauwerke und Tunnelbauten;
- f) seit 1965 Aufbau eines inter fakultären geodätischen Rechenzentrums an der Technischen Hochschule in Wien zur besonderen Unterstützung der praktischen Arbeiten des Vermessungswesens.

Besondere Erwähnung gebührt dem letzten Punkt.

Die im Rahmen seines Institutes erstellten Programme für elektronische Tisch- und Taschenrechner machten sein Institut europaweit bekannt; die Programmsammlungen mußten in mehreren Auflagen, auch fremdsprachig, herausgegeben werden.

Auch wenn man bedenkt, daß Hauer sein akademisches Amt lange bekleidet hat (im letzten Studienjahr hatte er die zweitlängste Amtsdauer aller Lehrer unserer Alma mater aufzuweisen), waren seine Funktionen überaus vielfältig und erfolgreich: Seit 1949 Mitglied der Kommission für die II. Staatsprüfung aus dem Vermessungswesen; vom Mai 1950 bis September 1960 gleichzeitig auch zweiter Stellvertreter des Vorsitzenden, seit Oktober 1960 gleichzeitig auch Vorsitzender dieser Kommission; seit März 1950 Mitglied der Kommission für die zweite Staatsprüfung aus dem Bauingenieurwesen, alles an der Technischen Hochschule in Wien; von 1955 bis 1970 auch Prüfungskommissär für die zweite forsttechnische und die zweite kulturtechnische Staatsprüfung an der Hochschule für Bodenkultur; seit Dezember 1956 fachtechnisches Mitglied des Patentgerichtshofes.

Vom Professorenkollegium für das Studienjahr 1954/55 zum Dekan der Fakultät für Angewandte Mathematik und Physik und für das Studienjahr 1955/56 zum Dekan der Fakultät für Naturwissenschaften gewählt; Vorsitzender zahlreicher Berufungskommissionen sowie seit 1960 Vorsitzender des Ehrungsausschusses der Technischen Hochschule in Wien; seit April 1952 Leitungsmitglied des Österreichischen Vereines für Vermessungswesen und der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie und seit 1973 Vizepräsident der Kooperation beider wissenschaftlichen Vereinigungen; seit 1950 Mitglied der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und seit 1972 Präsident dieser Kommission; Korrespondierendes Mitglied der Deutschen Geodätischen Kommission bei der Bayrischen Akademie der Wissenschaften und Kuratoriumsmitglied des Institutes für Kartographie der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. Vom Bundespräsidenten mit Entschließung vom 27. Juni 1968 durch Verleihung des Großen Silbernen Ehrenzeichens für Verdienste um die Republik Österreich ausgezeichnet.

Als Kongreßdirektor mit der Organisation des zehnten Kongresses der Fédération Internationale des Géomètres in Wien betraut; Leiter der Vorbereitungen für die 100-Jahr-Feier der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung.

Weiters war Hauer in den ersten Jahren des Bestehens der Studienkommission für Vermessungswesen von 1970 bis 1972 deren Vorsitzender, in welcher Zeit bei großem persönlichen Einsatz und pragmatischem Geschick seinerseits sehr frühzeitig funktionierende und sinnvolle Studienvorschriften zustandekamen.

Sein persönliches Wesen ist vor allem durch unbestechliche Korrektheit geprägt. Sein Wort hat Gewicht, wo immer er es ausspricht; seine vielen Funktionen sind Ausdruck des Vertrauens in seine Persönlichkeit.

Bei seinen Assistenten war und ist der Jubilar geachtet und beliebt zugleich. Er zwang niemand seine Meinung und seine Lieblingsthemen auf, förderte aber jede sinnvolle Eigeninitiative rückhaltlos.

In seiner Konsulententätigkeit kam ihm sein natürlicher und durch Selbstdisziplin bewahrter Sinn für wohlverstandene Exaktheit besonders zugute. Seine Ingenieurstätigkeit brachte ihm sowohl in technischer als auch wirtschaftlicher Hinsicht den Ruf weit überdurchschnittlicher Seriosität.

Wie aus seiner Laufbahn zu sehen ist, war er dabei aber jeder Neuerung aufgeschlossen und gab sich auch am Ende seiner akademischen Tätigkeit niemals mit dem Erreichten, Gesicherten zufrieden.

Im Privatleben, welches er niemals mit dem Beruf zu vermengen suchte, ist er ein vorbildlicher Familienvater und ein Gesprächspartner von natürlicher Herzlichkeit.

