P. b. b.

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen

Nr. 3 | Baden bei Wien, Ende Juni 1959 | XLVII. Jg.

INHALT:

Abhandlungen:

Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen), der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

Baden bei Wien 1959

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österreichischer Verein für Vermessungswesen, Wien VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3
Druck von Rudolf M. Rohrer, Baden bei Wien

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen

Für die Redaktion der Zeitschrift bestimmte Zusc riften und Manuskripte sind an eines der nachstehenden Redaktionsmitglieder zu richten:

Redakteure:

o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Hans Rohrer, Wien IV, Technische Hochschule
Präsident i. R. Dipl.-Ing. Karl Lego, Wien I, Hohenstaufengasse 17
o. Prof. Hofrat Dr. Karl Ledersteger, Wien IV, Technische Hochschule

Redaktionsbeirat:

Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Alois Barvir, Graz, Technische Hochschule
o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Friedrich Hauer, Wien IV, Technische Hochschule
o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Karl Hubeny, Graz, Technische Hochschule, Rechbauerstraße 12
Wirkl. Hofrat Ing. Karl Neumaier, Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3
Dipl.-Ing. Dr. jur. Franz Schiffmann, Präsident des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3
Redakteur des Annoncenteiles: *OKdVD. Dipl.-Ing. M. Schenk*, Wien VIII, Krotenthallergasse 3

Für die Redaktion des Mitteilungsblattes bestimmte Zuschriften sind an *Rat d. VD. Dipl.-Ing. R. Arenberger*, Wien XVIII, Schopenhauerstraße 32, zu senden.

Die Manuskripte sind in lesbarer, druckreifer Ausfertigung, die Abbildungen auf eigenen Blättern als Reinzeichnungen in schwarzer Tusche und in möglichst großem, zur photographischen Verkleinerung geeignetem Maßstab vorzulegen. Von Photographien werden Hochglanzkopien erbeten. Ist eine Rücksendung der Manuskripte nach der Drucklegung erwünscht, so ist dies ausdrücklich zu bemerken.

Die Zeitschrift erscheint sechsmal jährlich, u. zw. Ende jedes geraden Monats.

Redaktionsschluß: jeweils Ende des Vormonats.

Bezugsbedingungen: pro Jahr:

Mitgliedsbeitrag für den Verein oder die Österr. Gesellschaft für Photogrammetrie	S 50·—
für beide Vereinigungen zusammen	S 55·—
Abonnementgebühr für das Inland	S 72·—
Abonnementgebühr für Deutschland	DM. 15·—
Abonnementgebühr für das übrige Ausland	sfr. 15·—

Postscheck-Konto Nr. 119.093 Telephon: 45-92-83

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

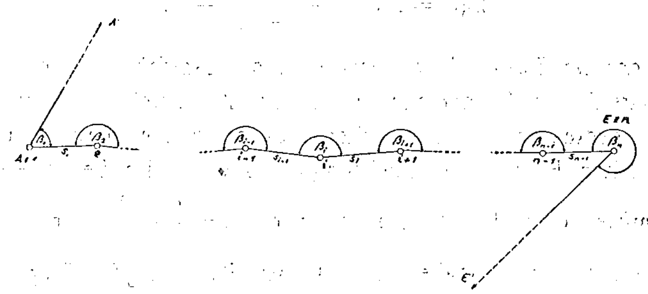
REDAKTION:
emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. Lego und o. Prof. Hofrat Dr. phil. K. Ledersteger

Nr. 3 Baden bei Wien, Ende Juni 1959 XLVII. Jg.

Ein Beitrag zur Fehlertheorie der beiderseits angeschlossenen Polygonzüge

Von Karl Hubeny, Graz

In Ergänzung der reichhaltigen Literatur über die Fehlertheorie der Polygonzüge soll im Folgenden eine einheitliche Darstellung der Fehlertheorie des gestreckten, gleichseitigen und beiderseits angeschlossenen Polygonzuges für alle dabei möglichen Voraussetzungen hinsichtlich des Anschlusses in allgemeiner Form gegeben werden; im Anschluß daran wird die Entwicklung von Näherungsformeln mitgeteilt. Allen nachstehenden Betrachtungen liegt die in der untenstehenden Abbildung angedeutete Bezeichnung der Bestimmungsstücke des Polygonzuges zugrunde.



a) *Der Längsfehler*

Der im Punkt P_i in der Zugrichtung bestehende Lagefehler (Längsfehler in P_i) setzt sich aus zwei Teilen zusammen, nämlich aus einem Teil, der durch die Summierung der Streckenfehler in den Strecken s_1 bis s_{i-1} entsteht, und aus der Lageänderung, die dieser Punkt durch die nach der Zugberechnung erfolgende Aufteilung des gesamten Längsfehlers erfährt.

Wir nehmen in den einzelnen Strecken $s_1 - s_{n-1}$ die bestimmten Fehler $ds_1 - ds_{n-1}$ an; vor der Ausgleichung besteht dann im Punkt P_i der wahre Längsfehler

$$dl_i = [ds]_1^{i-1} \; ; \qquad \ldots \; (1)$$

im Endpunkt des Zuges dagegen der wahre Längsfehler

$$dl_n = [ds]_1^{n-1} \; . \qquad \ldots \; (2)$$

Durch die übliche Ausgleichung bei der Annahme gleich langer Seiten erfährt der Punkt P_i eine Lageänderung in der Zugsrichtung im Betrage von

$$v_{li} = - \, dl_n \frac{i-1}{n-1} = - \, [ds]_1^{n-1} \frac{i-1}{n-1} \; ;$$

der wahre Längsfehler in P_i ist demnach mit

$$dL_i = dl_i - dl_n \frac{i-1}{n-1} = \frac{1}{n-1} \Big[(n-1) \, dl_i - (i-1) \, dl_n \Big] \; . \qquad \ldots \; (3)$$

gegeben.

Diesen letzten Ausdruck schreiben wir ausführlich an; es ist

$$dL_i = \frac{1}{n-1} \Big[(n-1) \, ds_1 + \ldots\ldots + (n-1) \, ds_{i-1}$$

$$- (i-1) \, ds_1 - \ldots\ldots - (i-1) \, ds_{i-1} - (i-1) \, ds_i - \ldots\ldots - (i-1) \, ds_{n-1} \Big] \; ;$$

zusammengezogen ergibt dies

$$dL_i = \frac{1}{n-1} \Big\{ (n-i) \, [ds]_1^{i-1} \; (i-1) \, [ds]_1^{n} \Big\} \; . \qquad \ldots \; (4)$$

Wir führen anstelle der wahren Abweichungen den mittleren Streckenfehler $\pm \, m_s$ ein, d. h. wir haben das Fehlerfortpflanzungsgesetz auf den vorstehenden Ausdruck anzuwenden. Damit folgt aus (4)

$$m_{li}^2 = m_s^2 \frac{(n-i)(i-1)}{n-1} \; . \qquad \ldots \; (5)$$

Dies ist der im Punkt P_i zu befürchtende Lagefehler in der Zugsrichtung, also der Längsfehler in P_i; der eben mitgeteilte Ausdruck gilt immer dann, wenn beidseitiger Koordinatenanschluß vorliegt, da er, wie ersichtlich, unabhängig ist von den möglichen Formen des Richtungsanschlusses. Im Besonderen erhält man für die Zugsmitte, d. h. für die Punktnummer $i = \frac{n+1}{2}$ (n muß als ungerade Zahl vorausgesetzt werden, da es sonst keinen Punkt in der Zugsmitte gibt) den Ausdruck

$$m_{lm} = \pm \frac{m_s}{2} \sqrt{n-1} \; . \qquad \ldots \; (5a)$$

b) *Der Querfehler*

Im Interesse der abgerundeten Darstellung schicken wir der Behandlung des eigentlichen Themas, des Querfehlers im beiderseits lagemäßig angeschlossenen

Polygonzug, die Berechnung der im Punkt P_i eines freien Polygonzuges zu erwartenden Lageunsicherheit senkrecht zur Zugsrichtung (Querfehler in P_i) voraus. Beim freien Polygonzug besteht, wie bekannt, nur einseitiger Koordinaten- und Richtungsanschluß; es sind also neben der Anschlußrichtung und den Koordinaten des Punktes $A = P_1$ die Bestimmungsstücke s_1 bis s_{n-1} und β_1 bis β_{n-1} gegeben.

Wir denken uns in den Brechungswinkeln β_1 bis β_{n-1} die wahren Fehler $d\beta_1$ bis $d\beta_{n-1}$; da diese voneinander unabhängig sind, können ihre Auswirkungen im Punkt P_i — gleiche Seitenlängen und die gestreckte Zugsform vorausgesetzt — sofort angegeben werden. Der Punkt P_i erhält nämlich zufolge $d\beta_1$, $d\beta_2 \ldots\ldots d\beta_{i-1}$ die Querverschiebungen

$$s\,(i-1)\,d\beta_1,\; s\,(i-2)\,d\beta_2,\; \ldots\ldots,\; s\,d\beta_{i-1};$$

summiert man diese, so ergibt sich

$$dq_i = s\left\{(i-1)\,d\beta_1 + (i-2)\,d\beta_2 + \ldots\ldots + d\beta_{i-1}\right\} = s\left[\,(i-k)\,d\beta_k\,\right]_{k=1}^{k=i-1} \quad \ldots \quad (6)$$

Indem man wieder anstelle der wahren Abweichungen den mittleren Winkelfehler $\pm\, m_\beta$ einführt, erhält man nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$m_{qi}^2 = s^2\, m_\beta^2 \left[\,(i-k)^2\,\right]_{k=1}^{k=i-1}.$$

Die hierin angezeigte Summe ist die Summe der Quadrate der Zahlen von 1 bis $i-1$, die mit $\frac{i}{6}\,(i-1)\,(2\,i-1)$ berechnet wird und mit der sich der im Punkte P_i zu erwartende Querfehler aus

$$m_{qi}^2 = s^2\, m_\beta^2 \cdot \frac{i}{6}\,(i-1)\,(2\,i-1) \quad \ldots \quad (7)$$

ergibt. Für diesen Ausdruck wird vielfach die Näherungsform

$$m_{qi}^2 = s^2\, m_\beta^2\, \frac{i^3}{3} \quad \ldots \quad (7a)$$

verwendet.

Bei der Entwicklung des im Punkt P_i eines beiderseits lagemäßig angeschlossenen Polygonzuges zu erwartenden Lagefehlers senkrecht zur Zugsrichtung, also des Querfehlers in P_i, muß man zwischen den drei dabei möglichen Formen des Richtungsanschlusses unterscheiden, nämlich

1. Richtungsanschluß weder im Anfangs- noch im Endpunkt,
2. Richtungsanschluß im Anfangs- oder im Endpunkt und
3. Richtungsanschluß im Anfangs- und Endpunkt.

Wir betrachten nacheinander diese möglichen Fälle und beginnen mit dem Fall 1., d. h. wir setzen weder im Anfangs- noch im Endpunkt einen Richtungsanschluß voraus. Indem wir wie immer die gestreckte Zugsform und gleichlange Seiten voraussetzen, können wir die Querverschiebung im Endpunkt als Folge der wahren Winkelfehler leicht angeben, es ist nämlich

$$dq_n = s\left\{\,(n-2)\;d\beta_2 + (n-3)\;d\beta_3 + \ldots\ldots + d\beta_{n-1}\right\}. \quad \ldots \quad (8a)$$

oder
$$dq_n = s\left[(n-k)\ d\beta_k\right]_{k=2}^{k=n-1} \quad \ldots \text{(8b)}$$

Die Summierung muß mit der Ordnungszahl zwei beginnen, da es im vorliegenden Fall einen Brechungswinkel β_1, d. h. die Ordnungszahl eins, nicht gibt.

Ebenso erhält man für den Punkt p_i den wahren Querfehler dq_i mit
$$dq_i = s\left[(i-k)\ d\beta_k\right]_{k=2}^{k=i-1} \quad \ldots \text{(8c)}$$

Denkt man sich den Polygonzug um seinen Anfangspunkt nun solange verdreht, bis die erste Zugseite ihre wahre Richtung erhält, so geben die Ausdrücke (8) die wahren Querabweichungen in den Punkten $P_n = E$ und P_i an. In weiterer Folge wird die Querabweichung dq_n im Endpunkt dadurch zum Verschwinden gebracht, daß jedem Punkt P_i eine Lageänderung senkrecht zur Zugsrichtung im Betrage von
$$v_{qi} = -\ dq_n \frac{i-1}{n-1}$$
erteilt wird (Aufteilung des Querfehlers); im Punkt P_i setzt sich demnach der senkrecht zur Zugsrichtung bestehende wahre Lagefehler dQ_i nach erfolgter Ausgleichung, ähnlich wie der Längsfehler, aus zwei Teilbeträgen, nämlich aus der Differenz
$$dQ_i = dq_i - dq_n \frac{i-1}{n-1}, \quad \ldots \text{(9)}$$
zusammen. Indem wir (9) in der Form
$$dQ_i = \frac{1}{n-1}\left\{(n-1)\ dq_i \ -\ (i-1)\ dq_n\right\}$$
schreiben und hierin die Ausdrücke (8) eintragen, erhalten wir
$$dQ_i = \frac{s}{n-1}\left\{\begin{array}{l}(n-1)\ (i-2)\ d\beta_2 + \ldots\ldots + (n-1)\ d\beta_{i-1} - \\ -\ (i-1)\ (n-2)\ d\beta_2 - \ldots\ldots - (i-1)\ (n-i+1)\ . \\ \qquad .\ d\beta_{i-1} - \ldots\ldots - (i-1)\ d\beta_{n-1}\end{array}\right\} \quad \ldots \text{(10)}$$
und, nach entsprechender Zusammenziehung,
$$dQ_i = \frac{s}{n-1}\Big\{-\ (n-i)\ d\beta_2 - 2\,(n-i)\ d\beta_3 - \ldots\ldots - (i-2)\ (n-i)\ d\beta_{i-1} -$$
$$-\ (i-1)\ (n-i)\ d\beta_i - \ldots\ldots - (i-1)\ d\beta_{n-1}\Big\}.$$

Etwas vereinfacht angeschrieben lautet dieser Ausdruck
$$dQ_i = \frac{s}{n-1}\left\{-\left[(k-1)\ (n-i)\ d\beta_k\right]_{k=2}^{k=i-1} - \left[(i-1)\ (n-k)\ d\beta_k\right]_{k=i}^{k=n-1}\right\}. \quad \ldots \text{(11)}$$

Führt man den mittleren Winkelfehler $\pm\ m_\beta$ ein, so bekommt man nach entsprechender Summierung der Koeffizientenquadrate in (11) für den im Punkt P_i zu erwartenden Querfehler m_{qi} den Ausdruck

$$m_{qi}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)(i-1)}{6(n-1)} \cdot \left\{ 2(n-i)(i-1) + 1 \right\} . \qquad \ldots (12)$$

Dieser Ausdruck verschwindet — wie es nach erfolgter Ausgleichung natürlich sein muß — für die Annahme $i = n$; für die Annahme $i = \frac{n+1}{2}$, d. h. für den Punkt in der Zugsmitte, erhält man

$$m_{qm}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{n-1}{48} \left\{ (n-1)^2 + 2 \right\} , \qquad \ldots (13)$$

welcher Ausdruck durch die Näherung

$$m_{qm}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{n^3}{48} \qquad \ldots (13a)$$

ersetzt werden kann.

Dieses letztere Ergebnis stimmt mit dem Ergebnis der von V. von Loesch in der Zeitschrift für Vermessungswesen, 1951, Seite 55 ff. für einen Punkt in der Zugsmitte mitgeteilten Entwicklung überein.

Wir können nun einen Schritt weitergehen und den 2. Fall, den des einseitigen Richtungsanschlusses, annehmen. Zu dessen Betrachtung können wir die Formeln (8) unmittelbar heranziehen; in diesen sind dazu lediglich die Grenzen für die Summenbildungen mit $k = 1$ bis $k = n - 1$ (in (8 b)) und $k = 1$ bis $k = i - 1$ (in (8 c)) festzulegen. Wendet man weiterhin die auch hier natürlich geltende Überlegung (9) an und trägt man in diese die ausführlich angeschriebenen Ausdrücke (8 b) und (8 c) mit den eben mitgeteilten Grenzen ein, so erhält man

$$dQ_i = \frac{s}{n-1} \left\{ \begin{array}{l} (n-1)\,(i-1)\; d\beta_1 + (n-1)\,(i-2)\; d\beta_2 + \ldots \\ -(i-1)\,(n-1)\; d\beta_1 - (i-1)\,(n-2)\; d\beta_2 - \ldots \end{array} \right\} \text{siehe (10).}$$

Man sieht, daß das erste Glied — jenes mit $d\beta_1$ — wegfällt; es entsteht also das gleiche Ergebnis wie im vorigen Fall. *Die Hinzunahme des Brechungswinkels β_1, der einseitige Richtungsanschluß, hat demnach keine Genauigkeitssteigerung in der Punktlage zur Folge.*

Als letzter Fall sei nun jener betrachtet, bei dem am Anfang und am Ende des Zuges sowohl Lageanschluß als auch — durch Messung von β_1 und β_n — beidseitiger Richtungsanschluß besteht.

Durch den beidseitigen Richtungsanschluß ist eine Ausgleichung der Brechungswinkel möglich; denkt man sich in jedem Brechungswinkel den wahren Winkelfehler $d\beta$, so wird durch die Ausgleichung jeder Brechungswinkel bekanntlich um den Betrag $-\frac{1}{n}\left[d\beta\right]_1^n$ verbessert.

