

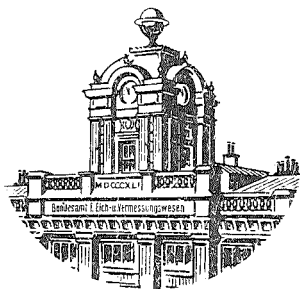
Wien - Univ.-Bibl. Dipl.-Ing. Dr. Hans SCHMID  
Freundlicher Übernahme. Josef Zeger

**Sonderheft 32**  
der Österreichischen Zeitschrift  
für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Untersuchungen über die  
trigonometrische Höhenmessung  
und die Horizontierung von  
schräg gemessenen Strecken

von

Josef Zeger, Wien



Herausgeber:

Österreichischer Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie  
gemeinsam mit dem  
Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen in Wien

Eigentümer und Verleger:

Österreichischer Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie  
A-1082 Wien VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3

Wien 1978

# Österreichischer Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Friedrich Schmidt-Platz 3, 1082 Wien

## Sonderhefte zur Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie

- Sonderheft 1: *Festschrift Eduard Doležal. Zum 70. Geburtstag.* 198 Seiten, Neuauflage, 1948. Preis S 18,-. (Vergriffen.)
- Sonderheft 2: Lego (Herausgeber), *Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme.* 40 Seiten, 1935. Preis S 24,-. (Vergriffen.)
- Sonderheft 3: Ledersteger, *Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid.* 140 Seiten, 1948. Preis S 25,-. (Vergriffen.)
- Sonderheft 4: Zaar, *Zweimedienphotogrammetrie.* 40 Seiten, 1948. Preis S 18,-.
- Sonderheft 5: Rinner, *Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie.* 45 Seiten, 1948. Preis S 18,-.
- Sonderheft 6: Hauer, *Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene.* 31 Seiten. 1949. (Vergriffen.)
- Sonderh. 7/8: Ledersteger, *Numerische Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung. Zur Analyse der Laplace'schen Widersprüche.* 59 + 22 Seiten, 1949. Preis S 25,-. (Vergriffen.)
- Sonderheft 9: *Die Entwicklung und Organisation des Vermessungswesens in Österreich.* 56 Seiten, 1949. Preis S 22,-.
- Sonderheft 11: Mader, *Das Newton'sche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung.* 74 Seiten, 1951. Preis S 25,-.
- Sonderheft 12: Ledersteger, *Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoids und der absoluten Lage der Landestriangulationen.* 140 Seiten, 1951. Preis S 35,-.
- Sonderheft 13: Hubeny, *Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoids.* 208 Seiten, 1953. (Vergriffen.)
- Sonderheft 14: *Festschrift Eduard Doležal. Zum 90. Geburtstag.* 764 Seiten und viele Abbildungen. 1952. Preis S 120,-.
- Sonderheft 15: Mader, *Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern.* 26 Seiten und 12 Tabellen. 1954. Preis S 28,-.
- Sonderheft 16: *Theodor Scheimpflug – Festschrift.* Zum 150jährigen Bestand des staatlichen Vermessungswesens in Österreich. 90 Seiten mit 46 Abbildungen und XIV Tafeln. Preis S 60,-.
- Sonderheft 17: Ulbrich, *Geodätische Deformationsmessungen an österreichischen Staumauern und Großbauwerken.* 72 Seiten mit 30 Abbildungen und einer Luftkarten-Beilage. Preis S 48,-.
- Sonderheft 18: Brandstätter, *Exakte Schichtlinien und topographische Geländedarstellung.* 94 Seiten mit 49 Abb. und Karten und 2 Kartenbeilagen, 1957. Preis S 80,- (DM 14,-).
- Sonderheft 19: *Vorträge aus Anlaß der 150-Jahr-Feier des staatlichen Vermessungswesens in Österreich, 4. bis 9. Juni 1956.*
- Teil 1: *Über das staatliche Vermessungswesen,* 24 Seiten, 1957. Preis S 28,-.
- Teil 2: *Über Höhere Geodäsie,* 28 Seiten, 1957. Preis S 34,-.
- Teil 3: *Vermessungsarbeiten anderer Behörden,* 22 Seiten, 1957. Preis S 28,-.
- Teil 4: *Der Sachverständige – Das k. u. k. Militärgeographische Institut.* 18 Seiten, 1958. Preis S 20,-.
- Teil 5: *Über besondere photogrammetrische Arbeiten.* 38 Seiten, 1958. Preis S 40,-.
- Teil 6: *Markscheidewesen und Probleme der Angewandten Geodäsie.* 42 Seiten, 1958. Preis S 42,-.

# Sonderheft 32

der Österreichischen Zeitschrift  
für Vermessungswesen und Photogrammetrie

## Untersuchungen über die trigonometrische Höhenmessung und die Horizontierung von schräg gemessenen Strecken

von

Josef Zeger, Wien



Herausgeber:

Österreichischer Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie  
gemeinsam mit dem  
Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen in Wien

Eigentümer und Verleger:

Österreichischer Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie  
A-1082 Wien VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3

Wien 1978

**Druck:**

Umschlag — Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen (Landesaufnahme), Wien.

Inhalt — Fa. Anton Riegelnik, Offsetschnelldruckerei 1080 Wien, Piaristengasse 19.



INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1 PROBLEMSTELLUNG	1
2 VORBEREITENDE BERECHNUNGEN	3
2,1 Allgemeines	3
2,2 Krümmungsradien	3
2,3 Punktentfernungen	9
2,4 Winkel $\gamma_{i,k}$	12
2,5 Reduktion der Vertikalwinkelmessungen auf andere Bezugspunkte	14
2,51 Allgemeines	14
2,52 Reduktion auf die Höhenbezugspunkte der elektronischen Streckenmessung	14
2,53 Reduktion auf die Punktstabilisierungen	15
2,54 Genauigkeitshinweise	16
3 HÖHENSYSTEME	18
3,1 Allgemeines	18
3,2 Gebrauchshöhen	19
3,3 Geoidisches Höhensystem	20
3,4 Ellipsoidisches Höhensystem	21
4 HORIZONTIERUNG SCHRÄG GEMESSENER STRECKEN	23
4,1 Horizontierung unter Verwendung von Vertikalwinkel= messungen	23
4,2 Horizontierung ohne Verwendung von Vertikalwinkel= messungen	23
4,3 Fehlergrenzen für horizontierte Schrägstrecken	24
4,4 Fehler in der horizontalen Strecke bei konventioneller Berechnung	25
5 ELLIPSOIDISCHE HÖHENUNTERSCHIEDE AUS VERTIKALWINKELMESSUNGEN	31
5,1 Höhenformel mit gemessener Schrägstrecke	31
5,2 Höhenformel mit horizontaler Strecke	31
5,3 Mittlerer Fehler eines Höhenunterschiedes aus Vertikal= winkelmessungen	31
5,4 Fehlergrenze	32
6 ELLIPSOIDISCHE HÖHENUNTERSCHIEDE AUS GEMESSENEN SCHRÄGSTRECKEN	34
6,1 Höhenformel	34
6,2 Vorschlag für eine kontrollierte Messungsanordnung im Gelände	35
6,3 Mittlerer Fehler eines aus Schrägstrecken abgeleiteten Höhenunterschiedes	38
6,4 Beispiele	48
7 PUNKTBESTIMMUNG AUS DREI GEMESSENEN SCHRÄGSTRECKEN	52

	Seite
8 REFRAKTION	55
8,1 Allgemeines	55
8,2 Die örtliche Refraktion nach MALY	60
8,3 Geometrische Zusammenhänge	61
8,4 Physikalische Bestimmungsmethoden	64
8,5 Direkte Ermittlung der Refraktionswinkel	64
9 LOTABWEICHUNGEN	66
9,1 Allgemeines	66
9,2 Gegenseitige Lage zwischen Geoid und Ellipsoid in Österreich	67
9,3 Bestimmung der Lotabweichungen	68
9,4 Die Lotkrümmung	69
10 GEOIDISCHE HÖHENUNTERSCHIEDE	71
10,1 Allgemeines	71
10,2 Vertikalwinkelmessungen, gemessene Schrägstrecken	71
10,3 Vertikalwinkelmessungen, horizontale Strecken aus Koordinaten	72
10,4 Vertikalwinkelmessungen, Schrägstrecken aus Koordinaten	72
10,5 Zusammenhang zwischen Gleichung (5.1) und Gleichung (10.1)	73
10,6 Die Differenz $N_k - N_i$	74
10,7 Genäherte geoidische Höhenunterschiede aus gegenseitigen Vertikalwinkelmessungen	75
10,71 Verwendung von Schrägstrecken	75
10,72 Verwendung von horizontalen Strecken	78
10,73 Folgerungen	79
11 GEOMETRISCHES NIVELLEMENT ALS SONDERFALL DES TRIGONOMETRISCHEN NIVELLEMENTS	81
12 ERMITTLUNG VON REFRAKTION UND LOTABWEICHUNG AUS GEGENSEITIGEN VERTIKALWINKELMESSUNGEN	83
12,1 Allgemeines	83
12,2 Einfache Berechnung durch Mittelbildung	84
12,3 Fehlergleichungen	85
12,4 Gewichte	85
13 ERMITTLUNG VON REFRAKTION UND LOTABWEICHUNG AUS GEGENSEITIGEN VORLÄUFIGEN HÖHENUNTERSCHIEDEN	88
13,1 Allgemeines	88
13,2 Fehlergleichungen	88
13,21 Fall mit horizontalen Strecken	88
13,22 Fall mit gemessenen Schrägstrecken	89
13,3 Gewichte	89

	Seite	
14	BERECHNUNG DER HÖHEN, WENN REFRAKTION UND LOTABWEICHUNG GEGEBEN SIND	90
14,1	Allgemeines	90
14,2	Endgültige ellipsoidische Höhenunterschiede	90
14,3	Genäherte geoidische Höhenunterschiede	91
14,4	Berechnung und Überprüfung der Einzelhöhen	92
14,5	Fehlergleichungen	93
14,6	Gewichte	93
15	AUSGLEICHUNG DER ELLIPSOIDISCHEN HÖHEN UNTER GLEICHZEITIGER BERECHNUNG VON REFRAKTION UND LOTABWEICHUNG	95
15,1	Allgemeines	95
15,2	Fehlergleichungen	96
15,21	Vertikalwinkel; horizontale Strecken	96
15,22	Vertikalwinkel; gemessene Schrägstrecken	96
15,23	Höhenunterschiede aus Vertikalwinkeln; horizontale Strecken	97
15,24	Höhenunterschiede aus Vertikalwinkeln; gemessene Schrägstrecken	98
15,25	Höhenunterschiede aus gemessenen Schrägstrecken	100
15,3	Gewichte	100
16	GEMEINSAME AUSGLEICHUNG VON RICHTUNGS-, STRECKEN- UND VERTIKALWINKELMESSUNGEN	101
16,1	Allgemeines	101
16,2	Fehlergleichungen	102
16,21	Fehlergleichungen für Richtungen	102
16,22	Fehlergleichungen für gemessene Schrägstrecken	102
16,23	Fehlergleichungen für Vertikalwinkel; gemessene Schrägstrecken	103
16,24	Fehlergleichungen für Vertikalwinkel; horizontale Strecken	103
16,25	Höhenunterschiede aus gemessenen Schrägstrecken	104
16,3	Gewichte	104
17	HÖHENBERECHNUNGEN IM SYSTEM DER GEBRAUCHSHÖHEN	105
18	BEISPIEL RAURIS	108
18,1	Allgemeines	108
18,2	Streckenreduktion	112
18,3	Netzausgleichungen	117
18,4	Höhenberechnungen	120
18,5	Berechnungen nach Annahme der restlichen Lotabweichungen	126
19	ZUSAMMENFASSUNG	131
	LITERATURHINWEISE	134
	NACHWORT	138

1 PROBLEMSTELLUNG

In der Triangulierungsabteilung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen in Wien erfolgte bisher die Berechnung der Höhenunterschiede aus den gemessenen Zenitdistanzen bzw. Höhenwinkeln im wesentlichen immer noch nach den von ROHRER im Jahre 1929 in [64] festgehaltenen Grundsätzen und Formeln. Im allgemeinen wurde dabei einheitlich der HARTL'sche Wert für den Refraktionskoeffizienten verwendet:

$$k = 0,1470 - 0,000\ 008 \cdot H_{(\text{in m})} \quad \dots (1.1)$$

Die Berechnung der Meereshöhen wurde mit der Tischrechenmaschine bzw. in letzter Zeit mit einem elektronischen Taschenrechner nach einem mehrstufigen Iterationsverfahren durchgeführt. Ein praktisch befriedigendes Rechenprogramm für die elektronische Auswertung der trigonometrischen Höhenmessung stand nicht zur Verfügung.

Im Laufe der Jahre hat sich nun ein gewisses Unbehagen über diese Art der Auswertung eingestellt. Einerseits mußte man erkennen, daß es nicht in allen Fällen richtig ist, mit dem durch Gleichung (1.1) einheitlich definierten Refraktionskoeffizienten zu rechnen. Andererseits mußte man erkennen, daß vor allem im Bergland bei der Horizontierung der elektronisch gemessenen Schrägstrecken vielfach systematische Fehler auftraten, die in der horizontalen Strecke, berechnet aus der Vertikalwinkelmessung der Hin- und der Rückvisur, Differenzen bis in den Bereich von einigen Zentimetern verursachten. Man mußte daher die Frage stellen, ob man in diesen Fällen das Mittel aus den beiden Berechnungen noch als einigermaßen gerechtfertigt ansehen kann oder ob systematische Einflüsse einen der beiden Werte stärker verfälscht haben als den anderen Wert. Die fallweise auftretenden relativ großen Abschlußfehler bei langseitigen Polygonzügen im Bergland deuten nun darauf hin, daß eine solche Mittelung in vielen Fällen nicht mehr gerechtfertigt war. Hatte man außerdem noch bereits gegebene Meereshöhen zur Verfügung und führte man die Horizontierung der elektronisch gemessenen Schrägstrecke mit dem aus den gegebenen Meereshöhen abgeleiteten Höhenunterschied durch, erhielt man dann unter Umständen einen dritten Wert für die horizontale Strecke, der aber nicht in die Nähe des Mittelwertes aus Hin- und Rückmessung kam.