Im Namen der großen Gemeinde seiner Schüler, Mitarbeiter und Kollegen wünschen wir dem Jubilar, daß wir ihm noch sehr oft bei freudigen Anlässen sein Alter nicht glauben können.

H. Schmid

Bericht über eine Sitzung der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung

Am 2. April 1976 traten dreizehn der zwanzig Mitglieder der ÖKIE zu einer Sitzung an der Technischen Universität Wien zusammen. Sieben Mitglieder hatten sich entschuldigt.

Präsident *Hauer* berichtete zunächst über Ereignisse in der UGGI. Die Mitglieder *Moritz* und *Rinner* hatten vom 23. bis 27. Feber 1976 an einer Sitzung des Exekutivkomitees der IAG in Paris teilgenommen. In einem an Präsident *Hauer* gerichteten Schreiben hat *G. Birardi*, Ancona, die Einrichtung einer Spezialstudiengruppe für das zentraleuropäische Geoid mitgeteilt und ersucht, einen österreichischen Vertreter zu nominieren. Über einen durch *Moritz* überbrachten Vorschlag von *Rinner* wird *Bretterbauer* als Vertreter der ÖKIE in diese SSG 5.50 entsandt.

Moritz berichtete, daß die Schriftleitung des „Bulletin Geodesique“ auf Prof. *I. Mueller*, Columbus, Ohio, übergegangen ist und daß unter demselben Schriftleiter eine neue Zeitschrift mit dem Namen „Manuscripta Geodaetica“ in Berlin erscheinen wird.

Senftl legte sodann den Bericht des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen über die Arbeiten der Abteilung K2 (Erdmessung) des Jahres 1975 und das Programm für die Feldarbeitsperiode 1976 vor. Beides wurde zustimmend zur Kenntnis genommen.

Zu dem Punkt der Tagesordnung „Reisen der Kommissionsmitglieder“ beschloß die ÖKIE Präsident *Hauer* in seiner Eigenschaft als korrespondierendes Mitglied der Deutschen Geodätischen Kommission vom 1. bis 4. September 1976 zum 60. Deutschen Geodätentag nach München zu entsenden. *Moritz* wird am Symposium „Physik der Erde“ vom 25. bis 30. Oktober 1976 in Weimar teilnehmen und einen Fachvortrag halten.

Im Hinblick auf das wachsende Ansehen der ÖKIE in der internationalen Erdmessung und dem Wunsch des Finanzkomitees der UGGI entsprechend, faßte die ÖKIE den Beschluß, die Hebung Österreichs in die Beitragskategorie 3 beim Bundesministerium für Bauten und Technik zu beantragen.

Der aus den Mitgliedern *Moritz* (Einberufer), *Bretterbauer*, *Eidherr*, *Hauer*, *Hubeny* und *Schmid* zusammengesetzte Ausschuß zur Beratung eines neues Statuts der ÖKIE, hatte in mehreren Sitzungen einen Vorschlag erarbeitet, der nun in dieser Sitzung zur Diskussion vorgelegt wurde. Nach ausführlicher Wechselrede, an der sich zum Problem des Nationalkomitees besonders *Moritz* und *Steinhauser* beteiligten, wurde festgelegt, daß in Hinkunft die ÖKIE die offizielle Verbindungsstelle Österreichs zur UGGI sein wird. Der vom Ausschuß erarbeitete und von *Moritz* ausführlich erläuterte Entwurf für ein neues Statut sieht bei möglichst geringen Änderungen des geltenden Statuts eine Betonung des wissenschaftlichen Charakters der Kommission vor. Der Entwurf wurde nach Einarbeitung geringfügiger Änderungen einstimmig angenommen und Präsident *Hauer* beauftragt, Verhandlungen mit dem Bundesministerium für Bauten und Technik aufzunehmen.

In einem weiteren Tagesordnungspunkt informierte *Bretterbauer* die Kommission von der Veröffentlichung eines „Konzeptes für die astronomische Forschung in Österreich“ durch das Bundesministerium für Wissenschaft und Forschung. Die Kommission kam zur einhelligen Meinung, daß die Erstellung eines ähnlichen Konzeptes für die geodätische Forschung in Österreich wünschenswert wäre und beauftragte über Antrag von *Moritz* den Präsidenten *Hauer*, entsprechende Schritte im Namen der österreichischen Geodäsieprofessoren einzuleiten.