Um nun den Querfehler im Punkt P_i zu ermitteln, hat man ebenso vorzugehen wie beim Ansatz (6), nur ist anstelle des wahren Winkelfehlers $d\beta$ der verbesserte Wert $d\beta - \frac{[d\beta]_1^n}{n}$ einzuführen. Man erhält damit

$$dq_i = s \left\{ (i-1)\left(d\beta_1 - \frac{[d\beta]}{n}\right) + (i-2)\left(d\beta_2 - \frac{[d\beta]}{n}\right) + \ldots + \left(d\beta_{i-1} - \frac{[d\beta]}{n}\right) \right\} . \qquad \ldots (14)$$

Nun ist aber $[d\beta]_1^n = d\beta_1 + d\beta_2 + \ldots\ldots\ldots + d\beta_n$; es kommen im vorstehenden Ausdruck daher sämtliche wahren Winkelfehler vor. Durch eine einfache Umformung läßt sich dieses Ergebnis in die Form

$$dq_i = s \cdot \left\{ \left[(i-k)\; d\beta_k \right]_{k=1}^{k=i-1} - \left[\frac{i}{2\,n}\,(i-1)\; d\beta_k \right]_{k=1}^{k=n} \right\} \quad \ldots \text{(14a)}$$

umschreiben; wendet man bei Einführung des mittleren Winkelmeßfehlers m_β das Fehlerfortpflanzungsgesetz an, so erhält man

$$m_{qi}{}^2 = s^2 m_\beta{}^2 \left\{ \left[(i-k)^2 \right]_{k=1}^{k=i-1} - \frac{i^2}{4\,n}\,(i-1)^2 \right\}.$$

Die Bildung der hierin angezeigten Summe liefert nach entsprechender Zusammenziehung das Ergebnis

$$m_{qi}{}^2 = s^2 m_\beta{}^2\, \frac{i\,(i-1)}{12\,n} \left\{ 2\,n\,(2\,i-1) - 3\,i\,(i-1) \right\}. \quad \ldots \text{(15)}$$

Dies ist der im Punkt P_i *nach* der Winkelausgleichung, jedoch *vor* der Aufteilung des Querfehlers (Koordinatenausgleichung) zu erwartende Querfehler. Setzt man in (15) $i = n$, d. h. nimmt man den Querfehler im Endpunkt $P_n = E$ des Zuges, so ergibt sich der bekannte Ausdruck

$$m_{qn}{}^2 = s^2 m_\beta{}^2\, \frac{n}{12}\,(n^2 - 1), \quad \ldots \text{(16)}$$

der häufig durch die Näherung

$$mq_n{}^2 = s^2 m_\beta{}^2\, \frac{n^3}{12} \quad \ldots \text{(16a)}$$

ersetzt wird.

Um nun zu dem im Punkt P_i nach der Koordinatenausgleichung zu erwartenden Querfehler zu kommen, haben wir lediglich die durch die Formel (9) ausgedrückte Überlegung zu wiederholen und dazu noch die Formel (14) für die Punktnummer n anzuschreiben. Für dq_n, d. h. für $i = n$, erhalten wir daraus

$$dq_n = s \left[\frac{1}{2}\,(n - 2\,k + 1)\; d\beta_k \right]_{k=1}^{k=n} \;; \quad \ldots \text{(17)}$$

bildet man nun

$$dQ_i = dq_i - dq_n\, \frac{i-1}{n-1},$$

so folgt mit (14a) daraus weiter der wahre Querfehler in P mit

$$dQ_i = s \left\{ \left[(i-k)\; d\beta_k \right]_{k=1}^{k=i-1} - \left[\left(\frac{1}{2}\,(n - 2\,k + 1)\,\frac{i-1}{n-1} + \frac{i}{2\,n}\,(i-1) \right) d\beta_k \right]_{k=1}^{k=n} \right\}. \quad \ldots \text{(18)}$$

Wendet man auf diesen Ausdruck bei Einführung des mittleren Winkelfehlers $\pm\, m_\beta$ wieder das Fehlerfortpflanzungsgesetz an, so ergibt sich der im Punkt P_i zu erwartende Querfehler *nach* der Aufteilung des Querfehlers im Endpunkt mit

$$m_{qi}{}^2 = s^2 m_\beta{}^2 \cdot \frac{i-1}{12\,n\,(n-1)} \cdot \left\{ \begin{matrix} n^2\,(n+1)\,(i-1) + i\,n\,(6\,n - 4\,i + 2) - \\ - 3\,i^2\,(n-1)\,(i-1) + 2\,i\,n\,(n-1)\,(2\,i-1) \end{matrix} \right\}. \quad \ldots \text{(19)}$$

Für den Endpunkt des Zuges, d. h. für $i = n$, verschwindet naturgemäß dieser Ausdruck, für den Punkt $i = \frac{n+1}{2}$, d. h. für die Zugsmitte, entsteht daraus die bekannte Formel

$$m_{qm}^2 = s^2 m_\beta^2 \cdot \frac{(n^2-1)(n^2+3)}{192 \cdot n}; \qquad \ldots (20)$$

die vielfach in der Näherungsform

$$m_{qm}^2 = s^2 m_\beta^2 \cdot \frac{n^3}{192} \qquad \ldots (20\text{a})$$

angewendet wird.

Die Formeln (12) und (19) können übrigens ebenfalls durch Näherungsformeln, indem man darin z. B. $2i - 1 = 2i$ usw. setzt, ersetzt werden, wodurch man die einfachen Ausdrücke

$$m_{qi}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)^2 (i-1)^2}{3(n-1)} \qquad \ldots (12\text{a})$$

und

$$m_{qi}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)^2 (i-1)^2}{12(n-1)} \qquad \ldots (19\text{a})$$

erhält; diese Näherungen gewinnen mit steigender Punktzahl n an Berechtigung.

c) *Ableitung von Näherungsformeln*

Abschließend wollen wir noch zeigen, wie man auf Grund anderer Überlegungen in einfacher Weise zu den der Abschätzung der Genauigkeit der Punktlage in Polygonzügen dienenden Näherungsformeln (12a) und (19a) gelangen kann.

Den gestreckten gleichseitigen Polygonzug, die übliche Annahme, denken wir uns dazu in einem Koordinatensystem l, q, von dessen Achsen die eine parallel zur Zugsrichtung, die andere senkrecht dazu ist. Die übliche Zugsberechnung und die Aufteilung der Koordinatenwidersprüche kann man sich so durchgeführt denken, daß der Zug einmal vom Anfangspunkt $A \equiv P_1$ bis zum betrachteten Punkt P_i, dann vom Endpunkt $E \equiv P_n$ ebenfalls bis P_i berechnet wird; in P_i treten nun die Widersprüche in den Richtungen l und q auf. Die beiden für die Punktlage in P_i erhaltenen Koordinatenpaare l_{iA}, q_{iA} und l_{iE}, q_{iE} werden nun mit den Gewichten $(n - i)$ für das erstere, $(i - 1)$ für das letztere Koordinatenpaar gemittelt; dieser Vorgang entspricht, wie leicht ersichtlich, genau dem üblichen Vorgang bei der Aufteilung der Widersprüche.

Die endgültigen Koordinaten l_i und q_i des Punktes P_i ergeben sich demnach aus

$$l_i = \frac{(n-i)\, l_{iA} + (i-1)\, l_{iE}}{n-1} \quad \text{und} \quad q_i = \frac{(n-i)\, q_{iA} + (i-1)\, q_{iE}}{n-1} \qquad \ldots (21)$$

Wendet man auf diese Ausdrücke das Fehlerfortpflanzungsgesetz an, so ergibt sich der Längs- und Querfehler in P_i mit

$$m_{li}^2 = \left(\frac{n-i}{n-1}\right)^2 m_{liA}^2 + \left(\frac{i-1}{n-1}\right)^2 m_{liE}^2$$

und

$$m_{qi}^2 = \left(\frac{n-i}{n-1}\right)^2 m_{qiA}^2 + \left(\frac{i-1}{n-1}\right)^2 m_{qiE}^2 .$$

In diese Ausdrücke sind, um zum endgültigen Ergebnis zu kommen, die für die Zugteile AP_i und EP_i in P_i zu erwartenden Unsicherheiten in der Zugsrichtung und senkrecht dazu einzuführen.

Für den Längsfehler gilt nun bekanntlich

$$m_{liA}^2 = (i - 1)\, m_s^2 \text{ und } m_{liE}^2 = (n - i)\, m_s^2 ;$$

die Eintragung dieser Werte in (22a) ergibt mit

$$m_{li}^2 = m_s^2 \frac{(n-i)(i-1)}{n-1}$$

jenen Ausdruck für den Längsfehler in P_i, den wir in (5) schon mitgeteilt haben. Eine Näherung wurde dabei nicht eingeführt.

Bei der Berechnung des Querfehlers haben wir zwischen den möglichen Fällen zu unterscheiden, nämlich 1. kein oder nur einseitiger Richtungsanschluß und 2. beidseitiger Richtungsanschluß, Für den ersten Fall benützen wir die Näherungsformel (7a) mit einer weiteren Näherung in der Annahme der Punktzahl und haben damit

$$m_{qiA}^2 \doteq s^2 m_\beta^2 \frac{(i-1)^3}{3} \quad \text{und} \quad m_{qiE}^2 \doteq s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)^3}{3} ;$$

für den zweiten Fall hingegen nach (16a) die Ausdrücke

$$m_{qiA} \doteq s^2 m_\beta^2 \frac{(i-1)^3}{12} \quad \text{und} \quad m_{qiE}^2 \doteq s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)^3}{12}$$

in die Formel (22b) einzuführen.

Es ergeben sich in Übereinstimmung mit (12a) und (19a) daraus die Formeln

$$m_{qi}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)^2 (i-1)^2}{3(n-1)} \quad \text{und} \quad m_{qi}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{(n-i)^2 (I-1)^2}{12(n-1)} .$$

Für $i = \frac{n+1}{2}$, für die Zugmitte also, führen diese Ausdrücke zunächst auf die Formeln

$$m_{qm}^2 = s^2 m_\beta^2 \frac{(n-1)^3}{48} \quad \text{und} \quad m_{qm}^2 = s^2 . m_\beta^2 \frac{(n-1)^3}{192} ,$$

die mit der weiteren Näherung $(n - 1) \doteq n$ in die Formeln (13a) und (20a) übergehen.

Zuletzt seien noch, um den Grad der Annäherung der Formeln (12) und (19) durch die Näherungsformeln (12a) und (19a) zu zeigen, einige Zahlenwerte der Ausdrücke

$$\sqrt{\frac{(n-i)(i-1)}{6(n-1)} \left\{ 2(n-i)(i-1) + 1 \right\}}$$

und

$$\sqrt{\frac{i-1}{12n(n-1)} \left\{ n^2 (n+1) (i-1) + i\, n\, (6n - 4i + 2) - 3i^2 (n-1) . (i-1) + 2\, i\, n\, (n-1)(2i-1) \right\}}$$

den Zahlenwert der Ausdrücke

$$\frac{(n-i)(i-1)}{\sqrt{3(n-1)}} \quad \text{und} \quad \frac{(n-i)(i-1)}{\sqrt{12(n-1)}}$$

gegenübergestellt.

Für $n = 10$ erhält man — die Näherungswerte sind unter den strengen Werten angeschrieben — für die Werte von i zwischen 1 und 10 dafür die Zahlenwerte:

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Formel (12)	0,00	1,59	2,74	3,51	3,90	3,90	3,51	2,74	1,59	0,00
Formel (12a)	0,00	1,54	2,69	3,46	3,85	3,85	3,46	2,69	1,54	0,00
Formel (19)	0,00	0,96	1,62	2,06	2,28	2,28	2,06	1,62	0,96	0,00
Formel (19a)	0,00	0,77	1,35	1,73	1,93	1,93	1,73	1,35	0,77	0,00

Die Näherung (12a) liefert, wie man aus den nur kleinen Abweichungen gegen die Sollwerte erkennt, sehr gute Ergebnisse, während die Näherung (19a) bei $n = 10$ im Durchschnitt um etwa 15% zu kleine Werte ergibt.

Die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen im Rahmen der mathematischen Statistik

Von *W. Eberl*

§ 1. Einleitung. Trotz der stürmischen Entwicklung der Stochastik[1]) während der letzten Jahrzehnte hat sich die lehrbuchmäßige Darstellung der Ausgleichsrechnung seit den Tagen von C. F. *Gauß* (1777—1855) und F. R. *Helmert* (1843 bis 1917) kaum geändert. Das ist im Hinblick auf beide Disziplinen bedauerlich. Denn einerseits tragen die Methoden der mathematischen Statistik viel weiter als die der traditionellen Ausgleichsrechnung, und andererseits müßte die Beachtung der Tatsache, daß die Ausgleichsrechnung nur ein kleines wenn auch wichtiges Teilgebiet der Regressionstheorie darstellt, zu einer realistischeren Beurteilung der Rolle, die die Stochastik für den Techniker spielt, beitragen.

Der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen kommt eine besondere Bedeutung zu, da einerseits die direkten Beobachtungen als Sonderfälle von vermittelnden angesehen werden können und sich andererseits die Ausgleichung bedingter Beobachtungen meist sehr einfach auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zurückführen läßt.

Die Paragraphen 2 bis 4 enthalten ohne Beweis einige für das Folgende grundlegende Definitionen und Sätze der Stochastik. Ziffer 5 bringt dann einige Sätze der Regressionstheorie samt den zugehörigen meist bekannten Beweisen. Die ausgiebige Verwendung des Summationsübereinkommens auf diesem Gebiet dürfte neu sein und bietet gewisse Vorteile.

---

[1]) Die Stochastik ist die Lehre vom Zufall und umfaßt Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik.

§ **2. Einige Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie.** $X_1, \ldots, X_r$ seien r reelle *stetige Merkmale*[2]) *mit gemeinsamer Verteilung* oder $X = (X_1, \ldots, X_r)$ ein r-dimensionales stetiges Merkmal. Der *Wertevorrat* $\mathfrak{W}$ von $X_1, \ldots, X_r$ bzw. X sei der r-dimensionale Euklidische Raum $\mathfrak{E}_r$ oder ein r-dimensionales Intervall desselben. Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_r$ oder die Verteilung von X ist dann durch eine *Dichte* $f(x) = f(x_1, \ldots, x_r)$[3]) bestimmt, die auf höchstens endlich vielen Hyperflächen des $\mathfrak{E}^r$ unstetig ist. Indem wir außerhalb von $\mathfrak{W}$ $f(x) \equiv 0$ setzen, können wir $f(x)$ als eine im ganzen $\mathfrak{E}_r$ definierte Funktion annehmen.

Die *Wahrscheinlichkeit*, daß X einem Bereich $\mathfrak{B}$ angehört, von dem nur vorausgesetzt wird, daß auf ihm das folgende Integral definiert ist, ist das r-fache Integral $W\{X \varepsilon \mathfrak{B}\} = \int\limits_{\mathfrak{B}} f(x)\,dx$ mit $dx = dx_1 \ldots dx_r$. Natürlich ist $\int\limits_{\mathfrak{E}_r} f(x)\,dx = 1$. Die *Erwartung* einer Merkmalfunktion $\varphi(X) = \varphi(X_1, \ldots, X_r)$ ist

$$E\varphi(X) = \int\limits_{\mathfrak{E}_r} \varphi(x) f(x)\,dx, \qquad \ldots \quad (1)$$

sofern das Integral absolut konvergiert. E ist ein linearer Operator, so daß für n Merkmalfunktionen $\varphi_i(X)$ und n Konstante c_i $(i = 1, \ldots, n)$

$$E \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i E\varphi_i(X) \qquad \ldots \quad (2)$$

gilt. $(i_1, \ldots, i_r)$ sei eine Permutation von $(1, \ldots, r)$ und $k < r$. Betrachtet man dann die Verteilung von $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$ ganz unabhängig davon, welche Werte $(X_{i_{k+1}}, \ldots, X_{i_r})$ annimmt, so heißt diese Verteilung die *Randverteilung* von $(X_{i_1}, \ldots$ $\ldots, X_{i_k})$. Die Dichte dieser Randverteilung ist

$$f_{i_1 \ldots i_k}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \int\limits_{\mathfrak{E}_{r-k}} f(x)\,dx_{i_{k+1}} \ldots dx_{i_r}. \qquad \ldots \quad (3)$$

$X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ heißen *unabhängig* voneinander, wenn $f_{i_1 \ldots i_k}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \prod\limits_{j=1}^{k} f_{i_j}(x_{i_j})$ ist. Ist $\varphi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}) = \prod\limits_{j=1}^{k} \varphi_{i_j}(X_{i_j})$ eine Funktion der unabhängigen Merkmale $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$, so gilt

$$E \prod_{j=1}^{k} \varphi_{i_j}(x_{i_j}) = \prod_{i=1}^{k} E\varphi_{i_j}(x_{i_j}). \qquad \ldots \quad (4)$$

Für $p = 1, \ldots, r$ heißt $EX_p = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_p f_p(x_p)\,dx_p = \xi_p$ das *Mittel* und $VX_p = E(X_p - \xi_p)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x_p - \xi_p)^2 f_p(x_p)\,dx_p = \sigma_p^2$ die *Varianz* von X_p.

Es gilt der *Verschiebungssatz* $E(X_p - \xi_p)^2 = EX_p^2 - (EX_p)^2$ oder

$$\sigma_p^2 = EX_p^2 - \xi_p^2. \qquad \ldots \quad (5)$$

Die positive Wurzel σ_p aus der Varianz heißt *Streuung*[4]) von X_p.

---

2) Statt Merkmal ist auch Zufallsvariable oder zufällige Variable gebräuchlich.

3) Variable werden mit großen oder kleinen Buchstaben bezeichnet, je nachdem für ihren Wertevorrat ein Wahrscheinlichkeitsmaß von Belang ist oder nicht. (Zufällige) Merkmale werden daher durch Großbuchstaben, Variable im Sinne der Analysis durch Kleinbuchstaben ausgedrückt.

4) In der Ausgleichsrechnung: *Mittlere Abweichung* oder mittlerer Fehler.

Sind $p \neq q$ zwei ganze Zahlen zwischen 1 und r, so heißt

$$C(X_p, X_q) = E\,[(X_p - \xi_p)(X_q - \xi_q)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_p - \xi_p)(x_q - \xi_q) f_{pq}(x_p, x_q)\, dx_p\, dx_q = \sigma_{pq}$$

die *Kovarianz* von X_p und X_q. Auch für die Kovarianz gilt ein *Verschiebungssatz:*

$$E\,[(X_p - \xi_p)(X_q - \xi_q)] = E\,(X_p X_q) - \xi_p\, \xi_q$$

oder

$$\sigma_{pq} = E\,(X_p X_q) - \xi_p\, \xi_q. \quad \ldots \quad (6)$$

Die r-reihige Matrix (σ_{pq}) mit $\sigma_{pp} = \sigma_p^2$ heißt *Kovarianzmatrix* von X.

X_p und X_q heißen *unkorreliert*, wenn $\sigma_{pq} = 0$ ist. Wegen (4) und (2) sind unabhängige Merkmale immer auch unkorreliert, dagegen müssen unkorrelierte Merkmale nicht unabhängig sein.