Diese Erscheinungen waren nun Ausdruck der Tatsache, daß einerseits mit einem einheitlichen Refraktionskoeffizienten gerechnet wurde und daß andererseits der Einfluß der Lotabweichung weder bei der Berechnung der Höhenunterschiede noch bei der Horizontierung der elektronisch gemessenen Schrägstrecken Berücksichtigung fand oder genauer ausgedrückt, daß es unterlassen wurde, für die Horizontierung der Schrägstrecken ellipsoidische Höhenunterschiede zu verwenden.

In dieser Arbeit sollen nun vor allem die für einen Massenbetrieb praktisch anwendbaren Formeln und Berechnungsmethoden zusammengestellt werden, die mit einem noch vertretbaren Mehraufwand die möglichst weit gehende Berücksichtigung der bisher vernachlässigten Größen ermöglichen und die außerdem auch die Grundlage für die Schaffung eines entsprechenden Programmes für die elektronische Auswertung der trigonometrischen Höhenmessung und der Reduktion der elektronisch gemessenen Schrägstrecken bilden sollen.

Im Verlaufe der hier angestellten Überlegungen ergab sich, daß die zweckmäßigste Lösung der zu behandelnden Probleme dann gegeben wäre, wenn zwei getrennte Höhensysteme aufgebaut würden, die jedoch miteinander in Verbindung stehen müßten, ein geoidisches Höhensystem für all jene Zwecke, für die die Meereshöhen von Bedeutung wären, und außerdem ein ellipsoidisches Höhensystem für alle Berechnungen, bei denen gemessene Strecken für die Lageberechnung nutzbar gemacht werden sollen.

2 VORBEREITENDE BERECHNUNGEN

2,1 Allgemeines

Auf den einzelnen Festpunkten befinden sich vielfach mehrere Stand- und Zielpunkte, die untereinander durch eine sog. örtliche Einmessung verbunden sein müssen. Diese örtlichen Einmessungen sind noch vor der Auswertung der Vertikalwinkelmessungen lage- und höhenmäßig zu berechnen. Für die Visurendpunkte werden entweder gute vorläufige Koordinaten oder endgültige Koordinaten benötigt.

Die Vertikalwinkelmessungen können als Zenitdistanzen oder als Höhenwinkel gegeben sein. Zwischen Zenitdistanzen und Höhenwinkeln besteht die folgende Beziehung:

$$z_{i,k} = \frac{\pi}{2} - \beta_{i,k} \quad \dots (2.01)$$

$z_{i,k}$  ..... gemessene Zenitdistanz vom Punkt  $P_i$  nach dem Punkt  $P_k$

$\beta_{i,k}$  ..... gemessener Höhenwinkel vom Punkt  $P_i$  nach dem Punkt  $P_k$

Für die Auswertung der Vertikalwinkelmessungen sind außerdem noch verschiedene Größen notwendig, deren Ermittlung in den nachfolgenden Unterabschnitten zusammengestellt ist.

2,2 Krümmungsradien

Die Abbildung 2.1 zeigt ein theoretisch nicht streng richtiges, aber praktisch ähnliches Bild der Verhältnisse bei der trigonometrischen Höhenmessung. Es können hierauf mit hinreichender Genauigkeit die Formeln der ebenen Trigonometrie angewendet werden, vor allem wegen der geringen Punktentfernungen, die dabei im allgemeinen auftreten. Bei der Auswertung der Vertikalwinkelmessungen im Rahmen der Triangulierungsarbeiten des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen ist eine maximale Punktentfernung von 5 bis 6 km zu erwarten. Nur in Ausnahmefällen wird es im Zusammenhang mit der elektronischen Streckenmessung Punktentfernungen bis etwa 10 km geben.

LEDERSTEGGER hat in [42] nachgewiesen, daß in diesem Entfernungsbereich die Differenz der Abstände  $R_{k(E)} - R_{i(E)}$  praktisch gleich Null gesetzt werden kann :

$$R_{k(E)} - R_{i(E)} \approx 0 \quad \dots (2.02)$$

$R_{i(E)}$  ..... Abstand des Schnittpunktes  $M_{(E)}$  der in eine parallel zu ihnen liegende Mittelebene projizierten Ellipsoidnormalen durch die Punkte  $P_i$  und  $P_k$  vom Referenzellipsoid in Richtung der Ellipsoidnormalen durch den Punkt  $P_i$ .

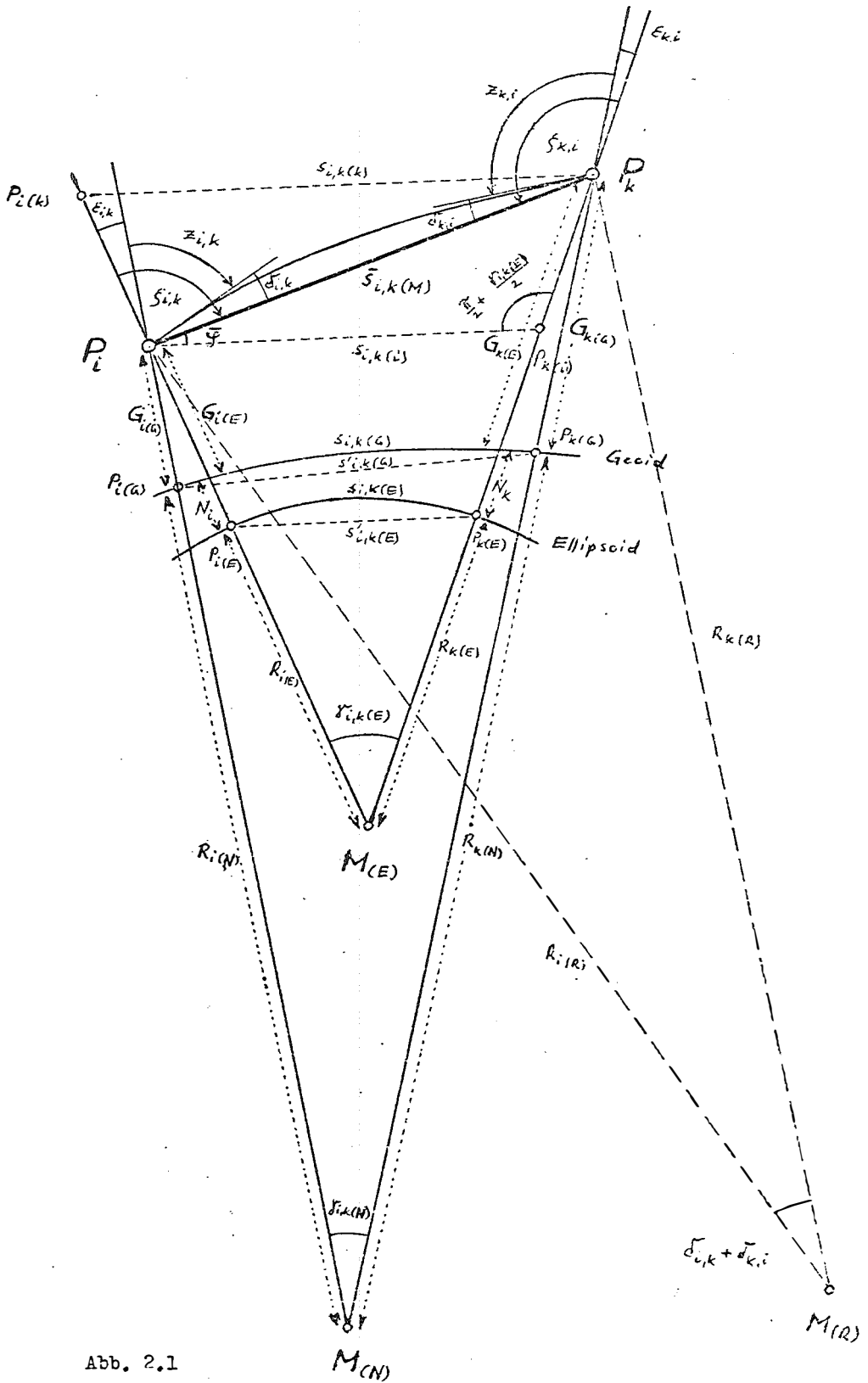


Abb. 2.1

Gleichung (2.02) bedeutet aber, daß die Abstände  $R_{i(E)}$  den Krümmungsradien  $R_{\alpha_{i,k}}$  der Normalschnitte mit dem Azimut  $\alpha_{i,k}$  praktisch gleich sind:

$$R_{i(E)} \doteq R_{\alpha_{i,k}} \quad \dots (2.03)$$

Die Krümmungsradien  $R_{\alpha_{i,k}}$  erhält man nach dem Satz von EULER aus

$$\frac{1}{R_{\alpha_{i,k}}} = \frac{\cos^2 \alpha_{i,k}}{M_i} + \frac{\sin^2 \alpha_{i,k}}{N_i} \quad \dots (2.04)$$

$M_i$  ..... Meridiankrümmungsradius im Punkt  $P_i$

$N_i$  ..... Querkrümmungsradius im Punkt  $P_i$

BRUNNER hat in seiner Dissertation [9] dafür eine leicht auswertbare Näherungsformel abgeleitet. Für eine elektronische Berechnung könnte mit für die Auswertung der Vertikalwinkelmessungen hinreichender Genauigkeit die nachfolgende auf das BESSEL-Ellipsoid bezogene und für den Bereich von Österreich gültige Näherungsformel angewendet werden:

$$R_{\alpha_{i,k}} = \frac{6\,334\,832}{\sqrt{1 - 0,0066744 \cdot \sin^2 \varphi_i} \cdot [(1 - 0,0066744 \cdot \sin^2 \varphi_i) \cdot \cos^2 \alpha_{i,k} + 0,9933256 \cdot \sin^2 \alpha_{i,k}]} \quad \dots (2.05)$$

Die geographische Breite  $\varphi_i$  könnte man für die einzelnen Punkte der Österreichischen Karte 1 : 50 000 entnehmen, sie kann aber bei elektronischer Berechnung auch mit folgender Näherungsformel aus den Koordinaten der Punkte  $P_i$  abgeleitet werden:

Fußpunktsbreite  $\varphi_{F_i}$  :

$$\varphi_{F_i} = \frac{x_i(m)}{6\,366\,743} + 0,002\,5113 \cdot \sin\left[2 \cdot \left(\frac{x_i(m)}{6\,366\,743} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\right)\right] \quad \dots (2.06)$$

$$\varphi_i = \varphi_{F_i} - 0,002\,78 \cdot y_i^2(km) \quad \dots (2.07)$$

Die Fußpunktsbreite  $\varphi_{F_i}$  erhält man durch die Gleichung (2.06) im Bogenmaß. Das zweite Glied von Gleichung (2.07) ergibt sich in Arksekunden, wenn  $y_i$  in km-Einheiten eingeführt wird. Die geogr. Breite  $\varphi_i$  hat bei Verwendung der Gleichungen (2.06) und (2.07) einen Fehler von höchstens  $\pm 3''$ . Zu beachten ist hierbei, daß bei  $x_i$  der volle Wert (also mit den 5 000 000 m) zu verwenden ist.

Das für die Gleichung (2.04) oder (2.05) benötigte Azimut  $\alpha_{i,k}$  erhält man aus dem Richtungswinkel  $v_{i,k}$  (aus Koordinaten) durch algebraische Addition der Meridiankonvergenz  $\gamma_i(M)$  :



$$\alpha_{i,k} = v_{i,k} + \gamma_{i(M)} \quad \dots (2.08)$$

Die Meridiankonvergenz  $\gamma_{i(M)}$  kann, abhängig von den Koordinaten des Punktes  $P_i$ , nach der Näherungsformel aus [12 a], Abschnitt 7, Absatz (2), errechnet werden:

$$\gamma_{i(M)}^{cc} = \frac{1}{30} \cdot y_{i(km)} \cdot (x_{i(km)} - 2000) + \Delta\gamma \quad \dots (2.09)$$

Das Korrekturglied  $\Delta\gamma$  kann der Kurventafel von Abb. 12 der angeführten Dienstvorschrift [12 a] entnommen werden. Die Meridiankonvergenz erhält das Vorzeichen der Ordinate  $y_i$ .

Für das Auswerten der Gleichung (2.05) genügt das Azimut  $\alpha_{i,k}$  mit Minutengenauigkeit in dem hier auftretenden Entfernungsbereich. Es erübrigt sich daher bei der Ermittlung der Meridiankonvergenz die Entnahme des Korrekturgliedes  $\Delta\gamma$ .