Abschließend teilte *Moritz* mit, daß die Grazer Professoren, eine Idee von *Hubeny* aufgreifend, die Schaffung einer Auszeichnung für wissenschaftliche Verdienste um die Erdmessung vorschlagen, und zwar durch Stiftung einer „Friedrich-Hopfner-Gedenkmedaille“. Die Kommission begrüßte den Vorschlag und setzte zur Ausarbeitung eines Statuts ein Komitee aus den Mitgliedern *Bretterbauer*, *Hauer* und *Moritz* ein.

K. Bretterbauer

Buchbesprechung

Dittrich - Hrbek - Kaluza: Das Österreichische Vermessungsrecht. Manzsche Gesetzausgabe — Sonderausgabe Nr. 23, Gr. 8°, XII, 286 Seiten; Preis brosch. S 330,—, Ganzleinen geb. S 380,—; Manzsche Verlags- und Universitätsbuchhandlung, Wien, 1976.

Anläßlich der Novelle zum Vermessungsgesetz, BGBl. 238/1975, und der in der Folge novellierten Vermessungsverordnung, BGBl. 181/1976, wurde die 1969 von Dittrich und Marhold verfaßte Sonderausgabe Nr. 23 der Manzschen Gesetzausgabe neu aufgelegt.

Der neue Band umfaßt die im Zusammenhang mit der Landesvermessung und dem Grenzkataster bestehenden gesetzlichen Bestimmungen einschließlich umfangreicher Erläuterungen und wichtigen Erlässen der zuständigen Zentralstellen; im einzelnen sind neben Vorwort, Verzeichnis der Abkürzungen, Literaturverzeichnis und der Einleitung enthalten:

- I. *Vermessungsgesetz*, BG über die Landesvermessung und den Grenzkataster mit den Abschnitten: Allgemeine Bestimmungen, Grenzkataster, Neuanlegung des Grenzkatasters, Amtshandlungen im Zusammenhang mit dem Grenzkataster, Sonderbestimmungen für Vermessungsbefugte, Mitwirkung der Grundeigentümer und der Behörden, Verhältnis zu den Grundbuchgerichten und den Finanzbehörden, Verwaltungsabgaben und Kosten, zivilrechtliche Bestimmungen, Straf-, Übergangs- und Schlußbestimmungen, Änderungen anderer Gesetze sowie der Anhang mit Angabe der Benützungsorten und deren Mindestausmaße.
- II. *Vermessungsverordnung*, V. des BMfBuT über Vermessungen und Pläne mit den Bestimmungen über Kennzeichnung der Grenzen, Vermessung der Standpunkte und der Grenzpunkte, Prüfung von Grenzzeichen, Fehlergrenzen samt Tabellen, Art der Berechnung der Koordinaten und der Flächen, nähere Vorschriften über Pläne und Mappenberichtigungen, Sonderbestimmungen über Pläne als Behelfe gemäß § 47 Flurverfassungs-Grundsatzgesetz 1951 sowie im Anhang der für Pläne anzuwendende Zeichenschlüssel.
- III. *Verordnung* des BMfBuT, BGBl. 386/1968, mit der die *Sprengel der Vermessungsämter* bestimmt sind, einschließlich der Anschriften und des Hinweises auf die für den Parteienverkehr bestimmten Zeiten.
- IV. *Staatsgrenzgesetz*, BGBl. 9/1974, mit den Abschnitten: Begriffsbestimmungen, Freihalten der Grenzflächen, Baulichkeiten und Eigentumsgrenzzeichen an der Staatsgrenze, Innerstaatliche Hinweise auf die Staatsgrenze, Bekanntgabe von Arbeiten an der Staatsgrenze u. a.
- V. *Liegenschaftsteilungsgesetz*, BGBl. 3/1930 i. g. F. über die grundbücherliche Teilung, Ab- und Zuschreibung.
- VI. *Allgemeines bürgerliches Gesetzbuch*, Auszug über den natürlichen und künstlichen Zuwachs als Eigentumserwerb, Rechte der Teilhaber in der gemeinschaftlichen Sache, Erneuerung und Berichtigung der Grenzen, vermutete Gemeinschaft, Recht des Schadenersatzes und der Genugtuung.
- VII. *Ziviltechnikergesetz*, BGBl. 146/1957 i. g. F. über die staatlich befugten und beeedeten Architekten, Ingenieurkonsulenten und Ziviltechniker samt Abdruck der Landesregeln.
- VIII. *Forstgesetz*, BGBl. 440/1975, Auszug über Begriffsbestimmungen, Wald im Verhältnis zum Grenzkataster, Neubewaldung, Rodungsverfahren, Behörden und Zuständigkeiten.
- IX. *Bodenschätzungsgesetz*, BGBl. 233/1970, über die Schätzung des landwirtschaftlichen Kulturbodens.