Ist X ein eindimensionales Merkmal mit dem Mittel ξ und der Varianz σ^2, sind ferner a und b zwei beliebige Konstante, so sind Mittel und Varianz des Merkmals $Y = (X - a)/b$

$$EY = \frac{\xi - a}{b} \quad \text{und} \quad VY = \frac{\sigma^2}{b^2}\,. \quad \ldots \quad (7\text{a},\ 7\text{b})$$

Sind $X_1, \ldots, X_r$ unkorrelierte Merkmale mit den Varianzen $\sigma_1{}^2, \ldots, \sigma_r{}^2$ und sind $c_1, \ldots, c_r$ beliebige Konstante, so ist

$$V \sum_{p=1}^{r} c_p\, x_p = \sum_{p=1}^{r} c_p^2 \sigma_p^2. \quad \ldots \quad (8)$$

§ 3. Zwei Verteilungen. Die folgenden beiden Verteilungen können als Beispiele für die allgemeineren Definitionen von § 2 dienen.

A. *Die r-dimensionale Gaußverteilung.* Das Merkmal $X = (X_1, \ldots, X_r)$ heißt (r-dimensional) *nach Gauß verteilt*, wenn sein Wertevorrat der $\mathfrak{E}_r$ und seine Dichte

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \frac{\sqrt{\operatorname{Det}(\sigma^{pq})}}{(2\pi)^{\frac{r}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{r} \sigma^{pq} (x_p - \xi_p)(x_q - \xi_q)} \quad \ldots \quad (9)$$

ist. Es ist $EX_p = \xi_p$, $VX_p = \sigma_p{}^2 = \sigma_{pp}$ und $C(X_p, X_q) = \sigma_{pq}$. Die Matrix (σ^{pq}) ist symmetrisch, positiv definit und stellt die inverse der Kovarianzmatrix (σ_{pq}) dar:

$$(\sigma^{pq}) = (\sigma_{pq})^{-1}\,.$$

Die r-dimensionale Gaußverteilung ist durch ihre Parameter ξ_p und σ_{pq}; $p, q = 1, \ldots, r$, vollständig bestimmt.

Man kann zeigen, daß die Randverteilung von X_p die eindimensionale Gaußverteilung mit dem Mittel ξ_p und der Varianz $\sigma_p{}^2$ ist:

$$f_p(x_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_p}\, e^{-\frac{(x_p - \xi_p)^2}{2\sigma_p{}^2}}\,. \quad \ldots \quad (10)$$

Statt (10) schreibt man kürzer: X_p ist nach $G(\xi_p, \sigma_p{}^2)$ verteilt. Daraus folgt sofort

Satz 1: r gemeinsam nach Gauß verteilte Merkmale $X_1, \ldots, X_r$ sind dann und nur dann voneinander unabhängig, wenn ihre Kovarianzen σ_{pq} $(p \neq q)$ verschwinden.

Denn (9) zerfällt dann und nur dann in r Faktoren (10). Unkorrelierte Gaußmerkmale sind also auch unabhängig und umgekehrt.

Für Linearkombinationen von Gaußmerkmalen gilt

Satz 2: Sind $X_1, \ldots, X_r$ *gemeinsam nach Gauß verteilt mit den Mitteln* ξ_p *und der Kovarianzmatrix* (σ_{pq}), *sind ferner die* c_p *beliebige Konstante, so ist auch* $X = \sum_{p=1}^{r} c_p X_p$ *nach Gauß verteilt mit dem Mittel* $EX = \sum_{p=1}^{r} c_p \xi_p$ *und der Varianz* $VX = \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{r} c_p c_q \sigma_{pq}$. *Sind insbesondere die* X_p *unabhängig voneinander, so ist* $VX = \sum_{p=1}^{r} c_p^2 \sigma_p^2$ (*vgl.* (8)).

B. *Die Chiquadrat* (χ^2-)*verteilung.* Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig voneinander nach $G(0, 1)$ verteilt, so besitzt $X = \sum_{i=1}^{n} X_i{}^2$ die χ^2-Verteilung mit n *Freiheitsgraden* (F. R. *Helmert*, 1876). Der Wertevorrat von X ist die Halbgerade $[0, +\infty)$, die Dichte ist

$$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Es ist

$$EX = n \quad \text{und} \quad VX = 2n. \qquad \ldots \text{(11a, 11b)}$$

Mit dieser Definition χ^2-verteilter Merkmale hängt eng zusammen

Satz 3 (*Cochran, 1933*)*:* $X_1, \ldots, X_n$ *seien unabhängig voneinander nach* $G(0, \sigma^2)$ *verteilt. Ferner sei* $\sum_{i=1}^{n} X_i{}^2 = Q_1 + \ldots + Q_k$, *wo* Q_j *eine quadratische Form in den* X_i *vom Rang*[5]) $\leq r_j$ *ist,* $j = 1, \ldots, k$. *Ist dann* $\sum_{j=1}^{k} r_j = n$, *so sind die* Q_j/σ^2 *unabhängig voneinander nach* χ^2 *mit* r_j *Freiheitsgraden verteilt.*

Einen Beweis findet man in [2].

§ **4. Das Schätzen von Parametern.** In der Stochastik werden vor allem *Scharen* von Verteilungen betrachtet. Dementsprechend hänge die Dichte $f(x)$ des *Merkmals* X von m *Parametern* $\theta_1, \ldots, \theta_m$ ab, die man zu einem m-dimensionalen Parameter $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ zusammenfassen kann. Statt $f(x)$ ist daher genauer $f(x; \boldsymbol{\theta})$ zu schreiben.

$\overset{1}{X}, \ldots, \overset{n}{X}$ heißen *Beobachtungen* des Merkmales X, wenn alle $\overset{i}{X}$ $(i = 1, \ldots, n)$ unabhängig voneinander wie X verteilte Merkmale sind, und wenn jedem $\overset{i}{X}$ ein bestimmter beobachteter Wert $\overset{i}{x}$ entspricht.

---

5) Eine quadratische Form $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ mit $a_{ij} = a_{ji}$ hat den Rang r, wenn die Matrix (a_{ij}) den Rang r hat.

Die mathematische Statistik hat nun, z. T. in Fortführung von Verfahren der Ausgleichsrechnung, eine Reihe von Methoden entwickelt, durch die sich aus n Beobachtungen eines Merkmals X vorteilhafte *Schätzungen*

$$T_a = \hat{\theta}_a(\overset{1}{X}, \ldots, \overset{n}{X}), \quad a = 1, \ldots, m, \qquad \ldots (12)$$

der unbekannten Parameter θ_a gewinnen lassen. Ersetzt man auf der rechten Seite von (12) die Beobachtungen $\overset{i}{X}$ durch die beobachteten Werte $\overset{i}{x}$, so ergeben sich spezielle *Schätzwerte* $t_a = \hat{\theta}_a(\overset{1}{x}, \ldots, \overset{n}{x})$ für die θ_a. Da die $\hat{\theta}_a(\overset{1}{X}, \ldots, \overset{n}{X})$ Merkmalfunktionen sind, sind die T_a so wie die $\overset{i}{X}$ Merkmale. Ihre Verteilung ist durch die Verteilung von X und durch die Funktionen $\hat{\theta}_a$ bestimmt.

Beispiel: Sind $X_1, \ldots, X_n$ Beobachtungen eines nach $G(\xi, \sigma^2)$ verteilten Merkmals X, so ist der *Durchschnitt* $\overline{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i/n$ der Beobachtungen eine Schätzung des Mittels ξ von X. $\overline{X}$ ist auf Grund von Satz 2 nach $G(\xi, \sigma^2/n)$ verteilt. Eine andere Schätzung von ξ ist $\widetilde{X} = (X_{\min} + X_{\max})/2$, wo $X_{\min}$ und $X_{\max}$ die kleinste bzw. die größte der n Beobachtungen ist.

Man verwendet die Freiheit, die man in der Wahl der Schätzung (12) hat, um diese Schätzung mit möglichst vielen wünschenswerten Eigenschaften auszustatten. Für die Zwecke der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen sind folgende Vorzüge besonders wichtig:

Eine Schätzung heißt *linear*, wenn sie in den Beobachtungen linear ist, also $T_a = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ai} \overset{i}{X}$, wobei die Koeffizienten c_{ai} von den Beobachtungen unabhängig sind. Im obigen Beispiel ist $\overline{X}$ eine lineare Schätzung, da die Koeffizienten unabhängig von den Beobachtungen den Wert $1/n$ haben. Dagegen ist $\widetilde{X}$ keine lineare Schätzung. $\widetilde{X}$ erscheint zwar zunächst als lineare Form in den $\overset{i}{X}$, wobei die Koeffizienten entweder 0 oder 1/2 sind, aber es hängt eben von den Beobachtungen selbst ab, ob eine Beobachtung mit 0 oder mit 1/2 zu multiplizieren ist. Wenn die Beobachtungen so klein ausfallen, daß ihre Quadrate vernachlässigt werden können, so kann man an Stelle von Schätzungen, die nach ihren Argumenten differenzierbar sind, lineare Schätzungen verwenden.

Von einer guten Schätzung verlangt man, daß die Mitte ihrer Verteilung in den zu schätzenden Parameter zu liegen kommt. Indem man diese Mitte z. B. durch die Erwartung von $\hat{\theta}_a(\overset{1}{X}, \ldots, \overset{n}{X})$ oder durch das Mittel von T_a definiert, gelangt man zum Begriff der *erwartungstreuen* Schätzung: Für eine solche ist $ET_a = \theta_a$. Man wird weiter fordern, daß sich die Verteilung von T_a möglichst dicht um den zu schätzenden Parameter θ_a zusammenballt. Als Maß dieser Zusammenballung kann man z. B. die Varianz verwenden. Im Hinblick auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen kann man sich auf lineare und erwartungstreue Schätzungen beschränken und nennt T_a eine *beste* erwartungstreue lineare Schätzung, wenn für alle derartigen Schätzungen T_a^*

$$E(T_a - \theta_a)^2 \leq E(T_a^* - \theta_a)^2$$

gilt, wenn also T_a unter allen erwartungstreuen linearen Schätzungen T_a^* die kleinste Varianz besitzt.

Da auch der *Median*[6]) und der *Modus*[7]) von T_a zentral gelegene Punkte der Verteilung von T_a sind und i. a. nur dann mit dem Mittel ET_a zusammenfallen, wenn T_a symmetrisch verteilt ist, liegt in der Bestimmung der Mitte der Verteilung von T_a durch ET_a meistens eine gewisse Willkür. Die Messung der Zusammenballung einer Verteilung durch die Varianz ist nicht einmal bei Gauß- oder Chiquadratmerkmalen zwangsläufig, da auch jede monotone Funktion der Varianz, z. B. das *Genauigkeitsmaß* $h^2 = 1/2\sigma^2$ zu diesem Zweck verwendet werden kann. Die erste Festsetzung rechtfertigt sich jedoch durch ihre Zwangsläufigkeit im Falle symmetrischer Verteilungen und beide erweisen ihre Zweckmäßigkeit durch die Vorzüge der auf ihnen beruhenden Rechenverfahren, auch wenn man sehr allgemeine Verteilungen der T_a zuläßt.

Die wichtigste Methode zur Gewinnung von guten Schätzungen unbekannter Parameter ist das auf C. F. Gauß zurückgehende *Plausibilitätsprinzip*, das von R. A. Fisher im Jahre 1922 unter dem Namen *Maximum-Likelihood-Principle* weiter ausgebaut wurde.

Hat das Merkmal $X = (X_1, \ldots, X_r)$ die Dichte $f(x;\, \theta)$, wo $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ ein m-dimensionaler Parameter ist, sind ferner $\overset{1}{X}, \ldots, \overset{n}{X}$ Beobachtungen von X, so heißt die Funktion

$$P(\overset{1}{x}, \ldots, \overset{n}{x};\, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(\overset{i}{x};\, \theta) \qquad \ldots (13)$$

bei festgehaltenen beobachteten Werten $\overset{1}{x}, \ldots, \overset{n}{x}$ und variablem θ die *Plausibilitätsfunktion* des Parameters θ. Der einem Parameterwert entsprechende Funktionswert heißt die *Plausibilität* des Parameterwertes. *Ordnet man nun jedem n-Tupel beobachteter Werte* $(\overset{1}{x}, \ldots, \overset{n}{x})$ *den Parameterwert* $t = \hat{\theta}(\overset{1}{x}, \ldots, \overset{n}{x})$ *größter Plausibilität*[8]) *zu, so heißt* $T = \hat{\theta}(\overset{1}{X}, \ldots, \overset{n}{X})$ *die plausible Schätzung von* θ. Natürlich setzt sich die m-dimensionale Schätzung $\hat{\theta}$ aus m eindimensionalen Schätzungen $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_m$ zusammen, und es ist $T_a = \hat{\theta}_a(\overset{1}{X}, \ldots, \overset{m}{X})$ die plausible Schätzung von θ_a. Plausible Schätzungen sind durch eine Anzahl vorteilhafter Eigenschaften ausgezeichnet.

---

[6]) Der Median von T_a ist ein (nicht immer eindeutig bestimmter) Wert μ, für den $W\{T_a \leq \mu\} = W\{T_a \geq \mu\} = \frac{1}{2}$ ist.

[7]) Der Modus von T_a ist ein (nicht immer eindeutig bestimmter) Wert ν, in dem die Dichte von T_a ihren größten Wert annimmt.

[8]) Beschränkt man den Wertevorrat des Parameters θ auf einen abgeschlossenen Teil des $\mathfrak{E}_m$, den *Raum der zulässigen Parameter*, und hängt (13) stetig von den θ_a ab, so ist die Existenz dieser Größtwerte auch formal gesichert. Der Statistiker kann sich aber ähnlich wie der Physiker solche rein mathematischen Esixtenzbetrachtungen ersparen, da das Vorhandensein bestimmter Verteilungen usw. in der Erfahrengswelt als gegeben angesehen wird, das heißt als Arbeitshypothese ein für allemal vorausgesetzt werden muß.

Bei diskret verteilten Merkmalen, deren Verteilung von einem unbekannten Parameter abhängt, hat man die Plausibilitätsfunktion mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten anstatt der Dichten zu definieren. Die Bestimmung plausibler Schätzwerte der unbekannten Parameter erfolgt dann ganz analog.

§ 5. Einige Sätze aus der Theorie der linearen Regression. $Y_1, \ldots Y_n$ seien n Beobachtungen. $EY_i = \sum_{a=1}^{m} x_{ai}\,\theta_a$, $VY_i = \sigma^2$, wo die x_{ai} für $a = 1, \ldots, m$ und $i = 1, \ldots, n$ bekannte Zahlen und die θ_a sowie σ^2 unbekannte Parameter sind. Die Hyperebene $\eta = \sum_{a=1}^{m} \theta_a\, x_a$ heißt *Regressionshyperebene* von Y in bezug auf die x_a. Man spricht auch von einer *m-fachen linearen Regression* von Y in bezug auf die x_a.

Die weitaus meisten Zusammenhänge, die der Erfahrungswissenschaftler zählend, messend und wägend beobachtet, stellen Überlagerungen von funktionellen Abhängigkeiten und zufälligen Schwankungen dar. Die Regressionsrechnung entwickelt Methoden, mit denen man solche Beziehungen in ihren funktionellen und ihren zufälligen Anteil aufspalten kann. Die Theorie der linearen Regression beschäftigt sich mit dem Fall, wo einer linearen Abhängigkeit $\eta = \sum_{a=1}^{m} \theta_a\, x_a$ einer Beobachtungsgröße η von m genau bestimmbaren Argumenten x_a eine Zufallsschwankung mit dem Mittel 0 und der Varianz σ^2 überlagert ist. Die m Koeffizienten θ_a sind feste unbekannte Parameter. Bezeichnet man die bekannten Werte, die $x_1, \ldots, x_m$ bei der i-ten Beobachtung annehmen, der Reihe nach mit $x_{1i}, \ldots, x_{mi}$, so ist die i-te Beobachtung ein Merkmal Y_i der eingangs beschriebenen Art. Die Ermittlung des funktionellen Anteiles in der Beziehung der x_a zu Y besteht dann, statistisch gesehen, in einer Schätzung der Parameter θ_a.

Im folgenden wird durchwegs das Summationsübereinkommen, allerdings mit verschiedenen Summationsbereichen, verwendet: kommt in einem Produkt ein Zeiger genau zweimal vor, so ist über ihn zu summieren, und zwar im Falle eines Zeigers a, b, c, d, e oder f von 1 bis m, im Falle eines Zeigers i, j oder k von 1 bis n. In dieser Schreibweise ist also statt $\sum_{a=1}^{m} x_{ai}\,\theta_a$ einfach $x_{ai}\,\theta_a$ zu schreiben. Die Summen $\sum_{i=1}^{n} x_{ai} x_{bi}$ werden kürzer mit $x_{ai} x_{bi} = S^{ab}$ bezeichnet und stellen die Elemente einer m-reihigen quadratischen Matrix dar. Im Falle

$$Det\,(S^{ab}) \neq 0 \qquad \ldots (14)$$

ist (S_{ab}) die inverse Matrix von (S^{ab}): $(S_{ab}) = (S^{ab})^{-1}$.

Aus der Determinantentheorie bekannt ist

Satz 4: Sind (x_{ai}) *und* (y_{bj}) *zwei Matrizen mit m Zeilen und n* $(> m)$ *Spalten, so erhält man die Determinante der Matrix* $(x_{ai}\, y_{bi})$, *indem man jede m-reihige Determinante von* (x_{ai}) *mit der entsprechenden Determinante von* (y_{bj}) *multipliziert und alle diese Produkte addiert.*

Zwei Beweise dieses Satzes findet man in [5].

Aus Satz 4 ergibt sich sofort eine notwendige und hinreichende Bedingung für (14):

Satz 5: (*14*) *gilt dann und nur dann, wenn der Rang von* (x_{ai}) *m ist.*

Denn nach Satz 4 ist $Det\,(S^{ab})$ die Summe der Quadrate aller m-reihigen Determinanten der Matrix (x_{ai}).

Die nächsten beiden Sätze geben die Bedeutung des Ranges von (x_{ai}) für die Regressionsaufgabe an.

Satz 6: Ist der Rang von (x_{ai}) kleiner als m, so läßt sich die Anzahl der zu schätzenden Parameter θ_a verringern.