Bisher wurde in der Triangulierungsabteilung für die Höhenberechnung und auch für die Horizontierung elektronisch gemessener Schrägstrecken der Radius R der Gauß'schen Krümmungskugel für die mittlere Breite von  $\varphi = 47^{\circ}45'$  verwendet:

$$R = \sqrt{M \cdot N} = 6\,379\,409 \text{ m} \quad \dots (2.10)$$

Bei einer elektronischen Auswertung der Vertikalwinkelmessungen fällt die rechnerische Mehrbelastung kaum ins Gewicht, die dadurch entsteht, daß nicht wie bisher der Radius der Gauß'schen Krümmungskugel, Gleichung (2.10), verwendet wird, sondern z. B. der durch Gleichung (2.05) definierte Näherungswert für den Krümmungsradius eines Normalschnittes. Der dadurch erzielbare Genauigkeitserfolg ist allerdings relativ gering.

In der nachstehenden Tabelle 1 sind für vier verschiedene Zenitdistanzen die maximal möglichen Fehler im Höhenunterschied und in einer horizontierten Strecke zusammengestellt, die dann entstehen können, wenn man statt des durch Gleichung (2.05) gegebenen Krümmungsradius des der Visur entsprechenden Normalschnittes den durch Gleichung (2.10) ausgewiesenen Radius der Gauß'schen Bildkugel für die angegebene Mittelbreite verwendet.

s in km	Höhenfehler in mm für z =				Streckenfehler in mm für z =			
	80 <sup>g</sup>	70 <sup>g</sup>	60 <sup>g</sup>	50 <sup>g</sup>	80 <sup>g</sup>	70 <sup>g</sup>	60 <sup>g</sup>	50 <sup>g</sup>
1,0	0,1	0,2	0,2	0,3	0,0	0,0	0,1	0,1
2,0	0,5	0,6	0,8	1,0	0,2	0,3	0,4	0,4
3,0	1,2	1,5	1,8	2,7	0,4	0,6	0,8	0,9
4,0	2,1	2,8	3,6	4,4	0,7	1,0	1,3	1,6
5,0	3,3	4,5	5,0	.	1,1	1,6	2,1	.
6,0	4,8	6,0	7,8	.	1,6	2,3	3,0	.
7,0	6,5	8,4	.	.	2,1	3,1	.	.
8,0	8,5	11,2	.	.	2,8	4,1	.	.
9,0	10,8	.	.	.	3,5	.	.	.
10,0	13,3	.	.	.	4,3	.	.	.

Tabelle 1.

Wie im Unterabschnitt 2,4 gezeigt wird, ist für den Krümmungsradius  $R_{\alpha_{i,k}}$  eine Genauigkeit von rund hundert Meter mehr als ausreichend. Diese Genauigkeit ist durch die Gleichung (2.05) gesichert.

BODEMÜLLER und EMBACHER haben Versuche unternommen, aus gemessenen Vertikalgradienten der Schwere mittlere Krümmungsradien für die Niveauflächen durch die Beobachtungsstationen abzuleiten ([3] und [19]). Sie haben dabei in den so erhaltenen mittleren Krümmungsradien Differenzen festgestellt, die bis zu der Größenordnung von 4000 km und mehr gingen. Für die Berechnung von ellipsoidischen Höhenunterschieden sind diese Krümmungsradien selbstverständlich nicht verwendbar. Allerdings können die so ermittelten Radien der mittleren Krümmungskugeln der Niveauflächen durch die Beobachtungsstandpunkte auch nicht direkt für die Berechnung der geoidischen Höhenunterschiede verwendet werden.

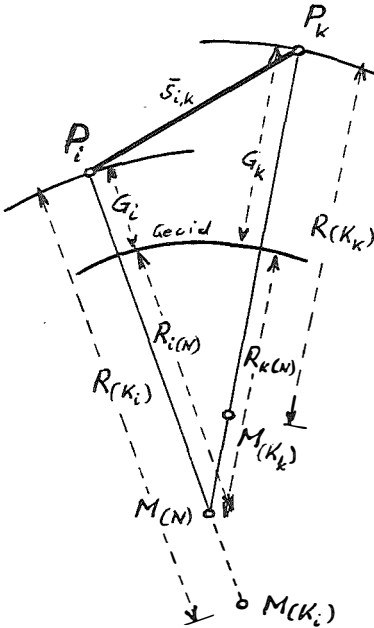


Abb. 2.2

In Abbildung 2.2 ist nun  $M_{(N)}$  der Schnittpunkt der in eine zu ihnen parallele Mittelebene projizierten Tangenten an die Lotlinien durch die Geländepunkte  $P_i$  und  $P_k$ . Die Radien  $R_{(K_i)}$  und  $R_{(K_k)}$  der mittleren Krümmungskugeln der Niveauflächen durch die Geländepunkte  $P_i$  und  $P_k$  können nach BODEMÜLLER und EMBACHER bei benachbarten Punkten Unterschiede bis zu der Größenordnung von  $10^3$  km aufweisen, sie sind aber im allgemeinen nicht identisch mit den Abständen  $R_{i(N)}$  und  $R_{k(N)}$  des Tangentenschnittpunktes  $M_{(N)}$  vom Geoid in Richtung der Tangenten an die Lotlinien. Es ist also allgemein

$$G_i + R_{i(N)} \neq R_{(K_i)} \quad \dots (2.11)$$

$$G_k + R_{k(N)} \neq R_{(K_k)}$$

$G_i$  ..... auf das Geoid bezogene Höhe des Punktes  $P_i$

Während die Abstände  $R_{i(N)}$  von der gegenseitigen Lage der Tangentialebenen an die Niveauflächen durch die Punkte  $P_i$  und  $P_k$  abhängig sind, sind die Krümmungsradien  $R_{(K_i)}$  von der Massenverteilung und der Dichte unterhalb der Geländepunkte beeinflusst. Für eine bestimmte Lage der Tangentialebene an die Niveaufläche in  $P_i$  gibt es aber unendlich viele Möglichkeiten der Massenverteilungen. Es besteht daher zwischen  $R_{i(N)}$  und  $R_{(K_i)}$  kein eindeutiger Zusammenhang.

Die in [3] und [19] ermittelten Krümmungsradien haben eine Ungenauigkeit von mehr als 10 km. Es wäre also die so erreichbare Genauigkeit viel zu gering, um diese Krümmungsradien für die Berechnung geoidischer Höhen-

unterschiede heranziehen zu können, abgesehen davon, daß kein direkter Zusammenhang mit den Abständen  $R_{i(N)}$  gegeben ist.

Während BODEMÜLLER und EMBACHER in den  $R_{(K_i)}$  bei benachbarten Punkten Unterschiede in der Größenordnung bis mehr als  $10^3$  km feststellten, besteht zwischen den Abständen  $R_{i(N)}$  und  $R_{k(N)}$  nur eine Differenz, die eine Größenordnung von maximal einigen Metern erreichen kann. Der Höhenunterschied zwischen den beiden benachbarten Punkten wäre auch noch zu berücksichtigen. In Österreich ist er auf jeden Fall kleiner als 4000 m und liegt daher noch unter der Genauigkeitsgrenze, mit der in [3] und [19] die Krümmungsradien  $R_{(K_i)}$  ermittelt worden sind.

Diese Überlegungen zeigen, daß im allgemeinen die Ungleichungen (2.11) berechtigt sind.

LEDERSTEGGER hat in [42] gezeigt, daß man in dem hier auftretenden Entfernungsbereich wohl auf die ellipsoidischen Krümmungsradien die durch die Gleichung (2.02) ausgedrückte HELMERT'sche Kreisbogenbedingung anwenden kann, aber nicht im allgemeinen auch auf das Geoid, so daß für den allgemeinen Fall gilt:

$$R_{i(N)} \neq R_{k(N)} \quad \dots (2.12)$$

Zufolge der Lotkrümmung wird das Lot durch die Geländepunkte  $P_i$  und  $P_k$  das Geoid im allgemeinen an einer anderen Stelle treffen als die Tangenten an die Lotlinien in den Geländepunkten. Bezeichnet man diese Durchstoßpunkte der Lotlinien auf dem Geoid mit  $P'_i$  und  $P'_k$  und legt man in diesen Durchstoßpunkten wiederum Tangenten an die Lotlinien, erhält man für die Projektion dieser Tangenten in die zu ihnen parallele Mittelebene einen Tangentenschnittpunkt  $M_{(G)}$ , der im allgemeinen mit dem in Abb. 2.2 eingezeichneten Tangentenschnittpunkt  $M_{(N)}$  nicht identisch sein wird. Es werden sich somit auch von den Abständen  $R_{i(N)}$  und  $R_{k(N)}$  abweichende Abstände des Tangentenschnittpunktes  $M_{(G)}$  vom Geoid,  $R_{i(G)}$  und  $R_{k(G)}$ , ergeben, für die aber gleichfalls die Ungleichungen (2.11) und (2.12) Geltung haben.

2,3

Punktentfernungen

Die Punktentfernungen  $s_{i,k}$  sind je nach dem Status ihrer Reduktion und abhängig von ihrer Herleitung (aus Koordinaten berechnet oder von einer gemessenen Schrägstrecke abgeleitet) verschieden definiert.

Strecke aus Koordinaten:

$$s_{i,k(K)} = \sqrt{(y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2} \quad \dots\dots (2.13)$$

Strecke auf dem Ellipsoid (Bogen):

$$s_{i,k(E)} = s_{i,k(K)} \cdot \left( 1 - \frac{y_M^2}{2 \cdot R^2} \right) \quad \dots\dots (2.14)$$

Strecke auf dem Ellipsoid (Sehne):

$$s'_{i,k(E)} = s_{i,k(E_M)} \cdot \left( 1 - \frac{E_M}{R} \right) \quad \dots\dots (2.15)$$

$E_i$  ..... auf das Ellipsoid bezogene Höhe des Punktes  $P_i$

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot (E_i + E_k) \quad \dots\dots (2.16)$$

$$y_M = \frac{1}{2} \cdot (y_i + y_k) \quad \dots\dots (2.17)$$

Die in Gleichung (2.15) enthaltene Horizontalstrecke  $s_{i,k(E_M)}$  hat man sich als von der gemessenen Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k(M)}$  abgeleitet zu denken. Man kann aber andererseits auch von der aus Koordinaten abgeleiteten Punktentfernung  $s_{i,k(K)}$  eine Horizontalstrecke  $s_{i,k(E_M)}$  im mittleren Niveau der beiden Streckenendpunkte berechnen:

$$s_{i,k(E_M)} = s_{i,k(K)} \cdot \left( 1 - \frac{y_M^2}{2 \cdot R^2} + \frac{E_M}{R} \right) \quad \dots\dots (2.18)$$

Da bei der Auswertung der Vertikalwinkelmessungen hier nur relativ geringe Punktentfernungen auftreten, kann der Bogen  $s_{i,k(E)}$  praktisch der Sehne  $s'_{i,k(E)}$  gesetzt werden. Bei einer Entfernung von 10 km macht die Differenz  $\Delta s_{i,k}$  zwischen Bogen und Sehne erst 1,0 mm aus.

$$\begin{aligned} \Delta s_{i,k} &= s_{i,k(E)} - s'_{i,k(E)} = R_i(E) \cdot (\gamma_{i,k(E)} - 2 \cdot \sin \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}) \doteq \\ &\doteq R_i(E) \cdot \frac{\gamma_{i,k(E)}^3}{24} = \frac{s_{i,k(E)}^3}{24 \cdot R_i^2(E)} \quad \dots\dots (2.19) \end{aligned}$$

$$s_{i,k(E)} \doteq s'_{i,k(E)} \quad \dots\dots (2.20)$$

Damit für  $s_{i,k(E)}$  bei den durchzuführenden Reduktionen der Millimeter gewahrt bleibt, muß der bei der Reduktion auftretende Fehler kleiner als 0,5 mm bleiben. In der nachfolgenden Tabelle 2 ist für verschiedene Seiten=

längen zusammengestellt, wie groß der maximal zulässige Höhenfehler  $dE$  sein darf, um die gewünschte Genauigkeit einhalten zu können.

Bei den aus Koordinaten abgeleiteten Punktentfernungen ist die Genauigkeit von  $s_{i,k(K)}$  eine Funktion der Genauigkeit der Koordinaten. Hier soll der bei der Reduktion maximal zulässige Koordinatenfehler  $dy$  angeben, mit welcher Genauigkeit die mittleren Ordinaten in die Reduktion einzuführen sind. Je näher man dem Mittelmeridian eines Meridianstreifensystems kommt, um so weniger genau braucht das  $y_M$  eingeführt werden, wie die in der Tabelle 2 enthaltenen Spalten für die  $y_M$ -Werte von 130 km, 100 km und 50 km zeigen.

s (km)	dE (m)	dy in m für $y_M =$		
		130 km	100 km	50 km
1,0	3,19	156,54	203,50	407,01
2,0	1,60	78,27	101,75	203,50
3,0	1,06	52,16	67,81	135,63
4,0	0,80	39,11	50,84	101,68
5,0	0,64	31,31	40,70	81,40
6,0	0,53	26,11	33,94	67,88
7,0	0,46	22,38	29,09	58,18
8,0	0,40	19,58	25,45	50,91
9,0	0,35	17,37	22,58	45,17
10,0	0,32	15,65	20,35	40,70

Tabelle 2.

Soll eine gemessene Schrägstrecke in die Rechenfläche reduziert werden, zeigt die Spalte für das zulässige  $dE$ , daß es vor allem bei etwas längeren Strecken notwendig sein kann, auch die Instrument- und Zielhöhen der Streckenmessung bei der Berechnung der mittleren Höhe  $E_M$  zu berücksichtigen, um die gewünschte Genauigkeit einhalten zu können.

Wesentlich für eine richtige Reduktion der gemessenen Strecken in die Rechenfläche wäre außerdem die Kenntnis der ellipsoidischen Höhen  $E_i$ . In der Praxis wird allerdings im allgemeinen diese Reduktion nicht in die Rechenfläche, sondern auf Meeresniveau vorgenommen, da in Österreich kein ellipsoidisches Höhensystem besteht und von den Streckenendpunkten nur die Gebrauchshöhen  $H_i$  vorliegen, die als genäherte geoidische Höhen angesprochen werden können.