Am Schluß enthält der Band eine für die Anwendung des VermG übersichtliche *Fristentabelle* sowie ein ausführliches *Schlagwortverzeichnis*.

Von den durch die Novelle des VermG eingetretenen Änderungen sind in der Folge wesentliche Bestimmungen in Kurzform zusammengefaßt.

Das bisherige Antragsprinzip hinsichtlich der grundstücksweisen Umwandlung des Grundsteuerkatasters in den Grenzkataster wurde zur Beschleunigung des Aufbaues des Grenzkatasters durch ein vereinfachtes Verfahren erweitert, damit die durch die zahlreichen Teilungen entstehenden Grundstücke von Amts wegen in den Grenzkataster eingetragen werden können.

Die bisherigen Bestimmungen über die „Änderung von Katastralgemeinden“ wurden den Bedürfnissen der Praxis entsprechend erweitert in „Neuschaffung, Änderung, Auflassung und Benennung von Katastralgemeinden“.

Entsprechend der bisherigen Übung wurde nunmehr normiert, daß die Katastralmappe des Grenzkatasters im System der Landesvermessung in den Maßstäben 1:1000, 1:2000 oder 1:5000 anzulegen ist, damit der sz. aus dem Klaftermaß abgeleitete Maßstab 1:2880 zufolge des seit mehr als 100 Jahren bestehenden metrischen Maßsystems ersetzt wird.

Hinsichtlich der Grundstücke des Grundsteuerkatasters wurden vereinfachte Regelungen über die Vereinigung unter bestimmten Bedingungen sowie über die Berichtigung der Katastralmappe von Amts wegen getroffen.

Abschließend wird noch auf die ausführlichen Erläuterungen, Anmerkungen, Hinweise und einschlägigen Erlässe hingewiesen, deren Wiedergabe insgesamt etwas mehr als die halbe Seitenanzahl umfaßt, woraus zu ersehen ist, daß dieser Band ein unentbehrliches Nachschlagwerk, insbesondere für die mit Kataster- und Liegenschaftsangelegenheiten befaßten Vermessungsingenieure und Juristen darstellt.

Friedrich Hudecek

Contents

Ecker, Erhart: Least-squares adjustment.

Gerstbach, Gottfried: Azimuth measurements by one-second theodolites.

Neumayr, K. R.: A Conditional Equation for a long Diagonal crossing some Triangles in a Trilateration Net.

Adressen der Autoren

Ecker, Erhart, Dr.-Ing., Assistenz-Prof. am Lehrstuhl für Höhere Geodäsie und Astronomie der Technischen Universität Berlin, 1. Berlin 20, Am Pichelsee 3.

Gerstbach, Gottfried, Dipl.-Ing. Dr. techn., Univ.-Assistent, Institut für Höhere Geodäsie der Technischen Universität Wien, Gußhausstraße 29, A-1040 Wien.

Neumayr, K. R., Dipl.-Ing., Univ.-Assistent, Institut für Landesvermessung und Photogrammetrie der Technischen Universität Graz, Rechbauerstraße 12, A-8010 Graz.

Österreichischer Verein für Vermessungswesen
und Photogrammetrie

Friedrich-Schmidt-Platz 3, 1082 Wien

Sonderhefte zur Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen
und Photogrammetrie