Denn wenn der Rang von (x_{ai}) kleiner als m ist, läßt sich eine Zeile, etwa die m-te, als Linearkombination der anderen darstellen: $x_{mi} = k_{a'} x_{a'i}$, wo a' von 1 bis m-1 läuft. Dann ist weiter $\eta_i = x_{ai}\,\theta_a = x_{a'i}\,\theta_{a'} + x_{mi}\,\theta_m = x_{a'i}\,\theta_{a'} + k_{a'} x_{a'i}\,\theta_m = x_{a'i}\,(\theta_{a'} + k_{a'}\,\theta_m) = x_{a'i}\,\tilde{\theta}_{a'}$, wenn man als neue Parameter für $a' = 1, \ldots, m-1$ die $\tilde{\theta}_{a'} = \theta_{a'} + k_{a'}\,\theta_m$ einführt.

Es ist nützlich, sich die geometrische Bedeutung einer solchen Verringerung der Parameter an einem einfachen Beispiel klar zu machen. Es sei $m = 2$, so daß man die Regressionsaufgabe in der Form $EZ_i = \theta_1\,x_i + \theta_2\,y_i$, $VZ_i = \sigma^2$ ansetzen kann. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix}$$

habe den Rang 1, so daß also für $i = 1, \ldots, n$ $y_i = kx_i$ ist. Sind z_i die beobachteten Werte der Z_i, so liegen die Punkte (x_i, y_i, z_i) sämtlich in der zur xy-Ebene senkrechten Ebene $kx - y = 0$. Die Regressionsaufgabe, eine Ebene zu finden, die die Punkte (x_i, y_i, z_i) enthält, wird daher durch $kx - y = 0$ in trivialer Weise erfüllt. Diese Lösung läßt sich aber nicht in der Gestalt $z = \theta_1\,x + \theta_2\,y$ darstellen. Die Regressionsaufgabe $EZ_i = (\theta_1 + k\theta_2)\,x_i = \tilde{\theta}\,x_i$ ist dagegen sinnvoll und bedeutet das Aufsuchen der Regressionsgeraden von Z in bezug auf x in der xz-Ebene. Analog läßt sich die Regressionsgerade von Z in bezug auf y in der yz-Ebene bestimmen. Beide Regressionsgeraden stellen die Projektionen der in der Ebene $kx - y = 0$ gelegenen Regressionsgeraden von Z in bezug auf $\sqrt{x^2 + y^2}$ auf die xz- bzw. yz-Ebene dar.

Satz 7: Besteht zwischen $\theta_1, \ldots, \theta_m$ kein linearer Zusammenhang[9]*, und ist der Rang von (x_{ai}) gleich m, so lassen sich die η_i nicht als Linearkombination von weniger als m Parametern darstellen.*

Denn sonst würden sich $\theta_1, \ldots, \theta_m$ als Linearkombination von $l\,(< m)$ Größen $\xi_1, \ldots, \xi_l$ darstellen lassen; woraus sich sofort ein linearer Zusammenhang der θ_a ergibt.

Der folgende Satz gestattet unter sehr allgemeinen Voraussetzungen eine zufriedenstellende Schätzung der θ_a und von σ^2.

Satz 8: Die Beobachtungen Y_i mit $EY_i = x_{ai}\,\theta_a$ und $VY_i = \sigma^2$ seien unkorreliert und der Rang von (x_{ai}) sei m. Dann folgt:

a) $$T_a = S_{ab}\,x_{bi}\,Y_i, \qquad a = 1, \ldots, m, \qquad \ldots (15)$$

sind die eindeutig bestimmten besten erwartungstreuen linearen Schätzungen der θ_a,

b) $$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - x_{ai}\,T_a)^2/(n\text{-}m) \qquad \ldots (16)$$

ist eine erwartungstreue Schätzung von σ^2,

c) *die Kovarianzmatrix von $T = (T_1, \ldots, T_m)$ ist $(S_{ab}\,\sigma^2)$.*

Beweis: a) Die lineare Schätzung $z_{ai}\,Y_i$ von θ_a ist erwartungstreu, wenn $E\,z_{ai}\,Y_i = z_{ai}\,E\,Y_i = z_{ai}\,x_{bi}\,\theta_b = \theta_a = \delta_{ab}\,\theta_b$[10] oder wenn $(z_{ai}\,x_{bi} - \delta_{ab})\,\theta_b = 0$ ist.

---

[9]) Wenn man sie als Variable im Raum der zulässigen Parameter auffaßt, vgl. Fußnote [8]).

[10]) δ_{ab} ist ebenso wie δ_{ij} das Kroneckersche Delta: (δ_{ab}) und (δ_{ij}) sind die m- bzw. n-zeilige Einheitsmatrix.

Wegen der Unabhängigkeit der z_{ai} von den θ_b muß dann für $b = 1, \ldots, m$

$$z_{ai}\, x_{bi} - \delta_{ab} = 0 \qquad \ldots (17)$$

sein.

Wegen (8) ist $V z_{ai}\, Y_i = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} z_{ai}^2$. Diese Größe soll unter der Nebenbedingung (17) ein Minimum werden. Dazu hat man das freie Minimum von $F(z_{a'}, \ldots, z_{an};\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} z_{ai}^2 - 2\lambda_b (x_{bi}\, z_{ai} - \delta_{ab})$ zu ermitteln. Partielle Ableitung nach den Variablen gibt

$$z_{ai} - \lambda_b\, x_{bi} = 0 \qquad \ldots (18)$$

und (17). Einsetzen von z_{ai} aus (18) in (17) gibt $\lambda_b\, x_{bi}\, x_{ci} = \delta_{ac}$ oder $\lambda_b\, S^{bc} = \delta_{ac}$. Wegen Satz 5 und der Symmetrie der Matrix (S^{bc}) ergibt sich zunächst $\lambda_b = S_{bc}\, \delta_{ac} = S_{ab}$ und schließlich $z_{ai} = S_{ab}\, x_{bi}$. Man zeigt leicht, daß die mit diesen z_{ai} gebildeten T_a auch wirklich die in a) angegebenen Eigenschaften haben.

c) Wegen (5) und (6) und wegen der Unkorreliertheit der Y_i ist

$$E(Y_i\, Y_j) = \delta_{ij}\, \sigma^2 + E\, Y_i \,.\, E\, Y_j. \qquad \ldots (19)$$

Weiter ist $E(T_a T_b) = E(S_{ac} x_{ci} Y_i\, S_{bd} x_{dj}\, Y_j) = x_{ci} x_{dj} S_{ac} S_{bd}\ E(Y_i\, Y_j)$. Einsetzen von (19) führt auf $x_{ci} x_{dj}\, S_{ac}\, S_{bd}\, (\delta_{ij}\, \sigma^2 + E\, Y_i \,.\, E\, Y_j) = S^{cd}\, S_{ac}\, S_{bd}\, \sigma^2 + x_{ci} x_{dj}\, S_{ac}\, S_{bd}\, x_{ei}\, \theta_e\, x_{fj}\, \theta_f = \delta_{ad}\, S_{bd}\, \sigma^2 + S^{ce}\, S^{df}\, S_{ac}\, S_{bd}\, \theta_e\, \theta_f$, also

$$E(T_a T_b) = S_{ab}\, \sigma^2 + \theta_a\, \theta_b. \qquad \ldots (20)$$

Wegen (6) ist dann

$$C(T_a, T_b) = S_{ab}\, \sigma^2,$$

womit c) bewiesen ist.

b) $E[(n-m)\, S^2] = E[(Y_i - x_{ai} T_a)\, (Y_i - x_{bi} T_b)] = E(Y_i Y_i) - 2\, x_{ai}\, x_{bj}\, S_{ab}\, E(Y_i\, Y_j) + x_{ai}\, x_{bi}\, E(T_a\, T_b)$. Einsetzen von (19) und (20) liefert. $\delta_{ii} \sigma^2 + E\, Y_i \,.\, E Y_i - - 2\, x_{ai}\, x_{bj}\, S_{ab}\, (\delta_{ij}\, \sigma^2 + E Y_i \,.\, E Y_j) + S^{ab}\, (S_{ab}\, \sigma^2 + \theta_a \theta_b) = n \,.\, \sigma^2 + S^{ab}\, \theta_a\, \theta_b - 2\, S^{ab}\, S_{ab}\, \sigma^2 - 2\, x_{ai}\, x_{bj}\, S_{ab}\, x_{ci} \theta_c\, x_{dj} \theta_d + S^{ab}\, S_{ab} \sigma^2 + S^{ab} \theta_a\, \theta_b$. Der vierte Summand ist $- 2\, S^{ac}\, S^{bd}\, S_{ab}\, \theta_c\, \theta_d = - 2\, \delta_{bc}\, S^{bd} \theta_c\, \theta_d = - 2\, S^{cd}\, \theta_c\, \theta_d$ und hebt sich daher mit dem zweiten und dem letzten auf. Der dritte gibt zusammen mit dem fünften $- \delta_{aa}\, \sigma^2 = = - m\, \sigma^2$. Insgesamt wird also $E[(n\text{-}m) S^2] = (n\text{-}m)\, \sigma^2$, womit b) bewiesen ist.

Eine Aussage über die Varianz von S^2 fehlt, da keine Voraussetzung über die vierten Momente der Y_i gemacht werden.

Ergänzt man die Voraussetzungen von Satz 8 durch die Annahme, daß die Y_i nach Gauß verteilt sind, so werden die Y_i nach Satz 1 unabhängig und man erhält

Satz 9: Die Beobachtungen $Y_1, \ldots, Y_n$ seien unabhängig voneinander nach $G(x_{ai}\, \theta_a, \sigma^2)$ verteilt und (x_{ai}) habe den Rang m.

a) *Dann sind die eindeutig bestimmten besten erwartungstreuen linearen Schätzungen (15) auch die plausiblen Schätzungen der θ_a. $T = (T_1, \ldots, T_m)$ ist nach Gauß verteilt mit den Mitteln θ_a und der Kovarianzmatrix $(S_{ab}\, \sigma^2)$. $S_{ab}\, \sigma^2$ wird durch $S_{ab}\, S^2$ erwartungstreu geschätzt.*

b) $(n-m)\,S^2/\sigma^2$ *ist unabhängig von* $S^{ab}(T_a-\theta_a)(T_b-\theta_b)$ *wie* χ^2 *mit* $(n-m)$ *F. g. verteilt. Es ist* $ES^2=\sigma^2$ *und* $VS^2=2\,\sigma^4/(n\text{-}m)$. VS^2 *wird durch* $2\,S^4/(n-m+2)$ *erwartungstreu geschätzt.*

Beweis: Da mit den Voraussetzungen dieses Satzes auch die des vorhergehenden erfüllt sind, gelten die Aussagen a) bis c) von Satz 8 auch hier.

a) Daß man unter der Voraussetzung der Gaußverteilung (15) als plausible Schätzungen ableiten kann, gehört seit Gauß zum Bestand der Ausgleichsrechnung und braucht hier nicht vorgeführt zu werden. Als lineare Funktionen von Gaußmerkmalen sind die T_a nach Satz 2 selbst nach Gauß verteilt. Diese Verteilung ist nach § 3 durch die Mittel $ET_a=\theta_a$ und die Kovarianzen $C(T_a,T_b)=S_{ab}\,\sigma^2$ vollständig bestimmt.

b) Zur Ermittlung der Verteilung von (16) führt man folgende Zerlegung durch:

$$Q=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-x_{ai}\theta_a)^2=\sum_{i=1}^{n}[(Y_i-x_{ai}T_a)+x_{ai}(T_a-\theta_a)]^2=(Y_i-x_{ai}T_a)(Y_i-$$
$$-x_{bi}T_b)+2\,x_{bi}(Y_i-x_{ai}T_a)(T_b-\theta_b)+x_{ai}x_{bi}(T_a-\theta_a)(T_b-\theta_b)=Q_1+Q_2+Q_3.$$

Q_2 verschwindet wegen $x_{bi}(Y_i-x_{ai}T_a)=x_{bi}\,Y_i-x_{bi}x_{ai}\,S_{ac}x_{cj}\,Y_j=x_{bi}\,Y_i-$ $-\,S^{ab}S_{ac}\,x_{cj}\,Y_j=x_{bi}\,Y_i-\delta_{bc}x_{cj}\,Y_j=x_{bi}\,Y_i-x_{bj}\,Y_j=0.$

Q, Q_1 und Q_3 werden umgeformt, indem man in ihnen statt der Merkmale Y_i die Merkmale $Z_i=Y_i-EY_i=Y_i-x_{ai}\theta_a$ einführt, deren Mittel 0 sind.

Zunächst ist $Q=Z_iZ_i$. Ferner ist $T_a-\theta_a=S_{ab}\,x_{bi}\,Y_i-\theta_a=S_{ab}\,x_{bi}$ $(Z_i+x_{ci}\theta_c)-\theta_a=S_{ab}\,x_{bi}\,Z_i+S_{ab}\,S^{bc}\,\theta_c-\theta_a=S_{ab}\,x_{bi}\,Z_i+\delta_{ac}\theta_c-\theta_a$, also

$$T_a-\theta_a=S_{ab}\,x_{bi}\,Z_i. \qquad \ldots (21)$$

Aus $Q_1=[(Y_i-EY_i)-x_{ai}(T_a-\theta_a)]\,[(Y_i-EY_i)-x_{bi}(T_b-\theta_b)]=$ $=(Z_i-x_{ai}x_{cj}S_{ac}Z_j)(Z_i-x_{bi}x_{dk}S_{bd}Z_k)=(\delta_{ij}-x_{ai}x_{cj}S_{ac})\,Z_j$ $(\delta_{ik}-x_{bi}x_{dk}S_{bd})\,Z_k$ erhält man nach kurzer Vereinfachung $Q_1=(\delta_{ij}-x_{ai}x_{bj}$ $S_{ab})\,Z_iZ_j$.

Mit Hilfe von (21) bekommt man sofort $Q_3=x_{ai}x_{bj}S_{ab}Z_iZ_j$.

Insgesamt ergibt sich also die Zerlegung $Q=Q_1+Q_3$ oder

$$Z_iZ_i=(\delta_{ij}-x_{ai}x_{bj}S_{ab})Z_iZ_j+x_{ai}x_{bj}S_{ab}Z_iZ_j. \qquad \ldots (22)$$

Für $c=1,\ldots,m$ ist $(\delta_{ij}-x_{ai}x_{bj}S_{ab})\,x_{ci}=x_{cj}-S^{ac}\,S_{ab}\,x_{bj}=x_{cj}-x_{cj}=0.$ Der Rang von (x_{ci}) ist m, daher bestehen zwischen den Zeilen der Matrix $(\delta_{ij}-$ $-\,x_{ai}x_{bj}\,S_{ab})$ mindestens m linear unabhängige Beziehungen, so daß Q_1 höchstens den Rang $n-m$ hat.

Q_3 läßt sich durch eine reguläre lineare Transformation, deren erste m Zeilen $V_a=x_{ai}Z_i$ lauten, in eine Form der m Merkmale V_a überführen und hat daher höchstens den Rang m.

Nach Satz 3 sind daher $Q_1/\sigma^2=(n-m)\,S^2/\sigma^2$ und $Q_3/\sigma^2=(T_a-\theta_a)(T_b-\theta_b)$ S^{ab}/σ^2 unabhängig voneinander nach χ^2 mit $n-m$ bzw. m F. g. verteilt. Aus (11a) und (7b) folgt dann wieder $\mathrm{E}(Q_1/\sigma^2)=n-m$ oder $ES^2=\sigma^2$. Aus (11b) und (7b) ergibt sich die Varianz von S^2: $V(Q_1/\sigma^2)=2\,(n-m)$ oder $VS^2=$ $=2\,\sigma^4/(n-m)$.

Wegen (5) ist $ES^4 = VS^2 + (ES^2)^2$. Daher ist $ES^4 = 2\,\sigma^4/(n-m) + \sigma^4 = (n-m+2)\,\sigma^4/(n-m)$, so daß $2\,S^4/(n-m+2)$ eine erwartungstreue Schätzung von VS^2 ist. Damit ist Satz 9 zur Gänze bewiesen.

Wenn die Beobachtungen $Y_1, \ldots, Y_n$ verschiedene Varianzen $\sigma_i^2 = \dfrac{\sigma^2}{p_i}$ haben, wo die *Gewichte* p_i bekannt sind und σ^2 unbekannt ist, so betrachtet man anstelle der Regressionsaufgabe für die $Y_1, \ldots, Y_n$ die Regressionsaufgabe für die Beobachtungen $\tilde{Y}_1 = \sqrt{p_1}\, Y_1, \ldots, \tilde{Y}_n = \sqrt{p_n}\, Y_n$ (nicht summieren, n ist eine feste Zahl!). Wegen (7a) ist $E\,\tilde{Y}_i = \tilde{x}_{ai}\theta_a$, wo $\tilde{x}_{a1} = \sqrt{p_1}\, x_{a1}, \ldots, \tilde{x}_{an} = \sqrt{p_n}\, x_{an}$. Wegen (7b) ist $V\tilde{Y}_i = \sigma^2$. Die Lösung der Regressionsaufgabe für die Beobachtungen $\tilde{Y}_i$ kann also mit Hilfe der Sätze 8 und 9 durchgeführt werden. Aus der Schätzung S^2 von σ^2 ergeben sich dann Schätzungen $S_i^2 = S^2/p_i$ der σ_i^2.

§ 6. **Die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.** Die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ordnet sich nun mühelos in den kleinen Ausschnitt der linearen Regressionstheorie ein, der im letzten Paragraphen in Form einiger markanter Definitionen und Sätze dargestellt wurde.

Jeder Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen liegt ein funktionaler Zusammenhang

$$y = f(x_1, \ldots, x_1;\ \theta_1, \ldots, \theta_m) \qquad \ldots \quad (23)$$

zugrunde. Dabei sind die $x_1, \ldots, x_1$ oft verfügbare und stets bekannte Argumente, dagegen $\theta_1, \ldots, \theta_m$ unbekannte Parameter, die zu bestimmen sind. Die Funktionswerte y_i werden für n 1-Tupel $\overset{i}{x} = (x_{1i}, \ldots, x_{li})$, $i = 1, \ldots, n$, beobachtet. Da diese Beobachtungen aber mit unvermeidlichen Fehlern behaftet sind, ist die i-te Beobachtung Y_i als Beobachtung im Sinne der Stochastik, daß heißt als (zufälliges) Merkmal aufzufassen. Die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen besteht also statistisch gesehen im Schätzen der Parameter $\theta_1, \ldots, \theta_m$ auf Grund von beobachteten Werten $y_1, \ldots, y_n$. Dabei darf vorausgesetzt werden, daß die $\theta_1, \ldots, \theta_m$, solange man sie als Variable betrachtet, unabhängig sind und daß die Anzahl n der Beobachtungen größer ist als die Anzahl m der unbekannten Parameter.