Es wird also im allgemeinen in der Praxis für die Streckenreduktion nicht die mittlere ellipsoidische Höhe  $E_M$  nach Gleichung (2.16), sondern die falsche mittlere Gebrauchshöhe  $H_M$  verwendet:

$$H_M = \frac{1}{2} \cdot (H_i + H_k) \neq \frac{1}{2} \cdot (G_i + G_k) = \frac{1}{2} \cdot (E_i - N_i + E_k - N_k) \quad \dots\dots (2.21)$$

Die vorgenommene Streckenreduktion ist somit um den im allgemeinen nicht bekannten Betrag  $\delta s_{i,k}$  falsch:

$$\delta s_{i,k} = s_{i,k(E_M)} \cdot \frac{N_M}{R} \quad \dots\dots (2.22)$$

$$N_M = \frac{1}{2} \cdot (N_i + N_k) \quad \dots\dots (2.23)$$

$H_i$  ..... Gebrauchshöhe des Punktes  $P_i$ , auch Meereshöhe genannt

$N_i$  ..... Abstand des Geoids vom Ellipsoid im Punkt  $P_i$  in Richtung der Ellipsoidnormalen.

Sind also die Abstände  $N_i$  des Geoids vom Ellipsoid positiv, dann werden die auf diese Weise falsch reduzierten Strecken zu groß sein. In der Lageberechnung wirkt sich diese fehlerhafte Reduktion der gemessenen Strecken in die Rechenfläche in Form eines Maßstabsfehlers aus. Das numerische Ausmaß dieses Reduktionsfehlers zeigt das Nomogramm von Abb. 2.3 in Abhängigkeit von den Mittelwerten  $N_M$  der nicht berücksichtigten Erhebung des Geoids über dem Ellipsoid. Es kann daher nur dann eine richtige Reduktion der gemessenen Strecken in die Rechenfläche erfolgen, wenn ein ellipsoidisches Höhensystem vorliegt.

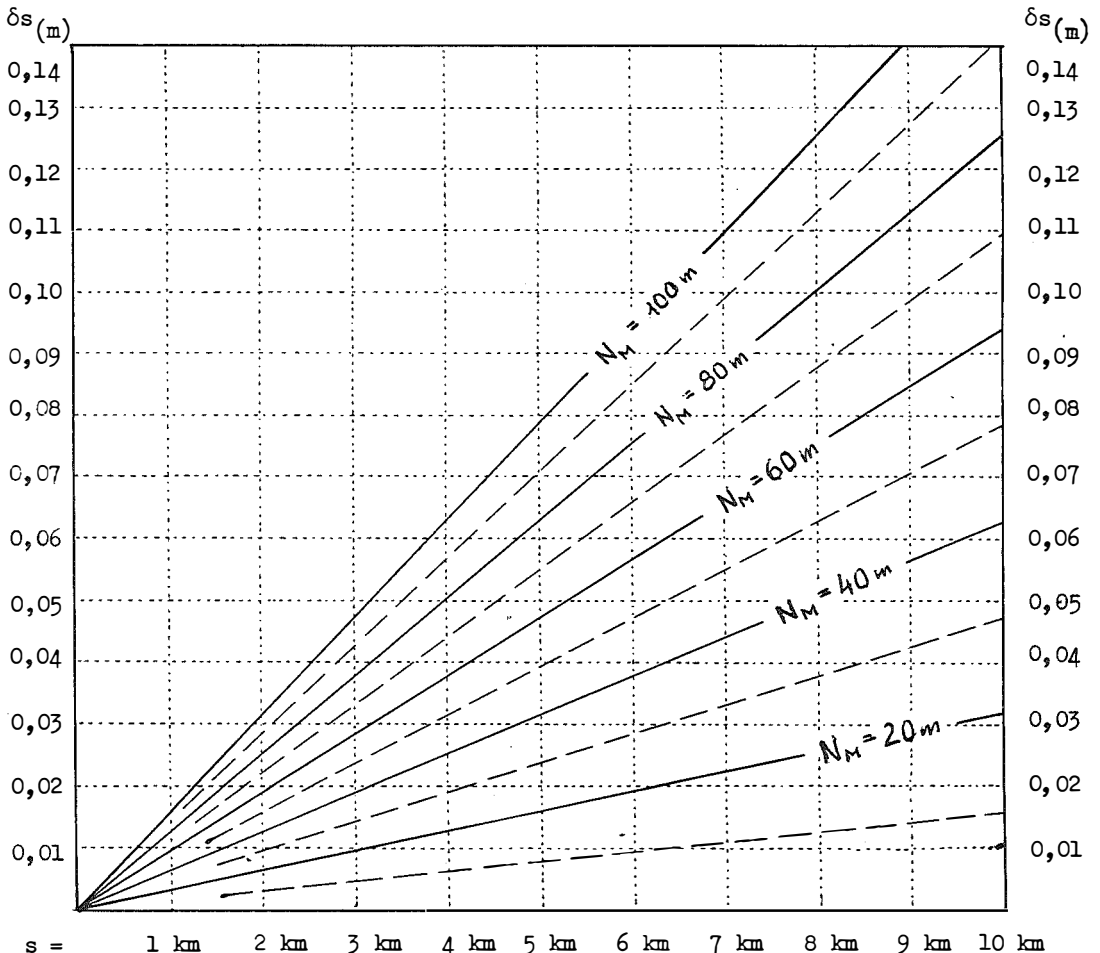


Abb. 2.3

Diese Inkorrektheit bei der Reduktion ist natürlich auch beim umgekehrten Fall vorhanden, wenn eine aus Koordinaten berechnete Strecke  $s_{i,k(K)}$  nach Gleichung (2.18) in das mittlere Niveau  $E_M$  der Streckenendpunkte reduziert werden soll, z. B. für die Berechnung von Höhenunterschieden. Auch hier wird praktisch im allgemeinen statt der richtigen Gleichung (2.16) die falsche Gleichung (2.21) verwendet. Allerdings sind die Auswirkungen dieser fehlerhaften Streckenreduktion bei der Berechnung der Höhenunterschiede meist etwas geringer, ausgenommen die Steilvisuren.

In einzelnen Fällen wäre es zweckmäßig, die Schrägentfernung zwischen den Geländepunkten zu kennen. Ist nun die Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k}$  nicht als elektronisch gemessene Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k(M)}$  gegeben, muß sie aus den Koordinaten der Streckenendpunkte abgeleitet werden. Hier kann nun die Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k(K_0)}$  zwischen den Punktstabilisierungen gewünscht werden oder die Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k(K_{I,Z})}$ , die unter Berücksichtigung der Instrument- und Zielhöhen dem gemessenen Vertikalwinkel zugeordnet ist. Die nachstehend angeführten Formeln für die Berechnung dieser Schrägstrecken stellen eine für den hier auftretenden Entfernungsbereich zulässige Näherung dar.

Schrägstrecke aus Koordinaten zwischen den Punktstabilisierungen:

$$\bar{s}_{i,k(K_0)} \approx \sqrt{s_{i,k(K)}^2 \cdot \left(1 - \frac{y_M^2}{2 \cdot R^2} + \frac{E_M}{R}\right)^2 + (E_k - E_i)^2} \quad \dots (2.24)$$

Schrägstrecke aus Koordinaten mit Berücksichtigung der Instrument- und Zielhöhen:

$$\bar{s}_{i,k(K_{I,Z})} \approx \sqrt{s_{i,k(K)}^2 \cdot \left(1 - \frac{y_M^2}{2 \cdot R^2} + \frac{E_M}{R}\right)^2 + (E_k + Z_k - E_i - I_i)^2} \quad \dots (2.25)$$

#### 2,4 Winkel $\gamma_{i,k}$

Die Winkel  $\gamma_{i,k}$  sind wegen der bei der Auswertung der Vertikalwinkelmessungen normalerweise relativ geringen Punktentfernungen sehr klein.

$\gamma_{i,k(E)}$  ..... Schnittwinkel der in die Mittelebene projizierten Ellipsoidnormalen durch die Geländepunkte  $P_i$  und  $P_k$ .

$\gamma_{i,k(N)}$  ..... Schnittwinkel der in die Mittelebene projizierten Tangenten an die Lotlinien in den Geländepunkten  $P_i$  und  $P_k$ .

Bildet man die Winkelsumme im Dreieck  $P_i - P_k - M(E)$  von Abb. 2.1, erhält man:

$$\zeta_{i,k} + \zeta_{k,i} = \pi + \gamma_{i,k(E)} \quad \dots (2.26)$$

Die ellipsoidische Zenitdistanz  $\zeta_{i,k}$  kann ausgedrückt werden durch:

$$\zeta_{i,k} = z_{i,k} + \delta_{i,k} + \varepsilon_{i,k} \quad \dots (2.27)$$

Gleichung (2.27) wird in Gleichung (2.26) eingesetzt:

$$z_{i,k} + \delta_{i,k} + \varepsilon_{i,k} + z_{k,i} + \delta_{k,i} + \varepsilon_{k,i} = \tilde{\pi} + \gamma_{i,k(E)} \quad \dots (2.28)$$

$\delta_{i,k}$  ..... Refraktionswinkel zur Zenitdistanz von  $P_i$  nach  $P_k$

$\varepsilon_{i,k}$  ..... Lotabweichungsanteil für die Visur von  $P_i$  nach  $P_k$

Im Dreieck  $P_i-P_k-M(N)$  hat man die Winkelsumme:

$$z_{i,k} + \delta_{i,k} + z_{k,i} + \delta_{k,i} = \tilde{\pi} + \gamma_{i,k(N)} \quad \dots (2.29)$$

Setzt man Gleichung (2.29) in Gleichung (2.28) ein, erhält man:

$$\gamma_{i,k(N)} = \gamma_{i,k(E)} - (\varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{k,i}) \quad \dots (2.30)$$

Der auf das Ellipsoid bezogene Schnittwinkel  $\gamma_{i,k(E)}$  kann wegen der Kleinheit des Winkels mit hinreichender Genauigkeit so berechnet werden:

$$\tan \gamma_{i,k(E)} \cong \gamma_{i,k(E)} = \frac{s_{i,k(E)}}{R_i(E)} \quad \dots (2.31)$$

Analog könnte  $\gamma_{i,k(N)}$  genähert ermittelt werden aus:

$$\gamma_{i,k(N)} = \frac{s_{i,k(G)}}{R_i(N)} \quad \dots (2.32)$$

Im allgemeinen ist jedoch weder die Seitenlänge  $s_{i,k(G)}$  auf dem Geoid noch der Abstand  $R_i(N)$  bekannt, so daß  $\gamma_{i,k(N)}$  auf dem Umweg über Gleichung (2.30) berechnet werden muß.

Will man für  $\gamma_{i,k(E)}$  die ganze Sekunde gesichert haben, muß der Fehler

s (km)	zul. $f_R$ (km)
1,0	32,0
2,0	16,0
3,0	10,7
4,0	8,0
5,0	6,4
6,0	5,3
7,0	4,6
8,0	4,0
9,0	3,6
10,0	3,2

Tabelle 3

$\Delta\gamma_{i,k(E)}$  kleiner als  $0,5^{cc}$  bleiben. Um das erreichen zu können, genügt es, daß die Punktentfernung  $s_{i,k(E)}$  mit einer Genauigkeit von 5,0 m bekannt ist, eine Forderung, die leicht zu erreichen ist. Der Krümmungsradius  $R_i(E)$  muß, abhängig von der Seitenlänge, die in der nebenstehenden Tabelle 3 angeführte Genauigkeit  $f_R$  aufweisen. Für  $\gamma_{i,k(E)}$  die Zehntelsekunde gesichert zu haben, ist nicht notwendig, da im allgemeinen weder die gemessene Zenitdistanz  $z_{i,k}$ , noch der Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  und auch nicht der Lotabweichungsanteil  $\varepsilon_{i,k}$  diese Genauigkeit aufweisen. Reduziert man die gemessenen

Zenitdistanzen auf andere Bezugspunkte, ist gleichfalls nur eine Sekundengenauigkeit zu erreichen.

Wollte man trotzdem  $\gamma_{i,k(E)}$  auf  $0,1^{cc}$  genau haben, müßte  $\Delta\gamma_{i,k(E)}$  kleiner als  $0,05^{cc}$  bleiben. Dazu müßten die hier angegebenen Genauigkeitsforderungen um eine Zehnerpotenz erhöht werden.



2,5 Reduktion der Vertikalwinkelmessungen auf andere Bezugspunkte

2,51 Allgemeines

Für einzelne Berechnungsvorgänge bei der Auswertung von Vertikalwinkelmessungen ist es Voraussetzung, daß die Hin- und Rückvisur dieselben Höhenbezugspunkte haben. Wo dies nicht bereits durch die Messung gegeben ist, müssen gegebenenfalls die gemessenen Vertikalwinkel entsprechend reduziert werden.