- Sonderheft 20: H. G. Jerie, *Weitere Analogien zwischen Aufgaben der Mechanik und der Ausgleichsrechnung*. 24 Seiten mit 14 Abbildungen, 1960. Preis S 32,— (DM 5,50).
- Sonderheft 21: Mader, *Die zweiten Ableitungen des Newton'schen Potentials eines Kugelsegments — Topographisch berechnete partielle Geoidhebungen. — Tabellen zur Berechnung der Gravitation unendlicher, plattenförmiger, prismatischer Körper*. 36 Seiten mit 11 Abbildungen, 1960. Preis S 42,— (DM 7,50).
- Sonderheft 22: Moritz, *Fehlertheorie der Graphisch-Mechanischen Integration — Grundzüge einer allgemeinen Fehlertheorie im Funktionenraum*. 53 Seiten mit 6 Abbildungen, 1961. Preis S 52,— (DM 9,—)
- Sonderheft 23: Rinner, *Studien über eine allgemeine, voraussetzungslose Lösung des Folgebildanschlusses*. 44 Seiten, 1960. Preis S 48,— (DM 8,—)
- Sonderheft 24: *Hundertjahrfeier der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung 23. bis 25. Oktober 1963*. 125 Seiten mit 12 Abbildungen, 1964. Preis S 120,— (DM 20,—)
- Sonderheft 25: *Proceedings of the International Symposium Figure of the Earth and Refraction*; Vienna, March 14th—17th, 1967. 342 Seiten mit 150 Abbildungen, 1967. Preis S 370,— (DM 64,—).
- Sonderheft 26: Waldhäusl, *Funktionale Modelle der Streifen- und Streifenblockausgleichung mit einfachen und Spline-Polynomen für beliebiges Gelände*. 106 Seiten, 1973. Preis S 100,— (DM 15,—).
- Sonderheft 27: Meyer, *Über die transalpine Ölleitung*, 26 Seiten, 1974. Preis S 70,— (DM 10,—)
- Sonderheft 28: *Festschrift Karl Ledersteger*. 317 Seiten, 1970, Preis S 200,— (DM 30,—)
- Sonderheft 29: Peters, *Problematik von Toleranzen bei Ingenieur- sowie Besitzgrenzvermessungen*, 227 Seiten, 1974. Preis S 120,— (DM 18,—). (Vergriffen.)
- Sonderheft 30: Bauer, *Aufsuchen oberflächennaher Hohlräume mit dem Gravimeter*, 140 Seiten, 1975. Preis S 100,— (DM 15,—)
- Sonderheft 31: Ackerl u. Foramitti, *Empfehlungen für die Anwendung der Photogrammetrie im Denkmalschutz, in der Architektur und Archäologie*. 78 Seiten, 41 Abbildungen, 1976. Preis S 120,— (DM 18,—)

Dienstvorschrift Nr. 9. *Die Schaffung der Einschaltpunkte*; Sonderdruck des österreichischen Vereins für Vermessungswesen und Photogrammetrie, 129 Seiten, 1974. Preis S 100,—