Wenn nun, wie in der Geodäsie, Physik und Chemie, die Beobachtungen sehr genau, also die Varianzen der Y_i sehr klein sind, lassen sich im allgemeinen aus den ersten m beobachteten Werten $y_1, \ldots, y_m$ sehr genaue Näherungswerte $\mathring{\theta}_1, \ldots, \mathring{\theta}_m$ der unbekannten Parameter berechnen. Die Differenzen $\theta_a - \mathring{\theta}_a$ zwischen den tatsächlichen und den Näherungswerten der Parameter werden dann auf jeden Fall klein sein, so daß man unter den entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über (23) die Taylorentwicklung dieser Funktion nach den Gliedern erster Ordnung abbrechen darf:

$$y - f(x;\mathring{\theta}) = \sum_{a=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \theta_a}(x;\mathring{\theta})\,(\theta_a - \mathring{\theta}_a). \qquad \ldots \quad (24)$$

Anstatt der ursprünglichen Beobachtungen Y_i und Parameter θ_a betrachtet man die neuen Beobachtungen $Y_i - f(\overset{i}{x};\mathring{\theta})$ bzw. neuen Parameter $\theta_a - \mathring{\theta}_a$.

Die Beschränkung auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, die in den unbekannten Parametern linear sind, findet ihre Begründung in der Kleinheit der $\theta_a - \overset{\circ}{\theta}_a$. Die den Sätzen (8) und (9) innewohnende Beschränkung auf Parameterschätzungen, die in den Beobachtungen linear sind, rechtfertigt sich durch die Kleinheit der absoluten Beträge der $Y_i - f(\overset{i}{x}; \overset{\circ}{\theta})$.

Schreibt man nun statt $Y_i - f(\overset{i}{x}; \overset{\circ}{\theta})$ und $\theta_a - \overset{\circ}{\theta}_a$ wieder $\overset{i}{Y}$ bzw. θ_a, so zeigt sich, daß die Aufgabe der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zusammenfällt mit der Aufgabe der linearen Regression, wie sie zu Beginn von § 5 formuliert wird. Alle Ergebnisse der traditionellen Ausgleichsrechnung und noch einiges mehr ergeben sich dann aus den entsprechenden Sätzen der Regressionstheorie, deren wichtigste die in § 5 vorgeführten Sätze 8 und 9 sind.

§ 7. Zusammenfassung und Schluß. In dieser Arbeit wird also gezeigt, daß die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen einen Teil der linearen Regressionstheorie bildet, die seit den Tagen von C. F. Gauß und F. R. Helmert eine erhebliche Entwicklung erfahren hat. Die Erkenntnis dieser Tatsache ist keineswegs neu, gewinnt aber heute aus zwei Gründen eine ständig wachsende Bedeutung: einesteils sind die fortgeschrittensten theoretischen Methoden gerade gut genug, um aus dem sich ständig erweiternden Feld experimenteller Erfahrungen das Äußerste an Auskunft herauszuholen, was diese Daten zu geben imstande sind. Andererseits zwingt die zunehmende Verfeinerung, Verästlung und Vertiefung moderner mathematischer Methoden alle an diesem Fortschritt Beteiligten und Interessierten, den heutigen Stand der Dinge aus denkökonomischen Gründen in seiner rationellsten Form darzustellen.

Eine weitere Arbeit wird der Ausgleichung bedingter Beobachtungen im Rahmen der mathematischen Statistik gewidmet sein.

§ 8. Literatur.

[1]: W. G. *Cochran:* The Distribution of Quadratic Forms in a Normal System. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 30 (1933).

[2]: H. *Cramer:* Mathematical Methods of Statistics. University Press, Princeton, 1946.

[3]: R. A. *Fisher:* On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics. Philosophical Transactions of the Royal Society, London, 222 (1922).

[4]: F. R. *Helmert:* Über die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und einige damit im Zusammenhang stehende Fragen, Zeitschrift für Mathematik und Physik 21 (1876).

[5]: G. *Kowalewski:* Einführung in die Determinantentheorie, Veit u. Co., Leipzig, 1909.

[6]: J. W. *Linnik:* Die Methode der kleinsten Quadrate und Grundlagen einer Theorie der Versuchsauswertungen. Staatl. Verlag für physikalisch-mathematische Literatur, Moskau, 1958 (russisch).

[7]: C. R. *Rao:* Advanced Statistical Methods in Biometric Research, Wiley, New York, 1952.

[8]: B. L. van der *Waerden:* Mathematische Statistik. Springer, Berlin, 1957.

Weitere Literaturhinweise auf Arbeiten über lineare Regressionstheorie finden sich vor allem in [7]. [6] konnte der Verfasser bei der Abfassung dieser Arbeit aus sprachlichen Gründen leider nicht verwerten. Der Deutsche Verlag der Wissenschaften zu Berlin bereitet eine deutsche Übersetzung dieses Buches vor. Den Hinweis auf [6] verdankt der Verfasser Herrn W. Richter in Dresden.

Literaturbericht

Buchbesprechungen

Anhammer, Dr. Georg, Ober-Reg.-Rat: **Das Recht der Grundstückzusammenlegung.** Österr. Agrarverlag, Wien 1958. A 5, 115 Seiten. Broschiert S 38·—.

Zur rechtlichen Seite der Grundstückzusammenlegung (Z.) gibt Dr. Anhammer im **ersten Teil** seiner Arbeit aus langjähriger Erfahrung allgemeine Erläuterungen in übersichtlicher Form und bespricht die wichtigsten Phasen der Z. Im **zweiten Teil** sind die einschlägigen Gesetze abgedruckt. Der Verfasser geht von den Grundsatzgesetzen des Bundes zu der für Niederösterreich geltenden Rechtslage über, doch weisen Fußnoten auf die Bestimmungen in den anderen Bundesländern hin.

Bisher gab es in Österreich keine systematische Darstellung des Rechtes der Grundstückzusammenlegung. Beim Durchblättern der vorliegenden Broschüre zeigt sich, daß trotz allem Zwang, den Rahmen der Arbeit eng zu halten, Hinweise auf Grenzgebiete notwendig sind. Gründet sich doch die Tätigkeit der rechtskundigen Beamten der Agrarbehörden nicht nur auf die hier behandelten Agrargesetze, sondern durch die Kompetenzkonzentration auch auf andere Gesetze und Vorschriften, deren Inhalt dem von der Z. berührten Personenkreis vielfach unbekannt ist. Eine Erwähnung auch dieser Rechtsquellen sowie eine Überarbeitung des Sachregisters sind wünschenswert.

Auf die Darstellung des schwierigen und weitverzweigten Stoffes sei nur kurz und in einigen Punkten ergänzend eingegangen:

Der *Ausschuß der Parteien* hat in einigen Bundesländern nicht die Stellung einer Rechtspersönlichkeit, so daß dort formell die Ortsgemeinden die entsprechenden Verpflichtungen übernehmen.

Solange in Österreich kein auf Maßzahlen aufgebauter „Rechtskataster" eingeführt werden kann, muß stets darauf hingewiesen werden, daß die *Katastralmappe* nur eine Darstellung der Lage der Grundstücke bringt und dem ruhigen Besitzstand in der Natur größere Bedeutung zukommt.

Flächenermittlung der Bonitäten und Wertberechnung für jedes einbezogene Grundstück bilden die Grundlage für den Besitzstandsausweis und müssen deshalb *vor* der Auflage erfolgen.

Falls die *Neueinteilung vor der Feststellung* von Besitzstand und Bewertung vorgenommen wird, so ist wohl der Wert rechnerisch „genau", doch nicht rechtsgültig: Die Erschwernis durch allfällige Änderungen auf Grund von Berufungen belastet den Operationsleiter. Derzeit wird vom Landesagrarsenat verfügt, wenn durch Auflage des Besitzstands- und Bewertungsplanes gleichzeitig mit der Planauflage das Verfahren vereinfacht und beschleunigt werden soll.

Der Anordnung der vorläufigen Übernahme der Abfindungsgrundstücke muß eine *Abstimmung* vorausgehen, ein rechtlich sehr bedeutender Höhepunkt im ganzen Verfahren. Der gesetzmäßigen Durchführung der Abstimmung ist deshalb *dieselbe* Aufmerksamkeit zu widmen wie anderen Maßnahmen!

Seit Jahren ist es üblich, den Parteien bereits *zur Abstimmung* einen *Auszug* aus dem Abfindungsausweis zuzustellen.

„Das Eigentum an den Abfindungsgrundstücken geht mit Erlassung des die Übernahme verfügenden Bescheides auf die Übernehmer bedingt über." Diese einzig dastehende Ausnahme zur Erlangung eines Rechtes an unbeweglichen Sachen wird überhaupt nicht kommentiert. Der Unterschied zwischen bücherlichem und rechtlichem Eigentum (dieses gleich dem in der Natur) zieht sich von der vorläufigen Übergabe bis zur Rechtskraft des neuen Grundbuchstandes jahrelang hin, durch die Gegenüberstellungen formell überbrückt. Inzwischen kann dem Grundbuch der öffentliche Glauben nicht mehr zukommen. Welch hohe Verantwortung liegt also bei den Beamten der Agrarbehörden!

Die zur Durchführung eines Z.-Verfahrens erforderlichen Vermögensübertragungen unterliegen keiner öffentlichen Abgabe. Das muß auch für die Bereinigung von Familienbesitz gelten, besonders bei Gütergemeinschaft.

Es sei erwähnt, daß an den Folgemaßnahmen der Z. die *eigens hiefür* errichteten „Katasterdienststellen für agrarische Operationen" beteiligt sind. Auf Grund von Verträgen mit den Ortsgemeinden (!) werden die vom Z.-Verfahren ausgeschlossenen Gebiete (zumindest die Ortsriede) neuvermessen. Erst *nach* Anlegen des neuen Katastraloperates und des neuen Grundbuches kann das Z.-Verfahren abgeschlossen werden.

Trotz vorläufiger Übergabe kann die Neubemessung der Steuern durch das Finanzamt erst später erfolgen. Also auch hier eine jahrelange Spanne zwischen Rechtswirksamkeit des neuen Standes und formeller Durchführung.

Von der geschäftlichen und technischen Instruktion zur Durchführung agrarischer Operationen wurde ein wesentlicher Teil, dem staatlichen Vermessungswesen entsprechend, hinfällig.

Dem Praktiker begegnet also ständig eine Fülle von Fragen aus dem Recht der Zusammenlegung, deshalb gehört die vorliegende Broschüre vor allem in seine Hand, nicht nur wegen der abgedruckten Gesetze.

Dozenten und Studenten an Hoch- und Fachschulen, auch die Beamtenanwärter zur Fachprüfung werden die übersichtliche Zusammenfassung schätzen.

Die mit der Materie befaßten Notare, Rechtsanwälte, Beamten der Gerichte, Vermessungsbehörden usw., die Standesvertretungen und Mandatare finden eine einmalige Bearbeitung des interessanten Stoffes. Der praktische Landwirt aber, dem die Z. der Grundstücke dienen soll, hat nach vielen über ihn ergehenden Worten etwas, das er getrost schwarz auf weiß nach Hause tragen kann.

Dem Verlag gebührt Anerkennung für die preiswerte Ausstattung. Möge der Schrift bald eine vermehrte Auflage beschieden sein! *Kuzmany*

Jordan-Eggert-Kneißl: **Handbuch der Vermessungskunde.** 10., völlig neu bearbeitete und neu gegliederte Ausgabe, Band IV, Mathematische Geodäsie (Landesvermessung), von Dr.-Ing. e. h. Max Kneißl, o. Professor an der Technischen Hochschule München. Zweite Hälfte: Die geodätischen Berechnungen auf dem Ellipsoid. Mit einem Anhang. 17 × 23,5 cm, S 675—1296 mit 160 Abbildungen. J. B. Metzler Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1959, Preis in Leinen gebunden DM 155·—.

Der Band IV/1, Erste Hälfte des Handbuches der Vermessungskunde wurde im XLVI. Jahrgang, Heft Nr. 4 der Zeitschrift besprochen. Nunmehr liegt der zweite Halbband vor. Auch diese Bandhälfte wurde in vielen Teilen neu bearbeitet, wobei Professor Dr.-Ing. Kneißl zwei hervorragende Fachkräfte, die Professoren Dr.-Ing. Bodemüller und Dr.-Ing. Rinner, als Mitarbeiter für einzelne Kapitel gewonnen hat.

Der vorliegende Halbband enthält den 3. Teil: Die geodätischen Berechnungen auf der Kugel (171 Seiten) und den 4. Teil: Die geodätischen Berechnungen auf dem Ellipsoid (435 Seiten). Der 3. Teil umfaßt: Kapitel VII, Die sphärische Dreiecksberechnung. Kapitel VIII, Rechtwinklig-sphärische Koordinaten. Kapitel IX, Geographische Koordinaten auf der Kugel. Kapitel X, Die Beziehungen zwischen den geographischen Koordinaten und den rechtwinklig-sphärischen Koordinaten und Kapitel XI, Abbildung der Kugelfläche auf die Ebene.

Im 4. Teil folgen: Kapitel XII, Normalschnitte und geodätische Linie. Kapitel XIII, Sphäroidische Dreiecksberechnung. Kapitel XIV, Sphäroidische Koordinaten. Dieses Kapitel ist von Professor Dr. Bodemüller einer vollständig neuen Umbearbeitung unterzogen worden. Kapitel XV, Die Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene, ist von Professor Dr. Rinner bearbeitet worden. Kapitel XVI, Ellipsoidübergänge und Netztransformationen, ist ein vollständig neuer Abschnitt aus der Feder von Professor Dr. Bodemüller. Abschließend folgen ein Namensverzeichnis und ein Sachverzeichnis für beide Halbbände.

Ein Anhang von 123 Seiten ist lose beigegeben. Er enthält im I. Teil Hilfstafeln für eine große Zahl von Breitenfunktionen des Besselschen und zum Teil des Internationalen Ellipsoides, weiters Tafeln für Verbesserung wegen Drahtneigung bei der Jäderinmessung, dann Tafeln für Berechnungen bei Soldnerschen- und Gauß-Krüger-Koordinaten. Diese Hilfstafeln sind nahezu unverändert den früheren Bänden III/1 und III/2 entnommen. Leider beginnen die Tafeln [78] bis [82] mit der Breite 47° bzw. 46° 30′. Dadurch sind sie im Bereich von Österreich nicht voll benützbar, da dessen südlichste Begrenzung bei der geographischen Breite 46° 22′ liegt. Der II. Teil umfaßt Formeln der sphärischen Trigonometrie, Reihenentwicklungen und Interpolationsformeln. Dieser Teil entspricht dem Kapitel II des früheren Bandes III/1. Der III. Teil bringt ein Verzeichnis von veröffentlichten Tafelwerken und neuere Hilfsmittel zur Berechnung und Umformung von konformen Koordinaten.

Das Werk enthält reichliche Literaturangaben. Die nunmehr vollständige „Mathematische Geodäsie" stellt ein gründlich bearbeitetes Handbuch und Lehrbuch der Landesvermessung dar, das bei leicht verständlicher Darstellung dem neuesten Stand auf diesem Fachgebiet vollkommen gerecht wird. Ausstattung, Druck und Abbildungen sind, wie bei allen bisher erschienenen Bänden, mustergiltig. *R.*

Jordan-Eggert-Kneißl: **Handbuch der Vermessungskunde.** 10., völlig neu bearbeitete und neugegliederte Ausgabe, herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Max *Kneißl*, Band V: Astronomische und physikalische Geodäsie (Erdmessung) von Prof. Dr. Karl *Ledersteger*. 2. Lieferung S. 145 bis 288, 3. Lieferung S. 289 bis S. 432. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung Stuttgart 1956. Subskriptionspreis 27 DM bzw. 33 DM.

Es sollen im folgenden die ersten drei Kapitel, das sind die Kapitel
VI (2. Lieferung S. 245—288), VII und VIII (3. Lieferung S. 289—406) der physikalischen
Geodäsie des neuen Jordan-Bandes V
besprochen werden.

Die vorliegende Bearbeitung des Jordanschen Handbuches durch Hofrat Ledersteger ist von der Eggertschen Bearbeitung so grundverschieden, daß die beiden überhaupt nicht verglichen werden können. Hofrat Ledersteger gibt seiner Bearbeitung offffenbar bewußt handbuchartigen Charakter. Dies hat wohl seinen Grund darin, daß die heutige Problematik der physikalischen Geodäsie jenen Punkt in ihrer Entwicklung erreicht hat, der eine vertiefte Sichtung der Probleme notwendig macht.

Im Kapitel VI „Die Mathematische Theorie wirbelfreier Felder (Potentialtheorie)" (44 S.) werden die Grundlagen der Potentialtheorie, soweit sie für das Studium des Schwerefeldes notwendig sind, in äußerst ansprechender Weise dargelegt. Bekanntlich liegt ja die Schwierigkeit der Potentialtheorie nicht so sehr in der mathematischen Behandlung, als vielmehr in der physikalischen. Die Potentialtheorie fordert ununterbrochen physikalische Kritik abstrakt-mathematischer Entwicklungen. Deshalb sind die Ausführungen des § 43 sehr interessant. Den Feldbegriff faßt Ledersteger nicht so streng, wie es in der Relativistik zu geschehen pflegt. Er läßt die an sich heterogenen Begriffsdualismen Raum-Materie der Klassik und Feld-Materie der Relativistik nebeneinander bestehen. Dennoch ist es interessant, daß der Autor am Ende des § 44 das Newtonsche Potential rein relativistisch formuliert, nämlich: Das Newtonsche Potential besitzt im ganzen euklidischen Raum physikalische Realität. Dies deckt sich auch mit der Forderung des sogenannten Wiener Kreises, daß nur solche Aussagen in der Physik sinnvoll seien, die einer Verifikation fähig seien. Da es die Geodäsie mit Newtonschen Kraftfeldern zu tun hat, finden im weiteren nur Begriffe der klassischen Physik Verwendung.