2,52 Reduktion auf die Höhenbezugspunkte der elektronischen Streckenmessung

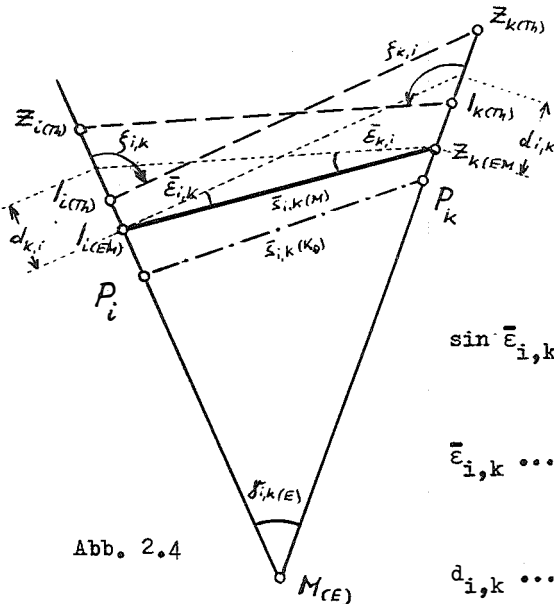


Abb. 2.4

Liegen elektronisch gemessene Schrägstrecken vor, sind im allgemeinen die zugeordneten Vertikalwinkelmessungen auf die Höhenbezugspunkte der Streckenmessung zu reduzieren.

Der Abbildung 2.4 ist die folgende Beziehung zu entnehmen:

$$\sin \bar{\epsilon}_{i,k} = \frac{d_{i,k}}{\bar{s}_{i,k(M)}} \cdot \sin (\zeta_{i,k} - \gamma_{i,k(E)}) \quad \dots (2.33)$$

- $\bar{\epsilon}_{i,k}$  ..... Reduktionswinkel bei Reduktion der gemessenen Vertikalwinkel auf andere Bezugspunkte
- $d_{i,k}$  ..... Instrument- und Zielhöhendifferenz

$$\begin{aligned} d_{i,k} &= [Z_{k(Th)} - Z_{k(EM)}] - [I_{i(Th)} - I_{i(EM)}] \cdot \frac{\sin \zeta_{i,k}}{\sin (\zeta_{i,k} - \gamma_{i,k(E)})} \cong \\ &\cong [Z_{k(Th)} - Z_{k(EM)}] - [I_{i(Th)} - I_{i(EM)}] \cdot \frac{\sin \zeta_{i,k}}{\sin \zeta_{i,k}} \cdot (1 - \gamma_{i,k(E)} \cdot \cot \zeta_{i,k})^{-1} \cong \\ &\cong [Z_{k(Th)} - Z_{k(EM)}] - [I_{i(Th)} - I_{i(EM)}] \cdot (1 + \gamma_{i,k(E)} \cdot \cot \zeta_{i,k}) \quad \dots (2.34) \end{aligned}$$

Der Faktor  $\gamma_{i,k(E)} \cdot \cot \zeta_{i,k}$  erreicht bei einer Seitenlänge von 10 km und einer Zenitdistanz von  $50^\circ$  einen Wert von 0,0016. Die Differenz der Instrumentenhöhen wird im allgemeinen im Dezimeterbereich bleiben, so daß das Glied mit diesem Faktor kaum den Betrag von 0,2 mm überschreiten wird. Man kann daher genähert setzen:

$$d_{i,k} \cong [Z_{k(Th)} - Z_{k(EM)}] - [I_{i(Th)} - I_{i(EM)}] \quad \dots (2.35)$$

- $I_i(\text{Th})$  ..... Instrumentenhöhe der Vertikalwinkelmessung im Punkt  $P_i$   
 $I_i(\text{EM})$  ..... Instrumentenhöhe der elektronischen Streckenmessung im Punkt  $P_i$   
 $Z_k(\text{Th})$  ..... Zielhöhe der Vertikalwinkelmessung im Punkt  $P_k$   
 $Z_k(\text{EM})$  ..... Zielhöhe der elektronischen Streckenmessung im Punkt  $P_k$

Die auf die Höhenbezugspunkte der elektronischen Streckenmessung reduzierte Zenitdistanz erhält man dann aus

$$\zeta_{i,k(\text{red.})} = \zeta_{i,k} + \bar{\epsilon}_{i,k} \quad \text{..... (2.36)}$$

Die Rückvisur wird in analoger Weise reduziert. Hierbei ist zu beachten, daß für die Rückvisur zu setzen ist:

$$Z_i(\text{EM}) = I_i(\text{EM}) \quad \text{und} \quad I_k(\text{EM}) = Z_k(\text{EM})$$

Bis zu einer Größe des Reduktionswinkels  $\bar{\epsilon}_{i,k}$  von  $50^\circ$  bleibt der Fehler kleiner als  $0,05^{\text{cc}}$ , bis zu einer Größe von etwa  $1^\circ$  kleiner als  $0,5^{\text{cc}}$ , wenn man in der Gleichung (2.33) den Sinus des Reduktionswinkels durch den Bogen ersetzt:

$$\bar{\epsilon}_{i,k}^{\text{cc}} = \rho^{\text{cc}} \cdot \frac{d_{i,k}}{\bar{s}_{i,k(\text{M})}} \cdot \sin(\zeta_{i,k} - \gamma_{i,k(\text{E})}) \quad \text{..... (2.37)}$$

Bei der praktischen Anwendung dieser Formeln hat man meistens noch nicht die ellipsoidische Zenitdistanz  $\zeta_{i,k}$  vorliegen, sondern nur die gemessene Zenitdistanz  $z_{i,k}$ . Aus der Tabelle 4 im Unterabschnitt 2,54 ist ersichtlich, daß in den obigen Formeln ohne wesentlichen Genauigkeitsverlust die ellipsoidische Zenitdistanz durch die gemessene Zenitdistanz ersetzt werden kann.

## 2,53 Reduktion auf die Punktstabilisierungen

Liegt keine gemessene Schrägstrecke vor, können die gemessenen Vertikalwinkel der Hin- und Rückvisur auf beliebige Höhenbezugspunkte reduziert werden. Es sind dann in der Instrument- und Zielhöhendifferenz  $d_{i,k}$ , Gleichung (2.35),  $I_i(\text{EM})$  und  $Z_k(\text{EM})$  durch die entsprechenden Werte zu ersetzen, nimmt man z. B. die Punktstabilisierungen als Bezugspunkte, sind sie gleich Null zu setzen.

In Gleichung (2.33) bzw. (2.37) ist in solch einem Fall außerdem die gemessene Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k(\text{M})}$  durch die zugehörige aus Koordinaten abgeleitete Schrägstrecke zu ersetzen. Bezieht man auf irgendwelche Höhenbezugspunkte, ist Gleichung (2.25) zu verwenden, bezieht man auf die Punktstabilisierungen, muß Gleichung (2.24) eingesetzt werden. Eine wesentliche Voraussetzung ist allerdings, daß besonders bei kürzeren Visuren bereits relativ gute vorläufige Höhen bekannt sind, wie der Tabelle 5 zu entnehmen ist.

2,54 Genauigkeitshinweise

Für die Untersuchung, wie genau die Ausgangsdaten bekannt sein müssen, um eine bestimmte Genauigkeit für den Reduktionswinkel  $\bar{\epsilon}_{i,k}$  erhalten zu können, wird Gleichung (2,37) differenziert:

$$d\bar{\epsilon}_{i,k}^{cc} = \frac{0^{cc}}{\bar{s}_{i,k}} \cdot \sin(\varphi_{i,k} - \gamma_{i,k(E)}) \cdot d(d_{i,k}) - \frac{0^{cc}}{\bar{s}_{i,k}^2} \cdot d_{i,k} \cdot \sin(\varphi_{i,k} - \gamma_{i,k(E)}) \cdot d\bar{s}_{i,k} + \frac{0^{cc}}{\bar{s}_{i,k}} \cdot d_{i,k} \cdot \cos(\varphi_{i,k} - \gamma_{i,k(E)}) \cdot d\varphi_{i,k} \dots (2.38)$$

In Tabelle 4 sind die zulässigen Fehler für  $d_{i,k}$ ,  $\bar{s}_{i,k}$  und  $z_{i,k}$  für die beiden Fälle zusammengestellt, daß  $\bar{\epsilon}_{i,k}$  auf  $0,05^{cc}$  bzw.  $0,5^{cc}$  genau sein soll. Die Instrument- und Zielhöhendifferenz wurde mit  $d_{i,k} = 1,0$  m angenommen. Bei Berechnung der zulässigen Fehler  $d\bar{s}_{i,k}$  und  $d(d_{i,k})$  wurde eine horizontale Visur angenommen, für den zulässigen Fehler  $dz_{i,k}$  der Zenitdistanz eine Zenitdistanz von  $z_{i,k} = 50^{\circ}$ .

s (km)	$d\bar{\epsilon} = 0,05^{cc}$			$d\bar{\epsilon} = 0,5^{cc}$		
	$d(d_{i,k})$	$d\bar{s}_{i,k}$	$dz_{i,k}$	$d(d_{i,k})$	$d\bar{s}_{i,k}$	$dz_{i,k}$
1,0	0,08 mm	0,079 m	$0^{c}71^{cc}$	0,79 mm	0,785 m	$7^{c}07^{cc}$
2,0	0,16 mm	0,314 m	$1^{c}41^{cc}$	1,57 mm	3,142 m	$14^{c}14^{cc}$
3,0	0,24 mm	0,707 m	$2^{c}12^{cc}$	2,36 mm	7,069 m	$21^{c}21^{cc}$
4,0	0,31 mm	1,257 m	$2^{c}83^{cc}$	3,14 mm	12,566 m	$28^{c}28^{cc}$
5,0	0,39 mm	1,964 m	$3^{c}54^{cc}$	3,93 mm	19,635 m	$35^{c}36^{cc}$
6,0	0,47 mm	2,827 m	$4^{c}24^{cc}$	4,71 mm	28,274 m	$42^{c}43^{cc}$
7,0	0,55 mm	3,894 m	$4^{c}95^{cc}$	5,50 mm	38,485 m	$49^{c}50^{cc}$
8,0	0,63 mm	5,027 m	$5^{c}66^{cc}$	6,28 mm	50,265 m	$56^{c}57^{cc}$
9,0	0,71 mm	6,362 m	$6^{c}36^{cc}$	7,07 mm	63,617 m	$63^{c}64^{cc}$
10,0	0,79 mm	7,854 m	$7^{c}07^{cc}$	7,85 mm	78,540 m	$70^{c}71^{cc}$

Tabelle 4

Der Tabelle 4 ist zu entnehmen, daß es im normalen Feldarbeitsbetrieb praktisch nicht erreichbar ist, die Reduktionswinkel  $\bar{\epsilon}_{i,k}$  mit einer Genauigkeit von  $0,05^{cc}$  zu erhalten, da für die Instrument- und Zielhöhendifferenz  $d_{i,k}$  im günstigsten Fall Millimetergenauigkeit erreicht werden kann. Es ist daher bei kurzen Visuren praktisch im allgemeinen mit einem Fehler des Reduktionswinkels im Sekundenbereich zu rechnen, wenn die Instrument- und Zielhöhen der Vertikalwinkelmessung auf Millimeter genau erhoben werden. Eine etwa vorhandene geringere Genauigkeit der Instrument- und Zielhöhen der elektronischen Streckenmessung hat auf das Verhältnis der beiden gegenseitigen Vertikalwinkel zueinander keinen Einfluß, jedoch schon auf die Genauigkeit der horizontalierten Strecke, besonders bei steileren Visuren.

Der in Gleichung (2,38) enthaltene Fehler  $d\bar{s}_{i,k}$  der Schrägstrecke ist von der Art der Schrägstrecke abhängig. Der Fehler einer elektronisch gemessenen Schrägstrecke ist im allgemeinen geringer, als er in Tabelle 4 als zulässig ausgewiesen wird. Wird jedoch die aus Koordinaten und vorläufigen Höhen abgeleitete Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k}(K_0)$  zwischen den Punktstabilisierungen nach Gleichung (2,24) verwendet, ist zu untersuchen, mit welcher Genauigkeit die vorläufigen Höhen bekannt sein müssen. Dazu wird die Gleichung (2,24) differenziert:

$$d\bar{s}_{i,k}(K_0) = \frac{1}{\bar{s}_{i,k}} \cdot [2 \cdot s_{i,k}(E) \cdot (1 + \frac{E_i}{R_i(E)}) \cdot \frac{dE_i}{R_i(E)} + 2 \cdot (E_k - E_i) \cdot (dE_k - dE_i)]$$

..... (2,39)

Für diese Genauigkeitsuntersuchung ist praktisch nur das zweite Glied von Gleichung (2,39) von Bedeutung. In der nachstehenden Tabelle 5 ist für verschiedene Höhenunterschiede die benötigte Genauigkeit des Höhenunterschiedes zusammengestellt, um die in Tabelle 4 ausgewiesenen zulässigen Streckenfehler  $d\bar{s}_{i,k}$  einhalten zu können.