PLAN-VARIOGRAPH

OPTISCHES UMZEICHENGERÄT

kann Planvorlagen

PREISGÜNSTIG

RASCH

ZEICHNERISCH

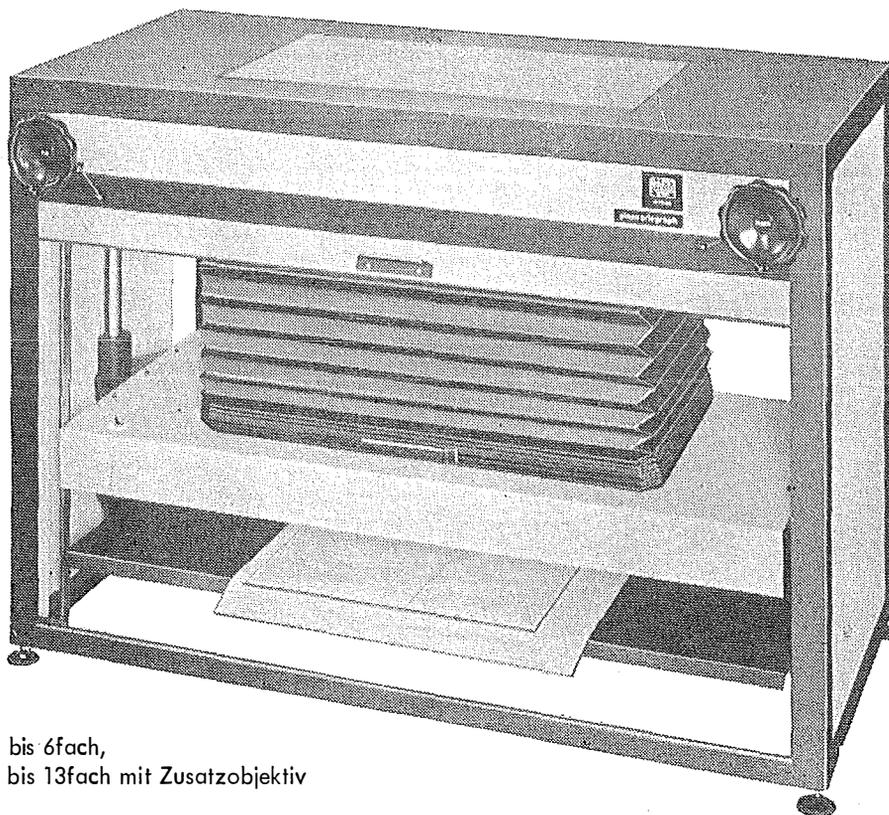
PHOTOGRAPHISCH

VERGRÖßERN*

VERKLEINERN*

UMZEICHNEN

ENTZERREN



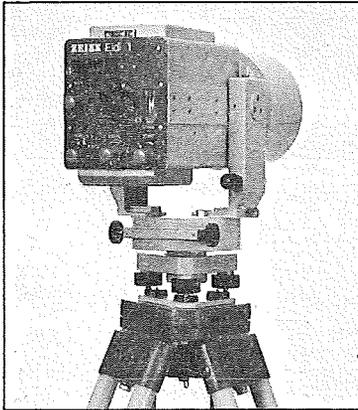
* bis 6fach,
bis 13fach mit Zusatzobjektiv

Angebote und Prospekte direkt vom Erzeuger:

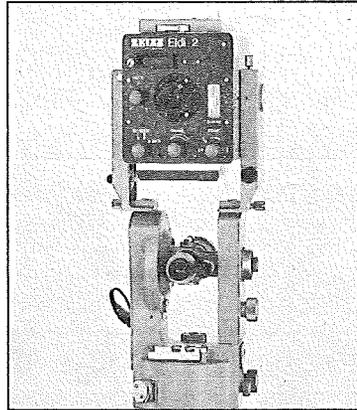
r-a rost

A-1161 WIEN • MÄRZSTR. 7 • TELEX: 1-3731 • TEL. 0222/92 32 31

Die drei elektrooptischen Distanzmesser von Zeiss: ELDI 1-2-3. Für jede Reichweite von 0-5000 m das zweckmäßige Instrument. Kompakt. Zuverlässig. Genau.



Zeiss ELDI 1,
Solo-Entfernungsmesser



Zeiss ELDI 2
auf Theodolit

Das wirtschaftliche Distanz-
meßsystem

- ELDI 1 für große Reichweiten
0-5000 m
- ELDI 2 für universellen Einsatz
0-3000 m
- ELDI 3 für den Nahbereich
0-1500 m

ELDI 2 Mining: schlagwetter-
sichere Ausführung

Klein, leicht, kompakt: Optik,
Elektronik und Batterie, alles in
einem Gehäuse.

Zielen, Einschalten, Auslösen:
vollautomatischer Meßvorgang
innerhalb 5 Sek.,

mit Nullpunktkorrektur, Umschal-
ten der Meßfrequenzen, unter
Berücksichtigung der atmosphä-
rischen Bedingungen.

Automatisches Abschalten
des Phasenmessers bei vorüber-
gehenden Hindernissen und
anschließende Vollendung der
Messung: Keine Messung geht
verloren.

500-1000 Messungen bei
Stromversorgung durch 6 Baby-
zellen, wahlweise Trocken-
batterien oder wiederaufladbare
NiCd-Akkumulatoren.

Hohe Meßgenauigkeit,
je nach Ausrüstung, gewähltem
Bereich, Reflektor und atmosphä-
rischen Bedingungen:
 $\pm 5-10 \text{ mm} \pm 2 \cdot 10^{-6} D$ bzw.
 $\pm 1-2 \text{ cm} \pm 2 \cdot 10^{-6} D$.

Vielseitig im Einsatz, univer-
sell in der Kombination;
auch als Aufsatzgeräte für andere
Fabrikate.

Lassen Sie sich über
das ZEISS ELDI Angebot genauer
informieren. Schreiben Sie an:

Carl Zeiss, D-7082 Oberkochen.

ZEISS

Der Blick in die Zukunft

ZEISS ÖSTERREICH GESELLSCHAFT M. B. H.