Nach den grundlegenden Definitionen werden in § 42 die Divergenz und ihre Theoreme, die Sätze von Gauß und Green dargestellt. An die Behandlung der Poissonschen und Laplaceschen Gleichung schließt sich die Formulierung von allgemeinen Sätzen des Raumpotentials. Die vier charakteristischen Eigenschaften des Newtonschen Raumpotentials werden systematisch behandelt. Die Dirichletsche Fassung, nach der jede Funktion, die diese vier Charakteristiken hat, ein Newtonsches Potential ist, wird angedeutet. Bei der Behandlung der Flächenpotentiale finden heuristische Methoden Verwendung. Zur Untersuchung der tangentialen Ableitungen findet die Hölder-Bedingung Verwendung, die ja bekanntlich nicht die Differentierbarkeit fordert. Dazu schließt sich ein Exkurs in die Theorie der Doppelbelegungen. Die Theorie des Raumpotentials wird durch das Umkehrproblem der Potentialtheorie fortgesetzt. Die für die Geodäsie so wichtigen Überlegungen werden mit Poincaréschen Schlußweisen geführt. Die potentialtheoretische Behandlung der harmonischen Funktionen ist überaus durchsichtig geführt. Aus den Theorem von Green ergeben sich eine Fülle von Folgerungen, wie etwa der Unitätssatz der ersten Randwertaufgabe und daß jede harmonische Funktion ein Newtonsches Potential ist. Die Grundlagen für die Lösung der Randwertaufgaben der Potentialtheorie führen direkt zum „Prinzip von Dirichlet". Die drei Randwertaufgaben, von denen ja die zweite für die Geodäsie die bedeutendste ist, werden im § 49 behandelt. Ein Ausblick auf die praktisch wichtigsten Transformationen des Laplaceschen Operators beendet diese Einführung in die Potentialtheorie.

Im Kapitel VII (52 Seiten) werden ausführlichst die Kugelfunktionen und die Laméschen Funktionen behandelt. Damit werden dem Geodäten die Handhaben gegeben, seine Probleme zu lösen, ohne sofort auf die einschlägige mathematische Literatur zurückgreifen zu müssen; die mathematische Behandlung ist naturgemäß sehr allgemein gehalten. Durch dieses Kapitel werden daher unnötige Schwierigkeiten aus dem Wege geräumt. Die einleitenden Betrachtungen über orthogonale Funktionssysteme (§ 51) gestatten sofort einige Ausblicke auf die Integralgleichungen die in der Theorie der Gleichgewichtsfiguren eine eminente Bedeutung haben. Die Kugelfunktionen, von Laplace werden als Lösungen eines Eigenwertproblems der Potentialtheorie in üblicher Weise dargelegt. Die Legendreschen Polynome werden nicht aus Orthogonalisierungsprozessen der Polynome 1, x, $x^2, \ldots$, sondern bequemer aus der erzeugenden Funktion $(1:r)$ hergeleitet. Die eleganten Entwicklungen der Folgerungen lassen an die Hopfnerschen erinnern. Die Figuren 53. 1a und 53. 1b sind informativ. Kommt es doch auch bei den Entwicklungen darauf an, daß man die geometrische Bedeutung der Kugelfunktionen nicht aus den Augen verliert. Die elementare Zuordnung von Laplaceschen Kugelfunktionen und Legendreschen Polynomen dient zur „Übung im Umgang mit Kugelfunktionen". Die Berechnung der Koeffizienten einer Entwicklung nach Kugelfunktionen wird nach Neumann auf zwei Arten demonstriert. Darauf sei speziell hingewiesen. Ist doch das Hauptanliegen des Geodäten an diese Theorie die praktische und nicht nur theoretische Entwicklung empirischer Funktionen. Die Randwertaufgaben für die Kugel bilden wieder eine Möglichkeit, die Brauchbarkeit der Kugelfunktionen zu bestätigen, und überdies bietet sich ein müheloser Übergang zu den Laméschen Funktionen. Diese sind ja in der Theorie des dreiachsigen Niveauellipsoides von größter Bedeutung. Sie werden aus dem Zusammenhang der potential-theoretischen Entwicklungen mit den Eigenwertproblemen von Differentialgleichungen gewonnen. Die Extremaleigenschaften dieser Eigenwerte nachzuweisen wird durch die geistreiche Poincarésche Entwicklung der Fundamentalfunktion bestätigt.

Im Kapitel VIII „Die Kräftefunktion und die Niveauflächen der Erde" (66 Seiten) zeigt sich die Meisterschaft der Darstellung des Autors auf ihrem Höhepunkt. Es wäre nicht zu verwundern, wenn dadurch der zweite Band von Helmerts „Mathematische und physikalische Theorien der Höheren Geodäsie" ersetzt werden könnte. Die Lederstegersche Darstellung ist biegsamer und aufgelockerter als die unerhört komprimierte und konzentrierte Darstellungsweise Helmerts.

Die Schwerkraft (§ 60) wird wie bei Helmert klassisch definiert. Es wäre jedoch wünschenswert, bei einer Neuauflage das Prinzip von D'Alembert als das „Prinzip der verlorenen Arbeit" (nach Sommerfeld) zu bezeichnen. Der Beweis für die Geschlossenheit der Niveauflächen wird nach Pizzetti gestaltet. Es wird auch (berechtigt) auf die zu enge Abschätzung Pizzettis hingewiesen. Die Betrachtungen über Krümmungsverhältnisse der Niveauflächen werden auf die Erkenntnisse Bruns' über Krümmungsdiskontinuitäten ausgedehnt. Der § 66 ist der absoluten Differentialgeometrie des Schwerefeldes, der Geodäsie Intrinseca Marussis gewidmet. Diese äußerst interessante Entwicklung beruht auf der Forderung von Felix Klein, die Invariante der Biegungstransformation aufzusuchen. Durch die heute schon klassischen Entwicklungen der italienischen Schule der Differentialgeometrie um Ricci und Levi-Civita, gelingt es Ledersteger —, fast ohne Voraussetzungen an den Leser zu stellen —, das Theorem von Pizzetti abzuleiten; Marussis Arbeiten setzen eine genauere Kenntnis der Differentialgeometrie voraus. Die Entwicklungen reichen bis zum kovarianten und kontravarianten Maßtensor des natürlichen räumlichen Koordinatensystems des Schwerefeldes und des lokalgeodätischen Systems. Bei einer Neuauflage wäre ein weiteres Eingehen auf dieses moderne Problem zu begrüßen. Als Beweis der Fruchtbarkeit der Invariantentheorie Marussis bringt der § 67 eine moderne Methode der räumlichen Triangulierung, die nach Hotine. Der § 68 „Die Definition des Geoids das Niveausphäroid von Bruns und das Clairautsche Theorem" ist eines der wenigen Kapitel, das noch an die Eggertsche Bearbeitung anknüpft. Der folgende § 69 gibt die klassischen Entwicklungen des Rotationssphäroides 4. Ranges von Helmert wieder. Von hier geht ja Prof. Lederstegers eigene kritische Forschung zum Problem der Erdfigur aus, die er in zahlreichen Publikationen grundsätzlichen Charakters niedergelegt hat. Der Abschnitt über den Einfluß des Luftmeeres auf den Definitionsbereich der Schwerkraft gibt neben den klassischen Entwicklungen neuere Theorien der Grenzflächen der Atmosphäre wieder. Die Formänderungen der Niveausphäroide werden im Anschluß an Helmert entwickelt; es finden sich vorbereitende Entwicklungen für die Freiluftreduktion. Der dieses Kapitel abschließende § 72 ist den Elementen der Theorie von Bruns gewidmet. Auf Grund der Kugelfunktionsentwicklung der Kräftefunktion $W = U_n + T_n$ wird das Problem der Störmassen angeschnitten. Prof. Ledersteger folgt in großen Zügen den Entwicklungen seines Vorgängers auf dem Lehrstuhl für Höhere Geodäsie in Wien, Prof. Hopfner. Das Theorem von Bruns (Helmert) und der Term von Bruns (Hopfner) werden abgeleitet. Der mögliche Zusammenhang zwischen den scheinbaren Schwerestörungen und der Lehre der Isostasie wird nur aufgeworfen.

Jedem Kapitel ist eine ausführliche Übersicht moderner und modernster Literatur beigegeben. Daß die Ausführung mustergültig ist, braucht bei dem Range dieser Publikation nicht ausdrücklich festgehalten zu werden.

Dies als kurzer Überblick des Gebotenen. Es gibt, so seltsam es klingen mag, auch in der Naturwissenschaft packende Darstellungen. Prof. Ledersteger's vorliegende Bearbeitung ist eine von ihnen. Sie zeigt neben der modernsten Darstellungsart der Höheren Geodäsie die stupende Gestaltungskraft des Autors; er bringt es immer und immer wieder fertig, den kompliziertesten Problemen formvollendete Geschlossenheit und Prägnanz zu geben. Ansonst langwierige Beweise sind überraschend kurz und daher unerhört eindringlich gestaltet. Die in dieser Darstellung überall zu findenden Ausblicke machen den neuen Jordan Band V zum Buch aus der Forschung für die Forschung! *G. Oliwa*

G. Straßer: **Ellipsoidische Parameter der Erdfigur (1800—1950).** Veröffentlichung der Deutschen Geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Reihe A, Nr. 19, München 1957. 113 Seiten mit 4 Tabellen und einer Abbildung.

So wie die Kenntnis von Fremdsprachen die Möglichkeit erschließt, die Gedankenwelt fremder Völker kennen zu lernen, läßt erst die Kenntnis der gegenseitigen Verhältnisse der nationalen Maßeinheiten im großen Rahmen Schlüsse auf die Dimensionen der Erdfigur zu. Um darüber Aufschluß geben zu können, unterzog sich der Verfasser der Mühe, die entsprechenden Originalveröffentlichungen und Tafelwerke zu studieren.

Der gesamte Teil II ist den Beziehungen der klassischen Maßeinheiten und deren Normalmaße zum Meter gewidmet. Interessant für uns ist hier der Unterabschnitt: Das österreichische System; der Verfasser bringt die Beziehungen zwischen Klafter, „legalem" Meter und dem internationalen System.

Der Teil III behandelt die Dimensionen der Figur der Erde. Von Cassini (1718) bis Ledersteger (1951) und Liebermann (1953) werden Berechnungsweise und Resultate angeführt. Hier fehlt allerdings die Arbeit des österreichischen Jesuitenpaters Liesganig, der in den Jahren 1769 bis 1772 eine Meridianbogenmessung von Brünn bis Varasdin durchführte und dabei sehr interessante Ergebnisse erhielt.

Der Teil IV bringt unter anderem eine chronologische Aufstellung mit Angaben der Bearbeiter und der von ihnen bestimmten Ellipsoidparameter, eine Zusammenstellung aller Abplattungswerte, der Elemente der dreiachsigen Ellipsoide und statistische Angaben über die Gradmessungen bis 1900 einschließlich Literatur.

Es ist dem Verfasser zu danken, daß er sich der großen Mühe unterzogen hat, das umfangreiche Material zu sichten und es in übersichtlicher Weise zusammenzustellen *W. Embacher*

Dr. Ing. J. Umlauf: **Wesen und Organisation der Landesplanung.** Verlag Richard Bucht, Essen 1958, 17 × 25 cm, 256 Seiten, 11 Abb. Preis in Leinen DM 18.—.

Der Autor ist den zuständigen österreichischen Fachkreisen durch seine früheren Veröffentlichungen bestens bekannt. Das vorliegende Buch behandelt die Entwicklung der Landesplanung bis 1945 in Deutschland, und ab 1945 in der Bundesrepublik. Die *praktische* und *konkrete* Landesplanungsarbeit wurde absichtlich nicht behandelt, da hiefür ohnehin eine reichhaltige Fachliteratur zur Verfügung steht.

Die Hauptthemen sind die Entwicklung und die Klärung der ideellen Ziele und Grundlagen der Landesplanung sowie die Organisationsformen der Landesplanung in Vergangenheit, Gegenwart und künftiger Entwicklung.

Als Beginn der Deutschen Landesplanung ist die 1910 durchgeführte Gründung des Planungsverbandes „Zweckverband Groß-Berlin" anzusehen. Unter den verschiedensten Rechtsformen entstanden vor allem in Nord- und Mitteldeutschland eine Reihe weiterer Planungsstellen, so daß 1932 schon 29% der Fläche und 58% der Bevölkerung des Deutschen Reiches davon erfaßt wurden.

Von den anfänglich freiwilligen und regional beschränkten Planungsverbänden und Planungsstellen ausgehend, und an deren offensichtlich erfolgreichen und zweckmäßigen Arbeitsergebnisse anknüpfend, entwickelten sich allmählich die amtlichen Landesplanungsstellen, die heute praktisch alle Länder Deutschlands umfassen.

Aus der Buchgliederung ergibt sich übersichtlich die Inhaltsabgrenzung, weshalb sie nachfolgend angeführt wird: a) Historische Abgrenzung, b) Die Entwicklung der Landesplanung 1910 bis 1935, c) Die Reichsstelle für Raumordnung 1935 bis 1945, d) Die Entwicklung der Landesplanung seit 1945, e) Versuch eines Leitbildes des Planens, f) Originaltexte, Auszüge und Inhaltsangaben von Gesetzen, Verordnungen, Erlässen, Satzungen, Abkommen usw. betreffend Planungen.

Mit großer Sachkenntnis, basierend auf zwanzigjähriger Praxis in der Landesplanung, gibt der Autor eine sehr geschickt zusammengestellte geschichtliche Entwicklung von fast 50 Jahren Deutscher Landesplanung.

Fachlich wichtig erscheinen dem Rezensenten die Abschnitte, die sich mit *Mißständen* der stürmischen Entwicklung dieses Fachgebietes befassen. Es hat sich auf dem Gebiet der Planung sowohl in gesetzgeberischer, als auch in fachwissenschaftlicher Hinsicht eine gewisse Sprachverwirrung eingeschlichen.

In einem besonderen Abschnitt werden deshalb Vorschläge zur Klärung der begrifflichen Grundlagen und der Terminologie gemacht. Es hat sich gezeigt, daß die üblichen Benennungen — Raumordnung, Landesplanung, Regionalplanung — keine sachlich eindeutigen Auslegungen gefunden haben. Als instruktives Beispiel wird das Bayrische Landesplanungsgesetz vom Jahre 1957 angeführt, wo eine Verwirrung der Terminologie und eine irreführende Vermengung wesentlich verschiedener Begriffe nachgewiesen wird.

Das vorliegende Buch ist für den Fachmann wertvoll, da es diese sehr verstreute Materie gesammelt darstellt. Man kann rückwirkend die Vor- und Nachteile der früheren gesetzgeberischen Grundlagen studieren und daraus für die künftige Organisation Lehren ziehen.

In Österreich sind in Wien und vielen anderen Bundesländern Landes- und Stadtplanungsämter am Werke. Deren Wirken und Grundlagen sind nur wenigen Fachleuten bekannt. Es wäre sehr wünschenswert, wenn ein ähnlich gestaltetes Werk über die Entwicklung des österreichischen Planungswesen erscheinen würde. Das betreffende Manuskript, verfaßt von Dipl.-Ing. Anton *Schimka*, Leiter der Wiener Planungsgemeinschaft für Landes-, Orts- und Siedlungsplanung, liegt bereits vor.

Dr. Karl Ulbrich

Dr. Ing. Willi Bonczek: **Baugrundordnung und Stadtaufbau, gezeigt am Beispiel Essen.** Verlag Richard Bucht, Essen 1957, 21 × 30 cm, 153 Seiten, 76 Abbildungen und Planausschnitte, Preis in Leinen DM 28.—.

Der Autor, nun Liegenschaftsdirektor der Stadt Essen, war früher mit großem Erfolg Leiter des Vermessungswesens der Volkswagenstadt Wolfsburg. Er ist in Österreich kein Unbekannter.

Die Hauptstadt Tirols, *Innsbruck*, war eine jener Städte, die, so wie in Österreich später noch Graz, über Beschluß der damaligen Reichsregierung ab 1939 in großzügigster Weise hätten um- und ausgebaut werden sollen. Da das Stadtvermessungsamt Innsbruck damals den zu gewärtigenden umfangreichen Vermessungs- und Absteckungsarbeiten nicht gewachsen war, wurde Anfang 1940, nach dem Vorbild der Volkswagenstadt, zusätzlich ein sogenanntes *Neumessungsamt* im Rahmen der damaligen Hauptvermessungsabteilung XIV gegründet. Dessen Aufgabenkreis hätte eine Kombination von Kommunal- und Katastralvermessung darstellen sollen und sein Aufbau wurde vom Verfasser dieser Besprechung, den *Bonczek* dabei wesentlich unterstützte, durchgeführt. Da die Aktivierung dieses für Österreich neuartigen Vermessungsamtes einige Monate erforderte, wurden mittlerweile die anfallenden Vermessungsarbeiten für die großen neuen Wohnblöcke im Vorort Pradl vom Personal des Wolfsburger Amtes unter der Leitung von *Bonczek* begonnen, bis sie dann Mitte 1940 vom Neumessungsamt Innsbruck übernommen werden konnten.

Bonczek zeigte sich damals als versierter Praktiker des kommunalen und staatlichen Vermessungswesens. Der Autor ist vor allem ein Fachmann des Liegenschaftswesens und Städtebaues, dessen vorliegendes Buch seine 20jährige Erfahrung widerspiegelt.

Der Inhalt des Buches gliedert sich in folgende 4 Hauptteile:

Teil A: Der Aufbau der deutschen Stadt aus der Sicht des Liegenschaftsingenieurs.

Teil B: Darstellung und historische Betrachtung einiger in der Stadt Essen durchgeführter Bodenordnungsmaßnahmen.

Teil C: Gedanken zur Gesetzgebung in der Bodenordnung.

Anhang: (Westdeutsches) Gesetz über Maßnahmen zum Aufbau in den Gemeinden (Aufbaugesetz) aus dem Jahre 1952.