Tabelle 5 a:  $d\bar{E} = 0,05^{cc}$

$\bar{s}$ (km)	d( $\Delta E$ ) in m für $\Delta E =$						
	500 m	1000 m	1500 m	2000 m	2500 m	3000 m	3500 m
1,0	0,08	0,04	•	•	•	•	•
2,0	0,63	0,31	0,21	0,16	•	•	•
3,0	2,12	1,06	0,71	0,53	0,42	0,35	•
4,0	5,03	2,51	1,68	1,26	1,01	0,84	0,72
5,0	9,82	4,91	3,27	2,45	1,96	1,64	1,40
6,0	16,96	8,48	5,66	4,24	3,39	2,83	2,42
7,0	26,94	13,47	8,98	6,73	5,39	4,49	3,85
8,0	40,21	20,11	13,40	10,05	8,04	6,70	5,74
9,0	57,26	28,63	19,09	14,31	11,45	9,54	8,18
10,0	78,54	39,27	26,18	19,64	15,71	13,09	11,22

Tabelle 5 b:  $d\bar{E} = 0,5^{cc}$

1,0	0,79	0,39	•	•	•	•	•
2,0	6,28	3,14	2,10	1,57	•	•	•
3,0	21,21	10,60	7,07	5,30	4,24	3,53	•
4,0	50,26	25,13	16,76	12,57	10,05	8,38	7,18
5,0	98,18	49,09	32,72	24,54	19,64	16,36	14,02
6,0	169,64	84,82	56,55	42,41	33,93	28,27	24,24
7,0	269,40	134,70	89,80	67,35	53,88	44,90	38,48
8,0	402,12	201,06	134,04	100,53	80,42	67,02	57,45
9,0	572,55	286,28	190,85	143,14	114,51	95,43	81,79
10,0	785,40	392,70	261,80	196,35	157,08	130,90	112,20

Für kürzere Visuren müssen also bereits relativ genaue vorläufige Höhenunterschiede gegeben sein, wenn für die Reduktion der gemessenen Vertikalwinkel auf die Punktstabilisierungen die Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k}(K_0)$  mit entsprechender Genauigkeit vorliegen soll.

3 HÖHENSYSTEME

3,1 Allgemeines

Um die im Rahmen dieser Arbeit aufgezeigten Auswirkungen der bei der bisher üblichen Art der Auswertung der Vertikalwinkelmessungen und der Reduktion der elektronisch gemessenen Schrägstrecken gemachten Vernachlässigungen vermeiden zu können, erscheint am zweckmäßigsten die Lösung, daß man von dem in Österreich in Verwendung stehenden Gebrauchshöhenetz abgeht und an dessen Stelle zwei getrennte Höhensysteme aufbaut, ein geoidisches Höhensystem für all jene Zwecke, für die die auf das Geoid bezogenen Meereshöhen von Bedeutung wären, und außerdem ein ellipsoidisches Höhensystem für alle Berechnungen, bei denen gemessene Strecken für die Lageberechnung nutzbar gemacht werden sollen.

Es sollen daher in dieser Arbeit grundsätzlich drei verschiedene Arten von Höhen unterschieden werden:

- a) Ellipsoidische Höhen, Bezeichnung  $E_i$ .
- b) Geoidische Höhen, Bezeichnung  $G_i$ .
- c) Gebrauchshöhen, Bezeichnung  $H_i$ .

Die in Abbildung 2.1 dargestellten Abstände  $G_{i(E)}$  der Punkte  $P_i$  vom Geoid in Richtung der Ellipsoidnormalen können durch die auf das Geoid bezogenen Höhen  $G_{i(G)}$  ausgedrückt werden:

$$G_{i(E)} = \frac{G_{i(G)}}{\cos \varepsilon_{i,k}} = G_{i(G)} \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \varepsilon_{i,k}} \approx G_{i(G)} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon_{i,k}^2}{2}\right) \dots\dots (3.1)$$

Hier ist insofern bereits eine weitere Näherung enthalten, als streng genommen  $G_{i(G)}$  die auf das Geoid bezogene Höhe des Punktes  $P_i$  ist, gemessen entlang der gekrümmten Lotlinie, während in Abbildung 2.1 unter  $G_{i(G)}$  jener Abstand des Punktes  $P_i$  vom Geoid verstanden wird, der entlang der Tangente an die Lotlinie im Punkt  $P_i$  gemessen wird.

Nimmt man einen in dem Normalschnitt wirksamen Lotabweichungsanteil von  $\varepsilon_{i,k} = 2^c \approx 1'$  und eine Meereshöhe von  $G_{i(G)} = 4000$  m an, also Extremwerte, die praktisch in Österreich kaum erreicht werden, erhält man aus Gleichung (3.1) zwischen  $G_{i(G)}$  und  $G_{i(E)}$  eine Differenz von nicht ganz 0,2 mm. Man kann daher den Abstand  $G_{i(E)}$  genähert gleich der Höhe  $G_{i(G)}$  setzen und durch die allgemeinere Bezeichnung  $G_i$  ausdrücken:

$$G_{i(E)} \approx G_{i(G)} = G_i \dots\dots (3.2)$$

In analoger Weise kann mit noch größerer Berechtigung für die Abstände  $N_i$  des Geoids vom Ellipsoid diese Näherung eingeführt werden, da sie wesentlich kleiner als die Höhen  $G_i$  sind.

Die auf das Ellipsoid bezogenen Höhen  $E_i$  lassen sich nach Abb. 2.1 darstellen als

$$E_i = G_i + N_i \quad \dots\dots (3.3)$$

Da man die Gebrauchshöhen genähert als nahezu geoidische Höhen bezeichnen kann, also

$$H_i \doteq G_i \quad \dots\dots (3.4)$$

annehmen kann, kann man gleichfalls als Näherung folgende Beziehung gelten lassen:

$$E_i \doteq H_i + N_i \quad \dots\dots (3.5)$$

Man hat daher auch folgenden Zusammenhang zwischen den verschiedenen Arten von Höhenunterschieden:

$$\Delta E_{i,k} = E_k - E_i \quad \dots\dots (3.6)$$

$$= G_k + N_k - G_i - N_i = \Delta G_{i,k} + \Delta N_{i,k} \quad \dots\dots (3.7)$$

$$\doteq H_k + N_k - H_i - N_i = \Delta H_{i,k} + \Delta N_{i,k} \quad \dots\dots (3.8)$$

### 3,2 Gebrauchshöhen

Das System der österreichischen Gebrauchshöhen kann nach der Art der Höhen streng genommen nicht eindeutig klassifiziert werden, es stellt ein Mischsystem dar. Die Grundlage bildet das österreichische Präzisionsnivelement, über dessen Entstehung MITTER in [54] und ULBRICH in [66] genauere Angaben machten. Im Prinzip wurde das österreichische Präzisionsnivelement ohne Berücksichtigung der vorhandenen Schweremessungen einer sphäroidischen Reduktion unterzogen. Außerdem wurden auch verschiedene Spannungen auf einzelne Linien aufgeteilt.

Die Linien des Präzisionsnivelements wurden durch nachgeordnete Nivelements ergänzt und verdichtet, an die überhaupt keine Reduktion angebracht worden ist.

Im Zuge der Messungen für beide Arten von Nivelementlinien wurden die in der näheren Umgebung der einzelnen Linien liegenden Triangulierungspunkte angeschlossen. Im Rahmen von Triangulierungsarbeiten wurden zusätzlich noch für weitere Triangulierungspunkte Nivelementanschlüsse durchgeführt.

Diese Triangulierungspunkte mit Nivelementanschluß bilden die Grundlage für die durch Auswertung der Vertikalwinkelmessungen erfolgte trigonometrische Verdichtung des Höhennetzes.

Später stabilisierte und beobachtete Nivellementlinien wurden in dem bereits bestehenden trigonometrischen Höhennetz in der Art berücksichtigt, daß die Triangulierungspunkte in der näheren Umgebung dieser Linien höhenmäßig nachgezogen wurden. Dazu wurden im Vordruck für die Ausgleichung der Meereshöhen die betroffenen Punkte nach Einführen der neuen Nivellementhöhen noch einigen zusätzlichen Iterationen unterzogen.

Bei der Auswertung der Vertikalwinkelmessungen wurde bis auf wenige Ausnahmen der durch Gleichung (1.1) definierte Refraktionskoeffizient nach HARTL verwendet. Außer der Berücksichtigung der Erdkrümmung wurde sonst keine weitere Reduktion angebracht.

Es sind also bereits die Nivellementhöhen keine echt geoidischen Höhen. Diesen Nivellementhöhen sind nun aus Vertikalwinkelmessungen abgeleitete Höhenunterschiede aufgepfropft, die zwar keine ellipsoidischen Höhenunterschiede darstellen, aber auch keine echt geoidischen Höhenunterschiede sind, am wenigsten in jenen Fällen, wo nur einseitige Höhenunterschiede vorlagen. Man kann aber auch das Mittel der Höhenunterschiede aus Hin- und Rückmessung im allgemeinen nur bedingt als genäherten geoidischen Höhenunterschied ansehen, vor allem im Bergland bei Steilvisuren, da die Höhenunterschiede fast ausschließlich nur aus Horizontalstrecken abgeleitet wurden, die aus der vorher durchgeführten Lageberechnung stammen.

Man kann daher das österreichische Gebrauchshöhennetz nur sehr bedingt als ein System geoidischer Höhen bezeichnen. Auf keinen Fall stellt es aber ein ellipsoidisches Höhensystem dar, wie man es für die Reduktion der für die Lageberechnung benötigten Strecken zu verwenden hätte.

### 3,3 Geoidisches Höhensystem

Für den Aufbau eines Systems geoidischer Höhen wäre es günstig, von jenen Punkten des Präzisionsnivellements auszugehen, die im Rahmen der Ausgleichung des REUN-Höhennetzes bereits höhenmäßig festgelegt worden sind, so weit sie für das österreichische Bundesgebiet von Bedeutung sind.

Auf diese Ausgangspunkte bezogen wären die vorliegenden neueren Messungen des Präzisionsnivellements, entsprechend reduziert unter Verwendung der gleichfalls bereits vorliegenden Gravimetermessungen, neu auszugleichen. Damit erhielte das österreichische Höhennetz eine moderne Grundlage und wäre gleichzeitig an das internationale REUN-Höhensystem angeschlossen.

Nach Ausgleichung der Linien des Präzisionsnivellements wären auch alle Linien der nachgeordneten Nivellements in das neue Höhensystem einzu beziehen und somit neu auszugleichen. Dazu wäre es für einzelne Linien, wie z. B. für das Technische Nivellement über den Felbertauern, notwendig,

Gravimetermessungen durchzuführen, um auch diese Nivellementhöhen entsprechend reduzieren zu können. In den meisten Fällen wird dies jedoch nicht notwendig sein.

Durch die Nivellementanschlüsse, die bei einer großen Anzahl von Triangulierungspunkten vorhanden sind, werden die geoidischen Höhen auch in das Festpunktfeld übertragen. Durch eine entsprechende Art der Auswertung können von den vorliegenden Vertikalwinkelmessungen genäherte geoidische Höhenunterschiede abgeleitet werden, so daß dadurch das geoidische Höhensystem voll und ganz auch auf das Festpunktfeld ausgedehnt werden kann.

### 3,4 Ellipsoidisches Höhensystem

Als Grundlage für alle Berechnungen, wo Höhen, Höhenunterschiede oder Vertikalwinkelmessungen für die Lageberechnung von Bedeutung sind, müßte ein rein ellipsoidisches Höhensystem aufgebaut werden.

Eine Voraussetzung für den Aufbau eines Systems von ellipsoidischen Höhen ist das Vorhandensein eines echt geoidischen Höhensystems. Dazu müßte weiters über den Bereich des österreichischen Bundesgebietes ein ganzes Netz von astronomisch-gravimetrischen Nivellements gelegt werden. Im Flachland, wie vor allem im Osten von Österreich, könnte dieses Netz etwas weitmaschiger sein. Es müßte aber umso enger werden, je mehr man sich den gebirgigen Landesteilen nähert.

Die durch das astronomisch-gravimetrische Nivellement bestimmten Punkte sollten nach Möglichkeit Nivellementanschluß haben. Es bietet sich daher an, die astronomisch-gravimetrischen Nivellements entlang der einzelnen Nivellementlinien zu legen. Nun könnte man die Verbindung zwischen dem geoidischen und dem ellipsoidischen Höhensystem herstellen. Aus dem geometrischen Nivellement wäre die geoidische Höhe  $G_i$  bekannt, die Abstände  $N_i$  des Geoids vom Ellipsoid könnte man dem astronomisch-gravimetrischen Nivellement entnehmen und es ergäbe sich somit aus Gleichung (3,3) die ellipsoidische Höhe des betreffenden Punktes.

Die so abgeleiteten Punkte mit ellipsoidischen Höhen stellen nun die eigentliche Grundlage für den Aufbau des gesamten ellipsoidischen Höhensystems dar.

Eine weitere notwendige Voraussetzung für den Aufbau eines ellipsoidischen Höhensystems ist die Kenntnis der Lotabweichungen für eine relativ große Anzahl von Punkten. Für die Punkte des astronomisch-gravimetrischen Nivellements können auch gleichzeitig die Lotabweichungen ermittelt werden. Darüber hinaus müßten aber für eine möglichst große Anzahl weiterer Festpunkte, besonders im gebirgigen Teil von Österreich, aus astronomischen



Messungen Lotabweichungen abgeleitet werden. Für den Rest der Festpunkte erscheint es als zweckmäßig, die Lotabweichungen in auf das Geoid reduzierter Form durch Interpolation zu ermitteln und anschließend durch Berücksichtigung der Lotkrümmung in die Niveauflächen durch die Beobachtungspunkte zu bringen. Eine rechnerische Ermittlung der fehlenden Lotabweichungen gemeinsam mit der Berechnung von Refraktionsänderungen im Rahmen eines Ausgleichsverfahrens kann in der Praxis vielfach nur grobe Näherungswerte ergeben.

Für den Großteil des Bundesgebietes wird es möglich sein, die bereits vorhandenen Vertikalwinkelmessungen für die Berechnung der ellipsoidischen Höhenunterschiede heranzuziehen. Die vorhandenen Vertikalwinkelmessungen können somit also sowohl für die Berechnung von geoidischen als auch für die Berechnung von ellipsoidischen Höhen herangezogen werden, allerdings nach unterschiedlicher Reduktion. Vorerst müßten die Berechnungen im ellipsoidischen Höhensystem durchgeführt werden, wo nach Berücksichtigung der Lotabweichungseinflüsse die restlichen Refraktionseinflüsse durch ein Ausgleichungsverfahren ermittelt werden könnten. Nach Berechnung der ellipsoidischen Höhen könnte eine Auswertung im geoidischen Höhensystem erfolgen.