1096 WIEN, Rooseveltplatz 2 — Telefon 427525 — Fernschreiber (07) 4839
8044 GRAZ, Mariatroster Straße 172c — Telefon 031 22 / 36 21 23
5110 OBERNDORF bei Salzburg, Höher-Göll-Straße 16 — Telefon 062 72 / 72 01

NEUERSCHEINUNG

Sonderheft Nr. 31
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen und Photogrammetrie

F. ACKERL und H. FORAMITTI

Empfehlungen für die Anwendung der Photogrammetrie im
Denkmalschutz, in der Architektur und Archäologie

Wien 1976

Preis S 120,- (DM 18,-)

Zu beziehen durch den Österreichischen Verein für Vermessungs-
wesen und Photogrammetrie, Friedrich-Schmidt-Platz 3, 1082 Wien

Sonderheft Nr. 30
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Dipl.-Ing. Dr. techn. Bruno Bauer, Innsbruck

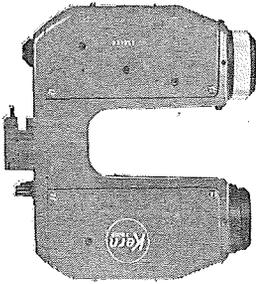
Aufsuchen oberflächennaher Hohlräume mit dem
Gravimeter

Wien 1975

Preis S 100,- (DM 15,-)

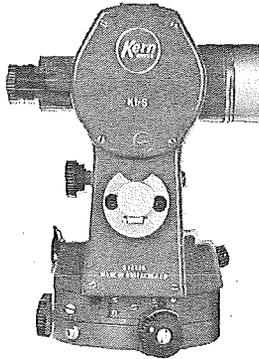
Zu beziehen durch den Österreichischen Verein für Vermessungs-
wesen und Photogrammetrie, Friedrich-Schmidt-Platz 3, 1082 Wien

1 2 3



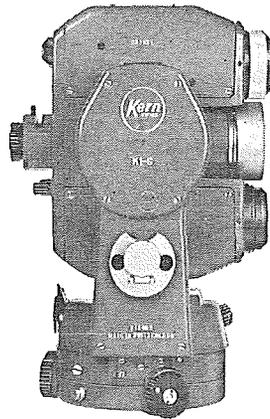
DM500

das auf das Theodolitfernrohr aufsteckbare elektrooptische Distanzmessgerät: Klein, 1,6 kg leicht und kompakt, misst es Distanzen bis 500 m und mehr auf wenige Millimeter genau. Die Messung erfolgt vollautomatisch; zur Vorbereitung sind nur drei Bedienelemente notwendig.



DKM 2-A K1-S

der erfolgreiche Sekunden-theodolit DKM 2-A mit digitalisierter Kreisablesung (direkt $2^{\circ}/1''$) oder der neue Ingenieurtheodolit K 1-S mit bequemer Skalenablesung (direkt $1^{\circ}/0,5'$). Zwei moderne, leistungsfähige Kern-Theodolite mit automatischer Höhenkollimation.



DM500/DKM 2-A DM500/K1-S

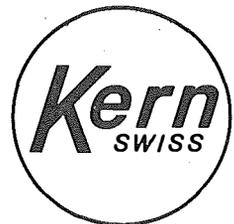
Zwei unerreicht handliche elektronische Tachymeter. Eine einzige Zielung genügt für die Messung von Distanz, Höhenwinkel und Richtung. Alle Bedienungs- und Ableseorgane befinden sich in Augenhöhe des Beobachters. Das Fernrohr bleibt durchschlagbar. Und beim Stationswechsel lässt sich die gesamte Ausrüstung bequem auf dem Stativ tragen.

Dr. Wilhelm
Artaker

1052 Wien, Kettenbrückeng. 16

Telefon (0 22 2) 57 76 15-0

Fernschreiber: 01-2322 dr-art



Sonderheft Nr. 28
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen und Photogrammetrie

FESTSCHRIFT

KARL LEDERSTEGE

Wien 1970

Preis S 200,- (DM 30,-)

Zu beziehen durch den Österreichischen Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie, Friedrich-Schmidt-Platz 3, 1082 Wien

Sonderdruck
des Österreichischen Vereines
für Vermessungswesen und Photogrammetrie
mit Genehmigung des Bundesamtes für
Eich- und Vermessungswesen

Dienstvorschrift Nr. 9
Die Schaffung der Einschaltpunkte

Wien 1974

Preis S 100,-

Zu beziehen durch den Österreichischen Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie, Friedrich-Schmidt-Platz 3, 1082 Wien