Der Wiederaufbau zerbombter Städte, aber auch der normale Städtebau leidet bekanntlich sehr unter den Schwierigkeiten, die sich aus vorhandenen ungünstigen Parzellenformen ergeben und deren Beibehaltung von den betreffenden Besitzern fast stets mit oft unverständlicher Hartnäckigkeit betrieben wird. Der Autor gibt nun ausgezeichnete Beispiele wie es in Essen versucht, wurde, diese Situation sowohl in *zielsetzungsmäßiger* als auch in *gesetzgeberischer* Weise zu lösen. Wichtig für die Städtebau-Praxis erscheint die in Essen erfolgreich durchgeführte Bodenordnung auf *freiwilliger* Basis, die vom Autor mit Recht besonders betont und behandelt wird. Es wird ferner gezeigt, wie es gelang, die mittelalterliche Altstadt von Essen in behutsamer Weise den heutigen Verkehrs- und Raumbedürfnissen anzupassen, was durch die Beigabe einer Deckpause sehr anschaulich dargestellt ist.

Sehr gelungen erscheint die Auswahl der Planbeispiele, die durch die Gegenüberstellung des jeweiligen alten und neuen Zustandes außerordentlich instruktiv wirken, insbesondere dadurch, daß sie nicht überladen sind und das Wesentliche durch besondere Farbgebung sehr gut herausgearbeitet wurde. Eine große Anzahl guter Bilder ergänzen dieses Buch, dessen Ausstattung alle Anerkennung verdient.

Zusammengefaßt sei gesagt, daß dieses Buch in keinem Stadtbauamt, Stadtvermessungsamt und Stadtplanungsamt fehlen sollte. *Dr. Karl Ulbrich*

Planungsgemeinschaft für Landes-, Orts- und Siedlungsplanung: **Landesplanliche und raumwirtschaftliche Gesichtspunkte zur Planung einer Autobahn von Wien nach Süden.** Eine landesplanliche Untersuchung, im Auftrag der Burgenländischen Landesregierung durchgeführt durch die Planungsgemeinschaft für Landes-, Orts- und Siedlungsplanung. Kurzfassung, 22 Seiten, 12 Karten, 8 Tabellen, 5 Diagramme. Format 21 × 29,5 cm, Verlag Planungsgemeinschaft, Wien XIX, Chimanistraße 74, Wien 1959.

Das Planungswesen ist in Österreich relativ jüngeren Datums und praktisch noch ohne gesetzgeberische Fundierung. Von 1938—45 war Österreich in das Großdeutsche Planungswesen einbezogen worden. Diese Arbeiten waren aber damals utopisch und machtpolitisch orientiert.

Seit 1945 wurden bisher in 7 von den 9 Bundesländern Landesplanungsstellen aktiviert. Nur im Burgenland und in Vorarlberg bestehen derzeit noch keine Planungsämter. Im Frühjahr 1959 wurden an der Wiener Techn. Hochschule die Lehrkanzel für Städtebau und Siedlungswesen mit dem Planungsfachmann *Dr. Wurzer* besetzt, der durch Planungsarbeiten über das Lavanttal bekannt ist, so daß auch im Lehrsektor ein Fortschritt zu verzeichnen ist.

Die Burgenländische Landesbaudirektion hat nun durch das oben angeführte Wiener Institut, das bereits einige andere Veröffentlichungen herausgebracht hat, die vorliegende Untersuchung durchführen lassen. Dieses Institut steht unter der Leitung des Planungsfachmannes Dipl.-Ing. Anton *Schimka* und wird durch Arbeitsaufträge und Subventionen finanziert. Der Rezensent hat von den Veröffentlichungen dieses Institutes gerade das vorliegende Beispiel gewählt, da es infolge der vielen nötigen Planunterlagen den engen Fachkontakt zwischen Planungs- und Vermessungswesen besonders zeigt.

Die Arbeitsaufgabe bestand darin, ein Teilstück der österreichischen Südautobahn „Wien—Wr.-Neustadt—Graz—Tarvis“, und zwar die Strecke „Leobersdorf—Oberwart“, zu untersuchen.

Hier lagen zwei Trassenvarianten vor, und zwar: die „Wechseltrasse" über Aspang mit 77 km Länge und die „Burgenlandtrasse" über Oberpullendorf mit 86 km Länge. Wesentlich ist hiebei, daß diese Untersuchung nicht rein ingenieurmäßig durchgeführt wurde, also nicht nur vor allem die Kosten- und Rentabilitätsberechnung umfaßte. Das Problem wurde vielmehr auf breiter Grundlage bearbeitet, wobei die Verkehrsgeographie, Geologie, Meteorologie, Siedlungs- und Wirtschaftsgeographie, Bevölkerungs- und Berufsstatistik, Energieversorgung usw. berücksichtigt wurden. Die vorliegende Veröffentlichung ist also in landesplanlicher Hinsicht wesentlich umfassender, in ingenieurmäßiger Hinsicht wesentlich kompendiöser als die üblichen Generalprojekte von Großbauvorhaben.

Als Endergebnis der vorliegenden Untersuchung ergibt sich nicht nur, daß die längere Burgenlandtrasse um 840 Millionen Schilling billiger ist als die kürzere Wechseltrasse, sondern vor allem die Tatsache, daß die Wechseltrasse zum Großteil funktionslos durch ein nur dünn besiedeltes und nicht wesentlich entwicklungsfähiges Gebiet führt, während die Burgenlandtrasse die stark besiedelten Gebiete des Eisenstädter—Mattersburger Beckens, des Oberpullendorfer Bezirkes und des Oberwarther Gebietes verbinden würde und eine starke Aufschließung dieser wertvollen Wirtschaftsräume in die Wege leiten wird.

Das Original-Gesamtelaborat umfaßt 38 großformatige Karten- und Planbeilagen in den Maßstäben 1:25.000 bis 1:500.000, die durchwegs mehrfarbig ausgestattet wurden. Da deren Veröffentlichung zu langwierig und kostspielig gewesen wäre, wurde die vorliegende Kurzfassung mit einfarbigen (schwarzen) Kartenbeilagen herausgegeben. Für eine technische Veröffentlichung ist zu beanstanden, daß fast stets die Kartenmaßstäbe fehlen oder infolge der Verkleinerung unrichtig sind.

Sonst ist die vorliegende Veröffentlichung ein gutes Beispiel für solche Arbeiten. Es wäre sehr wünschenswert, wenn derartige Planungsarbeiten auch für kommende österreichische Großbauvorhaben erstellt werden würden, um irreparable Fehlinvestitionen zu vermeiden.

Planen kommt von Plan. Es ist deshalb erklärlich, daß die zentrale Stelle des österreichischen Vermessungswesens, das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, außer den üblichen staatlichen Karten- und Planwerken, Sonderarbeitskarten für derartige Arbeitszwecke bereitstellt. Es sind dies folgende 5 Arbeitskartentypen: 1. 1:200.000 Generalkarte von Österreich (Situation und Nomenklatur blaßgrau, Gewässer blaßgrau). 2. 1:200.000 Generalkarte von Österreich (Terrain blaßgrau, Gewässer blaßgrau). 3. Übersichtskarte von Österreich (Situation und Nomenklatur blaßgrau, Gewässer blaßgrau). 4. 1:500.000 Übersichtskarte von Österreich: a) Schichten blaßbraun, Gewässer blaßblau, b) Situation und Nomenklatur blaßgrau, Gewässer blaßblau. 5. 1:500.000 bundesländerweise Übersichtskarten der Ortsgemeinden (auf Papier und auf Folien).

Diese 5 Arbeitskartentypen erleichtern für wissenschaftliche Arbeiten sehr wesentlich die Anlage von thematischen Karten. *Dr. Karl Ulbrich*

Zeitschriftenschau

Die hier genannten Zeitschriften liegen, wenn nicht anders vermerkt, in der Bibliothek des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen auf.

I. Geodätische Zeitschriften

Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Berlin 1959: *Nr.* 4. *Stemmler*, Die Wertumlegung nach dem Vorschlag des wissenschaftlichen Beirats für Fragen der Bodenbewertung beim Bundesminister für Wohnungsbau. — *Englert*, Statistisches zur Baulandumlegung in Hessen. — *Gerardy*, „Geodätischer Calcul nach Gauß" und die Vermessung des Ätna. — *Pintschovius*, Nochmals: Modernisierung des Buchnachweises im Kataster. — *Kennemann*, Zusammenstellung von Wirtschaftlichkeits-Maßzahlen für die Beurteilung geodätischer Rechenformeln. — *Nr.* 5. *Friedrich*, Die Probleme bei der Verbindung kontinentaler Triangulationen. — *Braune*, Zur Frage der Beziehungen zwischen Grenzdifferenzen und mittlerem Fehler. — *Schmidt*, Widersprüche zwischen Landestriangulation und Katastertriangulation. — *Aurich*, Katasterbuchwerk und Lochkartentechnik.

Bollettino di Geodesia e Scienze affini, Firenze 1958: *Nr.* 3. *Caputo*, Über die Fehler, die sich bei der Unterbrechung der Serien des Modulus und der Korrespondenz bei der

Darstellung eines Rotationsellipsoides auf einer Ebene nach Gauß ergeben. — *Verbaandert*, Die moderne Anwendung von schreibenden Chronographen. — *Nr.* 4. *Fondelli*, Experimente und Prüfungsproben an einigen Galileo-Santoni-Stereosimplex — Modell III. — *Fichera*, Die Formel von Bessel und das Beobachtungsprogramm der Stundenstationen A. G. I. im Observatoire Royal de Belgique. — 1959: *Nr.* 1. *Bonifacino*, Über die zahlenmäßige Bestimmung von aerophotogrammetrischen Stützpunkten mittels Rechenmaschine. — *Decae*, Die Anlage des Eurotron des Cern in Genf. — *Proverbio*, Unregelmäßigkeiten der Kontakte der astronomischen Pendel und ein photoelektrisches Diapositiv um die sideralen Sekunden zu registrieren. — *Fondelli*, Der Interferenzkomparator „S. Salvadori" zur Taratur der Präzisionslibellen. — *Trombetti-Fondelli*, Die Transformierung der Winkelmaße in verschiedene Systeme.

Bulletin de la Société Belge de Photogrammétrie, Bruxelles 1959: *Nr.* 55. *Scherpbier*, La Photogrammétrie au service de l'ingénieur des Travaux Publics sous les tropiques. — *Scherpbier*, Fotogrammetrie ten dienste van de civiel ingenieur in de tropen.

Bulletin géodésique, Paris u. London 1958: *Nr.* 47/48. *Sodano*, A rigorous non-iterative procedure for rapid inverse solution of very long geodesics. — *Dufour*, Calcul de grandes géodésiques sur l'éllipsoïde. — *Dupuy*, Rapport d'évaluation des méthodes de calcul des longues lignes définies sur le sphéroïde terrestre. — *Nr.* 49. *Kelsey* and *Edge*, Trials of the tellurometer carried out jointly by the Ordonance Survey of Great Britain and the South African Council for Scientific and Industrial Research. — *Sodano*, Determination of Laplace azimuth between non-intervisible distant stations by parachuted flares and light crossings. — *Markowitz*, Use in geodesy of the results of lunar observations on artifical satellites. — *Markowitz*, Geocentric co-ordinates from lunar and satellite observations. — *Whipple* and *Hynek*, The IGY optical satellite tracking program as a source of geodetic information. — *Goldstein*, *Mattingly* and *Heyden*, On the geodetic application of solar eclipse. — *O'Keefe*, The occultation method of longline measurements.

Der Fluchtstab, Düsseldorf 1959: *Nr.* 3/4. *Heyink*, Eine Askania-Theodolit-Ausrüstung für Vermessungsarbeiten hoher Genauigkeit. — *Reuß*, Verfahrensmuster für die Aufnahme bestehender Hochspannungsfreileitungen.

Geodetický a kartografický obzor, Praha 1959: *Nr.* 4. *Sachunský*, Einige Grundsätze für die Technische Karte der Tschechoslowakei. — *Gál*, Der Einfluß der Luftbilder und der Flugdispositionen auf die Wirtschaftlichkeit der Luftbildmessung. — *Jaroš*, Zu den Problemen der topographischen Aufnahme im Maßstab 1:10.000 mittels der photogrammetrischen Universalmethode. — *Jiriček*, Die Ausnutzung des Photoplans bei der Schaffung und der Verbesserung der Genauigkeit der einheitlichen Bodenevidenz. — *Maršik*, Die Herstellung des Photoplans im Maßstab 1:5000 zu Zwecken der einheitlichen Bodenevidenz aus Luftbildern im Maßstab 1:23.000. — *Nr.* 5. *Kubáček*: Abschätzung der Ungenauigkeiten bei der linearen Koordinatentransformation in die Gauß'sche Abbildung. — *Mikšovský*, Möglichkeiten einer Ausnützung des Lichtsatzes in der kartographischen Produktion der CSR. — *Petráš*, Beitrag zur Fehlertheorie der terrestrischen Stereophotogrammetrie. - *Vyskočil*, Topograph. Revision photogrammetrisch ausgewerteter Karten.

Geodetski list, Zagreb 1959: *Nr.* 1—3. *Mende*, Beitrag zur Frage der Reduktion der beobachteten Schwerkraftwerte. — *Redžić*, Die Vermessungsarbeiten beim Aufbau des Wasserkraftwerkes Jablanica. — *Palman*, Die Ausgleichung des trigonometrischen Netzes in zwei oder mehreren Gruppen nach der Methode Pranis-Pranievič nach bedingten Beobachtungen. — *Jemrić*, Rückblick auf die Entwicklung des Fernrohrs der geodätischen Instrumente.

Geodézia és Kartográfia, Budapest 1959: *Nr.* 1. *Tárczy-Hornoch* und *Szádezky-Kardoss*, Umrechnung zwischen den Gauß-Krüger-Streifen mit Hilfe zweier Anschlußpunkte. — *Hazay*, Die mechanischen Prinzipien der Ausgleichung. — *Černook*, Reliefdarstellung auf physisch-geographischen angewandten Karten. — *Regöczi*, Die Verwendung der elektronischen Distanzmessung in unseren niederen geodätischen Arbeiten. — *Solc*, Die Anwendung von Nomogrammen bei der Berechnung der Polygonzüge. — *Szarka*, Die Anwendung der Matrixrechnung in der Ausgleichsrechnung. — *Pusztai*, Elektronische und elektrooptische Distanzmessung. — *Egri*, Mechanisierung der Bodenevidenz.

Nachrichten der Niedersächsischen Vermessungs- und Katasterverwaltung, Hannover 1959: *Nr.* 2. *Martens*, Noch einmal: Maßstab-und Maßstabssprünge bei Katasterrahmenkarten. — *Hintze*, Nordrichtung auf Kartenauszügen.

Photogrammetria, Amsterdam 1959: *Heft XV/2. Ackermann*, Suggestions for Rational Orientation on the Stereotope. — *Hallert*, Results of y-parallax Measurements in a Wild-Stereocomparator and Some Additional Notes to the y-parallax Method for the Determination of Some Types of Systematic Disturbances in Aerial Photographs. — *Brandenberger*, Strip Triangulation with Independent Geodetic Controls; Triangulation of Strip Quadrangles.

Photogrammetric Engineering, Washington 1959: *Nr .1. Massie*, Increasing Productivity through Multiple Use of Basic Data. — *Dill, Jr.*, Use of te Comparison Method in Agricultural Airphoto Interpretation. — *Raasveldt*, Determination of the Angle of Dip of Seemingly Vertical Aerial Photographs. — *Churchill*, Problem Analysis an the Role of Fundamental Image Extraction Techniques. — *Goodman*, Determination of Sand Grain Sphericity by Stereo Photomicrography. — *Cote, Jr.*, High-Speed Motion Pictures in Wood Research. — *Arthur*, A Note on Recent Developments in Analytical Aerial Triangulation. — *Dohrut*, Comments on Stereographs. — *Pafford* and *Prell*, The Terrain Data Translator. — *Pincus*, Some Applications of Terrestrial Photogrammetry to the Study of Shorelines. — *Pierson*, The Validity of Stereophotogrammetry in Volume Determination. — *Stoeckeler* and *Gorrill*, Airphoto Analysis of Terrain for Highway Location Studies in Maine. — *Zurlinden*, Reconsideration of the Quadruple Camera. — *Lohr*, and *Wade*, A System for Projecting Prints for Controlled Mosaics on Steep Slopes. — *Kobs* and *Chase*, Increasing Efficiency of Parallax Bar with Zeiss Mirror Stereoscope. — *Williams*, The Automatic Map Compilation System. — *Faulds*, Some Notes on the Displacement of Photographic Images Caused by Tilt and Relief. — *Smith-Goodman*, A Technique for the Identification of Farm Crops on Aerial Photographs. — *Heller*, *Aldrich* and *Bailey*, Evaluation of Several Camera Systems for Sampling Rorest Insect Damage at Low Altitude. — *Chittenden*, Differential Elevation by Adaptation of the Parallax-Correction Graph to Parallax Measurements on Aerial Photographs. — *Visser*, Systematic Procedure for Affine Rectification.