Die Gegenüberstellung der ellipsoidischen und geoidischen Höhen würde schließlich gleichsam als Nebenprodukt eine detaillierte Beschreibung des Geoids in Österreich ermöglichen.

4 HORIZONTALTIERUNG SCHRÄG GEMESSENER STRECKEN

4,1 Horizontierung unter Verwendung von Vertikalwinkelmessungen

Die elektronisch gemessenen Schrägstrecken werden im allgemeinen mit Hilfe von Vertikalwinkelmessungen horizontiert. Die gemessenen Vertikalwinkel sind, falls dies nicht bereits von der Messung her gegeben ist, nach Unterabschnitt 2,52 auf die Höhenbezugspunkte der elektronischen Streckenmessung zu reduzieren.

Aus dem Dreieck  $P_i-P_k-P_k(i)$  in der Abbildung 2.1 kann nach dem Sinussatz die Beziehung zwischen der gemessenen Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k(M)}$  und der horizontalen Strecke  $s_{i,k(i)}$  im Niveau des Punktes  $P_i$  abgeleitet werden. Analog erhält man aus dem Dreieck  $P_k-P_i-P_i(k)$  die horizontale Strecke im Niveau des Punktes  $P_k$ :

$$s_{i,k(i)} = \bar{s}_{i,k(M)} \cdot \frac{\sin \xi_{k,i}}{\cos \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}} \quad \dots (4.1)$$

$$s_{i,k(k)} = \bar{s}_{i,k(M)} \cdot \frac{\sin \xi_{i,k}}{\cos \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}} \quad \dots (4.2)$$

Die horizontale Strecke  $s_{i,k(E_M)}$  im mittleren Niveau der Punkte  $P_i$  und  $P_k$  ist dann als Mittel der horizontalen Strecken  $s_{i,k(i)}$  und  $s_{i,k(k)}$  gegeben, woraus man nach einigen Umformungen erhält:

$$s_{i,k(E_M)} = \bar{s}_{i,k(M)} \cdot \cos \frac{1}{2} \cdot (\xi_{k,i} - \xi_{i,k}) \quad \dots (4.3)$$

Führt man Gleichung (2.26) ein, wird daraus

$$s_{i,k(E_M)} = \bar{s}_{i,k(M)} \cdot \sin \left( \xi_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2} \right) \quad \dots (4.4)$$

4,2 Horizontierung ohne Verwendung von Vertikalwinkelmessungen

Will man eine von der Vertikalwinkelmessung unabhängige Reduktionsformel haben, wendet man auf die Dreiecke  $P_i-P_k-P_k(i)$  und  $P_k-P_i-P_i(k)$  in der Abbildung 2.1 den Kosinussatz an, wobei zu berücksichtigen ist, daß die Strecken  $P_k(i)-P_k$  und  $P_i-P_i(k)$  mit dem ellipsoidischen Höhenunterschied  $\Delta E_{i,k}$  identisch sind. Man erhält so folgende Gleichungen für  $s_{i,k(i)}$  und  $s_{i,k(k)}$ :

$$s_{i,k(i)} = - \Delta E_{i,k} \cdot \sin \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2} + \sqrt{s_{i,k(M)}^2 - \Delta E_{i,k}^2 \cdot \cos^2 \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}} \quad \dots (4.5)$$

$$s_{i,k(k)} = + \Delta E_{i,k} \cdot \sin \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2} + \sqrt{s_{i,k(M)}^2 - \Delta E_{i,k}^2 \cdot \cos^2 \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}} \quad \dots (4.6)$$

Das Mittel aus den Gleichungen (4.5) und (4.6) ergibt die horizontale Strecke  $s_{i,k(E_M)}$  im mittleren Niveau der Punkte  $P_i$  und  $P_k$ :

$$s_{i,k(E_M)} = \sqrt{\bar{s}_{i,k(M)}^2 - [E_k + Z_k(EM) - E_i - I_i(EM)]^2} \cdot \cos^2 \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2} \dots\dots (4.7)$$

Es darf hierbei nicht übersehen werden, daß die Instrument- und Zielhöhe der Streckenmessung in den Höhenunterschied einzubeziehen sind.

In dem hierbei auftretenden Entfernungsbereich bis etwa 10 km kann man als Näherung

$$\cos \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2} \doteq 1 \dots\dots (4.8)$$

setzen. Damit wird Gleichung (4.7) zu

$$s_{i,k(E_M)} \doteq \sqrt{\bar{s}_{i,k(M)}^2 - [\Delta E_{i,k} - (I_i(EM) - Z_k(EM))]^2} \dots\dots (4.9)$$

Bei einer Streckenlänge von 10 km begeht man bei Anwendung der genäherten Gleichung (4.9) gegenüber der Gleichung (4.7) folgende Streckenfehler:

$\Delta E = 1000 \text{ m}$	$\Delta s = 0,1 \text{ mm}$
$\Delta E = 2000 \text{ m}$	$\Delta s = 0,5 \text{ mm}$
$\Delta E = 3000 \text{ m}$	$\Delta s = 1,1 \text{ mm}$

Man kann also in der Mehrzahl der Fälle die Gleichung (4.9) als praktisch hinreichend genau betrachten.

Für diese Art der Streckenreduktion muß allerdings vorausgesetzt werden, daß der ellipsoidische Höhenunterschied  $\Delta E_{i,k}$  mit entsprechender Genauigkeit bekannt ist.

### 4,3 Fehlergrenzen für horizontierte Schrägstrecken

Kann eine elektronisch gemessene Schrägstrecke mit mehr als einem Vertikalwinkel horizontiert werden, z. B. mit der Zenitdistanz der Hinmessung und jener der Rückmessung, müssen die so mehrfach errechneten Horizontalentfernungen die nachstehende Fehlergrenze erfüllen:

$$\left| s_{i,k(E_M)}^{(1)} - s_{i,k(E_M)}^{(2)} \right| \leq F_{s_{E_M}}^{(1)} = 3 \cdot \sqrt{2 \cdot \left[ m_{s_{i,k(M)}}^2 \cdot \sin^2 z_{i,k} + \bar{s}_{i,k(M)}^2 \cdot \cos^2 z_{i,k} \cdot \left( \frac{m_f}{Q} \right)^2 \right]} \dots\dots (4.10)$$

Diese Fehlergrenze kann man aus der Gleichung (4.4) ableiten.

Ist hingegen eine horizontierte Strecke aus Gleichung (4.4) mit einer horizontierten Strecke aus Gleichung (4.9) zu vergleichen, hat man die folgende Fehlergrenze zu verwenden:

$$\left| s_{i,k(E_M)}^{(1)} - s_{i,k(E_M)}^{(2)} \right| \leq F_{s_{E_M}}^{(2)} = \beta \cdot \sqrt{\sin^2 z_{i,k} \cdot \frac{m_{s_{i,k(M)}}^2}{s_{i,k(M)}^2} + \bar{s}_{i,k(M)}^2 \cdot \cos^2 z_{i,k} \cdot \left(\frac{m_f^{cc}}{q_{cc}}\right)^2 + \frac{\bar{s}_{i,k(M)}^2}{s_{i,k(E_M)}^2} \cdot m_{s_{i,k(M)}}^2 + \frac{\Delta R_{i,k}^2}{s_{i,k(E_M)}^2} \cdot m_{\Delta E_{i,k}}^2} \dots (4.11)$$

Der mittlere Streckenfehler  $m_{s_{i,k(M)}}$  ist entsprechend dem verwendeten Streckenmeßgerät anzunehmen.

Die mittleren Fehler  $m_f$  und  $m_{\Delta E}$  werden später abgeleitet.

4,4 Fehler in der horizontalen Strecke bei konventioneller Berechnung

Bisher wurde in der Triangulierungsabteilung bei der Horizontierung elektronisch gemessener Schrägstrecken unter Verwendung von Vertikalwinkelmessungen der durch Gleichung (1.1) definierte einheitliche Wert für den Refraktionskoeffizienten verwendet und außerdem das Vorhandensein von Lotabweichungen nicht berücksichtigt. Wurden zur Horizontierung von Strecken Höhenunterschiede herangezogen, so waren dies keine ellipsoidischen Höhenunterschiede, wie dies notwendig wäre, sondern Höhenunterschiede aus Gebrauchshöhen, also grob genäherte geoidische Höhenunterschiede.

Diese Vernachlässigungen sind im Flachland und im Bergland bei Schrägstrecken mit nur geringer Visurneigung praktisch bedeutungslos, da sich dadurch im allgemeinen nur sehr geringe Auswirkungen auf die horizontierten Strecken ergeben werden. Hier wird sich in der Hauptsache nur ein Maßstabsfehler einstellen, der umso größer sein wird, je weiter man vom Triangulierungshauptpunkt weg ist. Durch die dritte Ausgleichung des österreichischen Netzes erster Ordnung kann erwartet werden, daß sich im Triangulierungshauptpunkt Hermannskogel eine Kippung des Bezugsellipsoides in seiner durch das Gebrauchsnetz definierten Lage gegenüber der aus der Ausgleichung resultierenden mittleren Lage in Bezug auf das Geoid ergibt. Wie bereits im Abschnitt 2,3 erwähnt wurde, wird bei der Reduktion einer Strecke auf Meeresniveau die im allgemeinen unbekannte Differenz zwischen Geoid- und Ellipsoidhöhen vernachlässigt.

Voll und ganz wirken sich hingegen die Unterschiede zwischen Gebrauchshöhen und ellipsoidischen Höhen und die vernachlässigten Refraktionsanomalien und die Lotabweichungen im Bergland und bei steileren Visuren aus.

Bei einer Streckenreduktion mittels Vertikalwinkel ist bereits bei Visurneigungen von etwa  $10^\circ$  Vorsicht geboten. Man muß sich dabei überlegen, auf welche Weise die Einflüsse der Refraktionsanomalien und der Lotabweichungen berücksichtigt bzw. ausgeschaltet werden können.

Reduziert man die gemessenen Schrägstrecken ohne Vertikalwinkel allein mit Höhenunterschieden, muß man sich darüber im Klaren sein, daß hierfür streng genommen nur ellipsoidische Höhenunterschiede verwendet werden dürfen. Verwendet man, wenn man keine ellipsoidischen Höhenunterschiede hat, aus den vorhandenen Gebrauchshöhen abgeleitete Höhenunterschiede, darf man sich nicht wundern, wenn man in der Lageberechnung zusätzliche Spannungen erhält. Wie das Beispiel in [73] zeigt, können zwischen diesen beiden Arten von Höhenunterschieden Differenzen von einigen Dezimetern auftreten, was sich bei Steilvisuren bis zum vollen Betrag dieser Differenzen auf die horizontierte Strecke auswirken kann.

Nimmt man nun an, daß das Gebrauchshöhennetz geoidischen Höhen sehr nahe kommt, ist der Unterschied eines daraus abgeleiteten Höhenunterschiedes gegenüber dem streng ellipsoidischen Höhenunterschied durch die Differenz  $(N_k - N_i)$  gegeben. Durch Differenzieren der Gleichung (4.9) kann man den Streckenfehler  $\Delta s_{i,k}^{(N)}(E_M)$  ableiten, der sich daraus ergibt, wenn die Differenz  $(N_k - N_i)$  vernachlässigt wird:

$$\Delta s_{i,k}^{(N)}(E_M) = - \frac{\Delta E_{i,k}}{s_{i,k}(E_M)} \cdot (N_k - N_i) \quad \dots\dots (4.12)$$

Dieser Streckenfehler kann genähert ausgedrückt werden durch

$$\Delta s_{i,k}^{(N)}(E_M) \cong - \cot z_{i,k} \cdot (N_k - N_i) \quad \dots\dots (4.13)$$

Diese Beziehung ist in Abbildung 4.1 für verschiedene Werte von  $\Delta N_{i,k}$  dargestellt. Es sei darauf hingewiesen, daß die hier dargestellten Streckenfehler unabhängig von der Streckenlänge sind!

Für die Streckenreduktion unter Verwendung der gemessenen Vertikalwinkel kann man, ausgehend von Gleichung (4.4), den durch Vernachlässigung der Lotabweichung entstehenden Streckenfehler  $\Delta s_{i,k}^{(\varepsilon)}(E_M)$  als Differenz zwischen einer richtig reduzierten Strecke und einer horizontalen Strecke ohne Berücksichtigung der Lotabweichung darstellen:

$$\begin{aligned} \Delta s_{i,k}^{(\varepsilon)}(E_M) &= \bar{s}_{i,k}(M) \cdot \left[ \sin(z_{i,k} + \delta_{i,k} + \varepsilon_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2}) - \sin(z_{i,k} + \delta_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2}) \right] \cong \\ &\cong \bar{s}_{i,k}(M) \cdot \cos(z_{i,k} + \delta_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2}) \cdot \varepsilon_{i,k} \cong \Delta E_{i,k} \cdot \varepsilon_{i,k} \end{aligned} \quad \dots\dots (4.14)$$

In der Abbildung 4.2 wurden für  $\varepsilon_{i,k}$  bis  $60^\circ$  und für Höhenunterschiede bis 3000 m die Streckenfehler durch Vernachlässigung der Lotabweichung bei der Horizontierung der gemessenen Schrägstrecken dargestellt.