Przegląd Geodezyjny, Warszawa 1958: *Nr. 10. Fellmann*, Das II. Internat. Geophysikalische Jahr. — *Modrinski*, Die Frage der Bodenformenabbildung auf den Großmaßstabkarten nach den sowjetischen Forschungen (Fortsetzung). — *Jankovic*, Die Entwicklung der Geodäsie und Kartographie in Jugoslavien. — *Szpetkowski*, Formelfeststellung in Bezug auf die Genauigkeit der Grubenorientierung. — *Bramorski*, Anschlußpunkte zum Abstecken des Unter-Weichsel-Tunnels. — *Fedorowski*, Grundregel und Aufklärungen betr. Verfertigung einer neuen Geodäsiedokumentation zur Bodenkundegrundklassifikation. — *Nr. 11. Linsenbarth*, Über zwei Methoden der Beseitigung von Perspektivluftaufnahmeverzerrungen, die infolge der Geländenivellement entstehen (Fortsetzung in *Nr. 12*). — *Nr. 12. Stoiczew*, Triangulationsausgleichung. — *Janusz*, Das Problem der Geodäsienetzausgleichung unter Ausschluß der Voraussetzung fehlerloser Anschlußpunkte. — *Weychert*, Zur Methode der Knotenpunkte und der zulässigen Länge der Polygonzüge. — 1959: *Nr. 1. Zmuda*, Nationale Sammlungen von Landkarten. — *Kuckiewicz*, Zur Frage der Abhängigkeit der örtlichen Triangulation vom Staatsnetz. — *Grodzicki*, Neue Formen und Produktionsabteilungen in einem Geodäsiebetrieb. — *Walerowicz*, Stereograph SD. — *Lipinski*, Stadtinformationskarten. — *Baranski*, Grundstückkontrolle in der ČSR. — *Nr. 2. Trautsolt*, Das Bild eines Landwirtschaftsgeodäten. — *Fedorowski*, Die Auswertung von Luftbildern bei Landwirtschaftsarbeiten. — *Chudoba*, Nivellierinstrumente der Polnischen Optischen Werke (PZO). — *Lipinski*, Stadtinformationspläne, 2. Teil. — *Nr. 3. Klopocinski*, Die Ethik als Grundwert der Geodätenbefähigung. — *Baranski*, Grundstückteilung auf dem Einfamilienhaus-Baugelände. — *Kuligowki*, Anmerkungen zur Methodik des Bodenreformenzeichnens. — *Klażynski*, Über unterirdische Installationsnetze von Straßen und Parkanlagen. — *Lukasiewicz*, Analyse der Ausführung von Präzisionspolygonisierungsnetzen. — *Kwaśniewski*, Ausgleichung der Präzisions-Detailvermessung. — *Dybczynski* und *Hildt*, Reflektographie oder mechanische Herstellung von Diapositiven (Matrizen). — *Nr. 4. Szaflarski*, Die Tatrakarte von K. Korinstka a. d. J. 1864 und ihre Bedeutung in der Kartographie. — *Grygorczuk*, Am Rande des Aufsatzes „Verdichtende parallaktische Polygonisierung. — *Wojtulewicz*, Werden die „Nebenprodukte" der photogrammetrischen Bearbeitungen zu den richtigen Zwecken ausgenützt.

Revue des Géomètres-Experts et Topographes Français, Paris 1958: *Nr. 11. Wolf*, Le calcul d'une chaîne cadastrale. — *Nr. 12. Vandermaesen*, Relevé de l'inclinaison de la Tour des Halles à Bruges. — 1959: *Nr. 1. Wolf*, Méthode numérique de compensation expédiée des figures principales de triangulation (Schluß in *Nr.* 2). — *Nr. 3. Descossy*, Note génerale sur la Prospection géophysique. — *Mermin*, Mesure de la déformation des barrages. — *Nr.* 3. *Wolf*, La compensation d'un point isolé de triangulations d'après la méthode des moindres carrés. — *Nr.* 5. *Wolf*, L'abaque des parallaxes.

Rivista des Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali, Roma 1958: *Nr. 2—3. Lupori*, Vergleich der Kataster der verschiedenen Länder. — *Simonatti*, Frühere und heutige Bestimmungen über die Ermittlung der Besitz- und Bodenerträge für den Kataster. — *Armocida*, Der neue Gebäudekataster. — *Paroli*, Luftbildvermessung. — *Famularo*, Der Rechtskataster. — *Marchi*, Der Stand der Arbeiten beim Grund- und beim Gebäudekataster. — *Saja*, Die Katasterdaten zu Schätzungszwecken. — *Sorbi*, Kataster und Bodenpathologie. — *Nr. 4. Paroli*, Aufnahmeverfahren und Instrumente während der 70 Jahre der Erstellung des Grundkatasters. — *Nr. 5. Bonifacino*, Versuchsweise Erprobung der ellipsoidischen trigonometrischen Höhenmessung. — *Dragonetti*, Ein neues Ausgleichsverfahren für ringförmige Triangulations- und Trilaterationsnetze.

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, Winterthur 1959: *Nr. 2. Matthias*, Elektronische Distanzmeßgeräte (Schluß in *Nr. 3*). — *Strebel*, Reiseeindrücke aus dem Meliorationsgebiet des Podeltas. — *Nr. 3. Imhof*, Bemühungen um einen internationalen Zusammenschluß kartographischer Organisationen. — *Nr.* 4. *Hunziker*, Die Schweremessungen der Schweizerischen Geodätischen Kommission. — *Tomkiewicz*, Über die Absteckung von zusammengesetzten Kurven. — *Märki*, Nochmals: Das Problem der Wünschelrute. — *Nr.* 5. *Griesel*, Amtliche Vermessungen im Kanton Graubünden. — *Mangold*, Der Photokataster als Hilfsmittel der Grundbuchführung im nichtvermessenen Gebiet. — *Schneider*, Stollentriangulation und Absteckung.

Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, Gravenhage 1958: *Nr.* 4. Übersicht über die Entwicklung der Geodäsie in den Niederlanden. *Nr.* 5. *Bruins*, Géodésie et gravimétrie. — *Van Gent*, Le calculateur automatique et la pratique géodésique. — *Nr.* 6. Le congres de la F.I.G. 1958. — 1959: *Nr.* 1. *Harkink*, Quelques publications nouvelles sur les calculs topométriques élementaires. — *Haasbroek*, La détermination numérique de l'ellipse des erreurs.

Vermessungstechnik, Berlin 1958: *Nr. 12. Stark*, Zur Herstellung von Wirtschaftskarten für die Landwirtschaft. — *Bahnert*, Die modernen Basislatten und ihre Endmarken. — *Hristow*, Strenger Beweis für die Darstellung symmetrischer Winkelbeobachtungen als äqiuvalente unabhängige Richtungswerte. — *Kretzschmar*, Feststellung der Ausmaße von Erdkrustenbewegungen als Aufgabe des Nivellements hoher Genauigkeit. — *Müller*, Betrachtungen und Untersuchungen über die Besonderheiten der Forstlichen Geodäsie und über die Probleme in ihren Grenz- und Nachbargebieten. — 1959: *Nr. 1. Peschel*, Die Bedeutung des Krassowski-Ellipsoides für das deutsche Vermessungswesen. — *Hinz*, Seevermessung, Probleme und Perspektiven. — *Töpfer*, Ein Vergleich von Hilfsmitteln für Sonnenanzielungen. — *Bernatzky*, Zur Anlage und Messung örtlicher Netze für die Bestimmung von Zentrierelementen. — *Nr.* 2. *Neubert*, Vergleiche zwischen Ergebnissen von Feinnivellements mit verschiedenen Instrumenten. — *Hinz*, Seevermessung, Probleme und Perspektiven. — *Oberläuter*, Vektorielle Ausgleichung nach Friedrich bei der Punktbestimmung durch Einschneiden. Teil II: Vorwärtseinschneiden und Rückwärtseinschneiden. — *Müller*, Ein Beitrag zur markscheiderischen Erfassung großer Hohlräume unter Tage. — *Straubel*, Versuche zur seismischen Orientierung von Grubenbauen. — *Probst*, Untersuchung mechanischer Hilfsmittel zur Konstruktion von Anschauungs- und Anaglyphenbildern und ihre Verwendung im Bergbau. — *Nr.* 3. *Weymar*, Gesetzmäßiges Generalisieren — eine Forderung der modernen Kartographie. — *Rodemerk*, Eine Tachymeterlatte für direkte Höhenmessung. — *Rasche*, Die Orientierung von Luftbildaufnahmen durch Bildvergleich zur Verbesserung der graphischen Bildtriangulation. — *Neubert*, Berufsbild des Markscheiders.

Vermessungstechnische Rundschau, Hamburg 1959: *Nr. 2. McLelland*, Kreiseltheodolit im geodätischen Einsatz. — *Matthias*, Über Doppelbild- und Diagrammtachymeter der Firma Kern in Aarau. — *Metz* und *Hübinger*, Ein verbessertes Trig. Form. 15 für Maschinenrechnung. — *Stowasser*, Spannweitenprobe. — *Pape*, Neugestaltungsvorschlag des Flurbuches. — *Walkhoff*, Neugrad in Altgrad mit Rechentrick. — *Kennemann*, Über die Behandlung und Bedienung geodätischer Instrumente. — *Wittke*, Elektronisches Drucken. — *Bibra*, Erfahrungen beim Leit- und Bolzen-Nivellement mit Zeiss Ni2. — *Nr. 3. Engel*, Die Herstellung von Flußkarten nach Luftbildern. — *Nellner*, Zur Grenzanerkennung. — *Johannsen*, Allmähliche Erneuerung der Liniennetze im bestehenden Kataster. — *Nr.* 4. *Haller*, Theodolitachsen, ihre Konstruktion, Herstellung und Herstellungsgenauigkeit. — *Engel*, Die Herstellung von Flußkarten nach Luftbildern. — *Johannsen*, Allmähliche Erneuerung der Liniennetze im bestehenden Kataster. — *Johannsen*, Ein Grenzstein gehört auf den Grenzpunkt. — *Kennemann*, Winkelumwandlung Alt- in Neugrad ohne Rechenhilfsmittel. — *Schoebel*, POKA, eine neue Zeichenfolie. — *Pavel*, Testung der POKA-Folie. — *Nr.* 5. *Kühne*, Das elektrische Auge als Hilfsmittel zur Vereinfachung der Zielseintellung. — *Johannsen*, Allmähliche Erneuerung der Liniennetze im bestehenden Kataster. — *Schmidt-Falkenberg*, Aufgaben der Kartographie und Gruppierung der Karten. — *Preyß*, Vorrichtungen zur Ziellinien-Stabilisierung.

Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1959: *Nr. 2. Finsterwalder*, Topographisch-morphologische Kartenproben. — *Finsterwalder-Rathjens*, Die Kartenprobe Eiszerfall-(Kessel-feld-)Landschaft bei Seeon 1:25.000. — *Mulert*, Zur Gewichtsfunktion indirekt bestimmter Richtungen. — *Ackerl*, Der Satzschluß. — *Arnold*, Die Bestimmung der Gewichtsreziproken für das Minimisieren einer gegebenen Funktion. — *Nr. 3. Ledersteger*, Die möglichen Gleichgewichtsfiguren der rotierenden Erdmasse. — *Gigas*, Die Aufgaben des Vermessungs- und Kartenwesens unter der Obhut der Vereinten Nationen. — *Löbel*, Vektorielle Mehrpunktsausgleichung. — *Nr.* 4. *Wolf*, Die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen mit Unbekannten im Matrizenkalkül. — *Löbel*, Vektorielle Mehrpunktausgleichung. — *Gotthardt*, Analytische Auswertung von Luftbildpaaren. — *Pinkwart*, Geleitwort zur Vermessungspunktanweisung von Nordrhein-Westfalen. — *Nr.* 5. *Hallert*, Das optimale Verhältnis zwischen Flughöhe und Triangulationsdistanz. — *Hubeny*, Weiterentwicklung der Gauß'schen Mittelbreitenformeln. — *Kempin*, Ein Beitrag zur Berechnung der Pizzetti- und Helmertprojektion aus Schweremessungen.

II. Andere Zeitschriften

Mitteilungen der Geographischen Gesellschaft, Wien 1958: *Heft* 3. *Hensler*, Beispiel einer Flurbereinigung in einer Tiroler Bergbauernsiedlung: Boden-Pfafflar. —

Zeiss-Werkzeitschrift, Oberkochen/Württ. 1959: *Nr.* 32. *Schellens*, Die neue 2-m-Basislatte mit Temperaturkompensation.

Abgeschlossen am 31. Mai 1959.

Zeitschriftenschau zusammengestellt im amtlichen Auftrag
von Bibliotheksleiter K. Gartner.

Contents:

Sommaire:

Anschriften der Mitarbeiter dieses Heftes:

o. Prof. *Dipl.-Ing. Dr. K. Hubeny*, Technische Hochschule Graz, Rechbauerstraße 12.

Hochschuldozent *Dr. phil. W. Eberl*, Wien XIX, Nußwaldgasse 22a.

II. Dienstvorschriften

Nr. 1: *Benennungen, Zeichen und Abkürzungen im staatlichen Vermessungsdienst.* 44 Seiten, 2. Auflage, 1956. Preis S 10·—. (Vergriffen.)

Nr. 2: *Allgemeine Bestimmungen über Dienstvorschriften, Rechentafeln, Vordrucke und sonstige Drucksorten.* 56 Seiten, 2. Auflage, 1957. Preis S 10·—.

Nr. 8: *Die österreichischen Meridianstreifen.* 62 Seiten, 1949. Preis S 12·—.

Nr. 14: *Fehlergrenzen für Neuvermessungen.* 5. Auflage, 1958, 27 Seiten. Preis S 15·—.

Nr. 15: *Hilfstabellen für Neuvermessungen.* 2. Auflage, 1958, 39 Seiten, Preis S 15·—.

Nr. 16: *Einschaltpunkt- und Polygonnetz.* 1958, 40 Seiten, Preis S 20·—.

Dienstvorschrift Nr. 35 (Feldarbeiten der Vermessungstechnik bei der Bodenschätzung). Wien, 1950. 100 Seiten, Preis S 25·—.

Nr. 46: *Zeichenschlüssel der Österreichischen Karte 1:25.000 samt Erläuterungen.* 88 Seiten, 1950. Preis S 18·—.

Technische Anleitung für die Fortführung des Grundkatasters. Wien, 1932. Preis S 25·—.

Liegenschaftsteilungsgesetz 1932. (Sonderdruck des B. A. aus dem Bundesgesetzblatt.) Preis S 1·—.

III. Weitere Publikationen

Prof. Dr. Rohrer, *Tachymetrische Hilfstafel für sexagesimale Kreisteilung.* Taschenformat. 20 Seiten. Preis S 10·—.

Der österreichische Grundkataster. 66 Seiten, 1948. Preis S 15·—.

Behelf für die Fachprüfung der österreichischen Vermessungsingenieure (herausgegeben 1949).

Heft 1: Fortführung 1. Teil, 55 Seiten, Preis S 11·—

Heft 2: Fortführung 2. Teil, 46 Seiten, Preis S 10·—

Heft 3: *Höhere Geodäsie,* 81 Seiten, Preis S 16·—

Heft 4: *Triangulierung,* 46 Seiten, Preis S 9·—

Heft 5: *Neuvermessung, Nivellement und topographische Landesaufnahme.* 104 Seiten, Preis S 20·—

Heft 6: *Photogrammetrie, Kartographie und Reproduktionstechnik.* 70 Seiten, Preis S 15·—

Neuerscheinungen

von offiziellen Karten der Landesaufnahme

Österreichische Karte 1:50.000

71 Ybbsitz
91 St. Johann in Tirol
92 Lofer
121 Neukirchen am Großvenediger
156 Muhr
170 Mathon
190 Leibnitz
191 Kirchbach in Steiermark

Preise der Kartenwerke:

	je Blatt S
Österreichische Karte 1:25.000	
1/8 Blätter (Aufnahmsblätter)	7·—
1/4 Blätter (Halbsektionen)	10·—
Zeichenerklärung 1:25.000	2·—
Österreichische Karte 1:50.000 ohne Wegmarkierung	7·50
Österr. Karte 1:50.000 mit Wegmarkierung (Wanderkarte)	8·50
Prov. Ausgabe der Österr. Karte 1:50.000 ohne Wegmarkierung	4·—
Prov. Ausgabe der Österr. Karte 1:50.000 mit Wegmarkierung (Wanderkarte)	5·—

Dieses Kartenwerk umfaßt insgesamt 213 Blattnummern.

Hievon sind bisher erschienen:

56 Blätter Österreichische Karte 1:50.000 mit Schichten in Mehrfarbendruck sowie 155 Blätter als provisorische Ausgabe der Österreichischen Karte 1:50.000 in Zweifarbendruck (schwarz mit grünem Waldaufdruck).

Die Blätter 39, 40, 41, 42, 57, 60, 105, 106 sind mit Schichtenlinien und Schummerung, alle anderen Blätter mit Schichtenlinien und Schraffen versehen. Das Blatt 27 ist auf dem Blatte 45, das Blatt 194 auf dem Blatte 168 als Übergriff ohne Auslandsdarstellungen aufgedruckt.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen und in der amtlichen Verkaufsstelle des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Landesaufnahme), Wien 8, Krotenthallergasse 3

Neuerscheinungen des österr. Wasserkraftkatasters

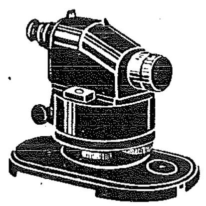
Im Zuge der Bearbeitung des neuen österr. Wasserkraftkatasters ist erschienen:

Drau I, Doppelband, Preis S 500·—

Die bisher erschienenen Bände sind durch den Kartenverlag des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Landesaufnahme in Wien bzw. durch den Buchhandel zu beziehen.

Schneller, bequemer und genauer messen!

Na



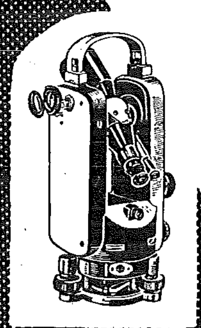
INGENIEUR-NIVELLIER Bauart Na

mit automatischer Horizontierung der Ziellinie

mit astronomischem oder terrestrischem Fernrohr. Die besondere Ausbildung des Pendels gestattet, die Ziellinie mit einer Genauigkeit von etwa 1″, d. h. etwa 1 mm auf 200 m, horizontal zu halten.

*

Tu



PRÄZISIONS-THEODOLITE

mit automatischem Höhenindex

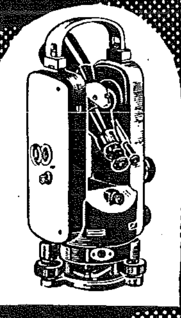
SEKUNDEN-THEODOLIT Bauart Tu

für Triangulation ab II. Ordnung, Feinpolygonierung und astronomische Ortsbestimmung. Kreisablesung nach der Koinzidenzmethode direkt bis zu 2^{cc} bzw. 1″, Schätzung bis zu $0{,}2^{cc}$ bzw. 0,1″.

Die Präzision unserer Serienfertigung garantiert eine gleichbleibend extrem hohe Kreisgenauigkeit.

*

Tt



TACHYMETER-THEODOLIT Bauart Tt

für Kataster- und Ingenieurvermessungen. Mikrometerablesung an je einer Kreisstelle direkt bis zu 1^{c} bzw. 20″; Kreisklemme.

Unterlagen über unser vielseitiges Herstellungsprogramm geodätischer und geophysikalischer Instrumente stehen gern zur Verfügung.

*

Vertretung für Österreich:

NORMA • FABRIK ELEKTRISCHER MESSGERÄTE GmbH
WIEN XI/79, FICKEYSSTRASSE 1–11

ASKANIA-WERKE • AKTIENGESELLSCHAFT
BERLIN-FRIEDENAU