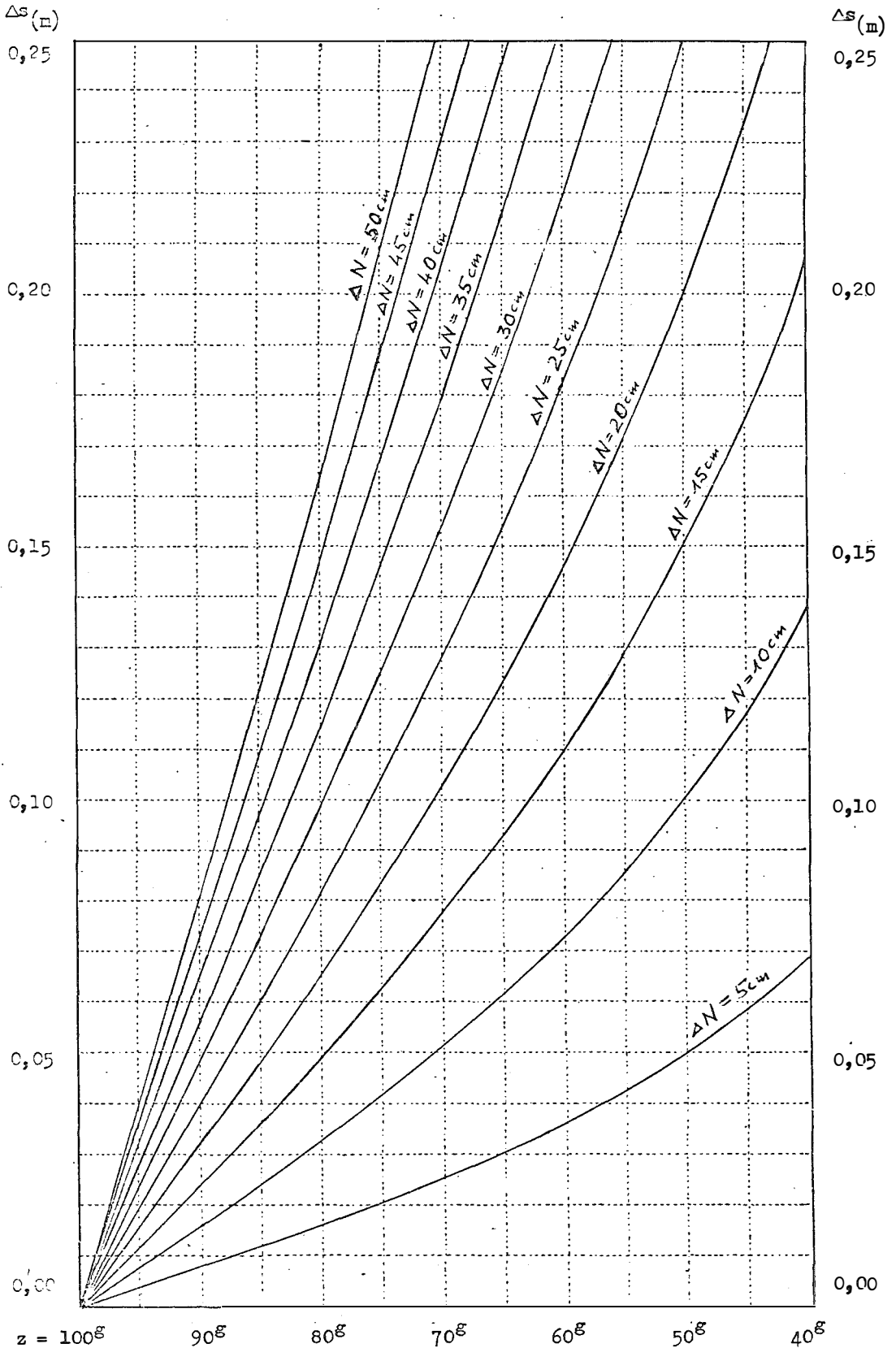


Abb. 4.1

Streckenfehler  $\Delta s$ , abhängig von  $z$  und  $\Delta N$

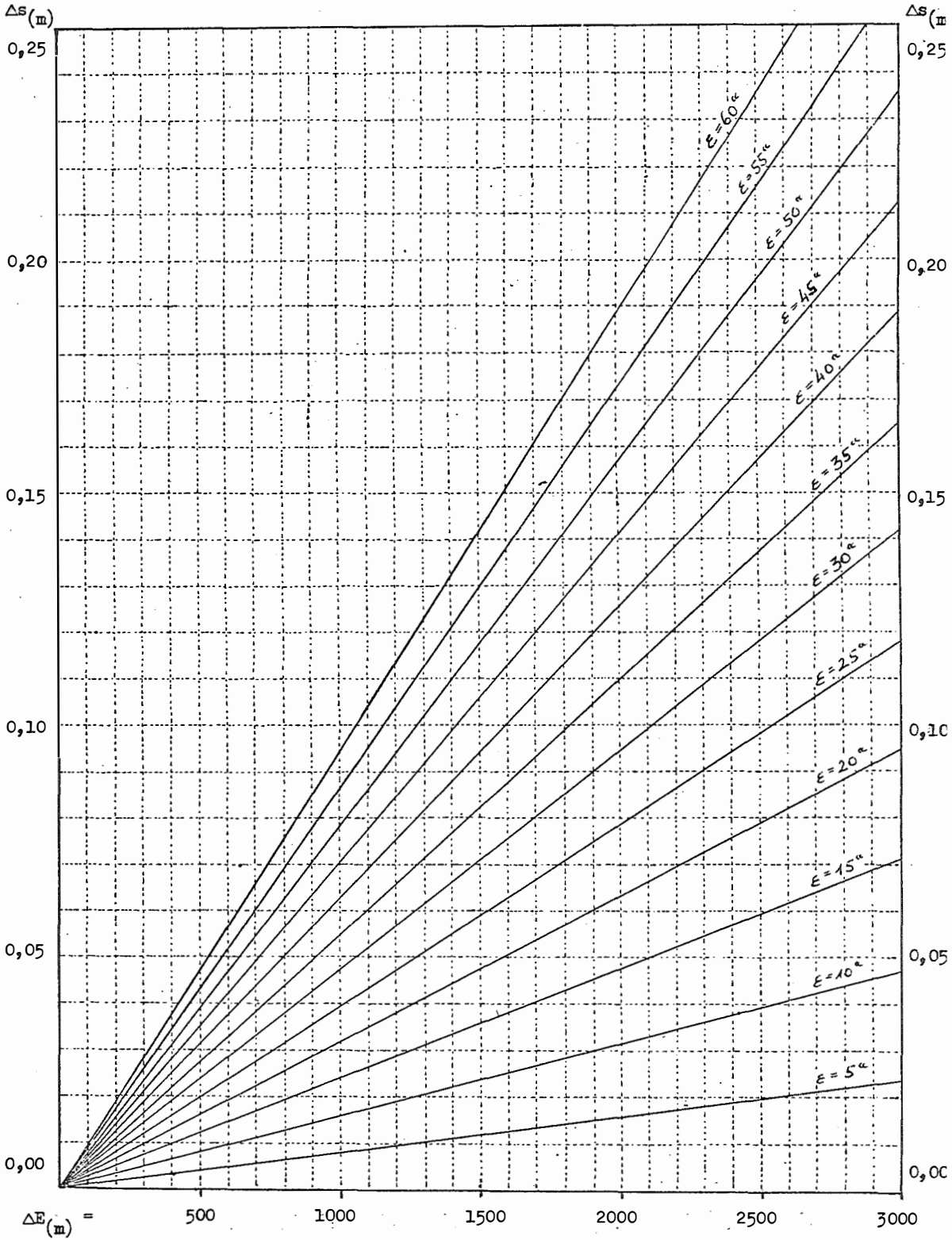


Abb. 4.2 Streckenfehler  $\Delta s$  wegen Lotabweichung

Wurde für die Refraktion nur ein Standardwert verwendet, steckt der durch die Refraktionsanomalie verursachte Fehler gleichfalls in dem Winkel  $\epsilon_{i,k}$  von Gleichung (4.14) drinnen. Es kann daher die Abbildung 4.2 gleichermaßen die Auswirkung der fehlerhaften Erfassung der Refraktion auf die horizontierte Strecke darstellen. Auch hier sei darauf hingewiesen, daß die dargestellten Streckenfehler unabhängig von der Streckenlänge sind!

Die beiden Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen deutlich, daß bei beiden Arten der Streckenhorizontierung durch die bei der konventionellen Art der Berechnung bedingten Vernachlässigungen vor allem bei Steilvisuren beträchtliche Fehler in die horizontierten Strecken kommen können, die sich dann als zusätzliche Spannungen in der Lageberechnung auswirken.

Für gemessene Schrägstrecken mit stärkerer Visurneigung kann man also nur dann richtig horizontierte Strecken erwarten, wenn nach entsprechender Berücksichtigung der Refraktionseinflüsse und einer Einbeziehung von teilweise astronomisch ermittelten Lotabweichungen eine strenge Ermittlung von ellipsoidischen Höhenunterschieden erfolgt.

Die Auswirkung der Vernachlässigung der Lotabweichungseinflüsse bei der Horizontierung gemessener Schrägstrecken soll zusätzlich noch an einem angenommenen Beispiel gezeigt werden. Nimmt man eine gemessene Schrägstrecke  $\bar{s}_{1,2(M)} = 3100,000 \text{ m}$  an, für die bei richtiger Horizontierung  $s_{1,2(E_M)} = 3000,000 \text{ m}$  ist, erhält man die vollständig reduzierten Zenitdistanzen  $\zeta_{1,2} = 83^{\circ}80'10,24''$  und für die Rückvisur  $\zeta_{2,1} = 116^{\circ}22'89,14''$ , da unter der Annahme von  $R(E) = 6\,379\,409 \text{ m}$  der Zentriwinkel  $\gamma_{1,2(E)} = 0^{\circ}02'99,38''$  ist.

Für die Lotabweichungen bei der Hin- und Rückvisur werden verschiedene Annahmen getroffen. Das Ergebnis der daraus resultierenden Horizontalstrecken und Höhenunterschiede ist in Tabelle 6 zusammengestellt. Die durch die Lotabweichungen  $\epsilon_{1,2} = \epsilon_{2,1} = 0$  gekennzeichnete erste Doppelzeile ergibt die Sollwerte, mit denen die Ergebnisse der weiteren Varianten zu vergleichen sind. Die Sollwerte entstünden, wenn man die angeführten Lotabweichungen berücksichtigte, die Istwerte stellen das Ergebnis bei Vernachlässigung der Lotabweichungen dar.

In einer eigenen Spalte ist das Mittel der horizontierten Strecke aus Hin- und Rückmessung ausgewiesen, ebenso auch die Abweichung dieses Mittels gegenüber dem Sollwert. Vor allem dieses  $\Delta s$  zeigt deutlich, daß durch die Mittelung die durch Vernachlässigung der Lotabweichung entstehenden Fehler nur in Ausnahmefällen beseitigt werden und zwar nur dann, wenn bei beiden Streckenendpunkten die Lotabweichungen gleich groß sind und auch dasselbe Vorzeichen haben. Doch ist bei einer stark geneigten Visur gerade dies in der Praxis am wenigsten zu erwarten.



$\epsilon_{1,2}$ $\epsilon_{2,1}$ cc	$z_{1,2} + \delta_{1,2} - \frac{Y}{2}$ $z_{2,1} + \delta_{2,1} - \frac{Y}{2}$ g c cc	$s_{1,2,hor}$ $s_{2,1,hor}$ m	$s_{Mittel}$ m	$\Delta s_{Mittel}$ mm	$\Delta H_{1,2}$ $\Delta H_{2,1}$ m	$\Delta H_{Mittel}$ m
0 0	83 78 60,55 116 21 39,45	3000,0000 3000,0000	3000,0000	.	+ 781,0250 - 781,0250	781,0250
+ 30 <sup>cc</sup> + 30 <sup>cc</sup>	83 78 30,55 116 21 09,45	2999,9632 3000,0368	3000,0000	0,0	+ 781,1663 - 780,8836	781,0250
+ 30 <sup>cc</sup> - 30 <sup>cc</sup>	83 78 30,55 116 21 69,45	2999,9632 2999,9632	2999,9632	+ 36,8	+ 781,1663 - 781,1663	781,1663
+ 30 <sup>cc</sup> + 15 <sup>cc</sup>	83 78 30,55 116 21 24,45	2999,9632 3000,0184	2999,9908	+ 9,2	+ 781,1663 - 780,9543	781,0603
+ 30 <sup>cc</sup> - 15 <sup>cc</sup>	83 78 30,55 116 21 54,45	2999,9632 2999,9816	2999,9724	+ 27,6	+ 781,1663 - 781,0956	781,1310
- 30 <sup>cc</sup> + 30 <sup>cc</sup>	83 78 90,55 116 21 09,45	3000,0368 3000,0368	3000,0368	- 36,8	+ 780,8836 - 780,8836	780,8836
- 30 <sup>cc</sup> - 30 <sup>cc</sup>	83 78 90,55 116 21 69,45	3000,0368 2999,9632	3000,0000	0,0	+ 780,8836 - 781,1663	781,0250
- 30 <sup>cc</sup> + 15 <sup>cc</sup>	83 78 90,55 116 21 24,45	3000,0368 3000,0184	3000,0276	- 27,6	+ 780,8836 - 780,9543	780,9190
- 30 <sup>cc</sup> - 15 <sup>cc</sup>	83 78 90,55 116 21 54,45	3000,0368 2999,9816	3000,0092	- 9,2	+ 780,8836 - 781,0956	780,9896

Tabelle 6

Man kann aber andererseits der Tabelle 6 auch entnehmen, daß die Tatsache, daß die horizontierte Strecke aus Hin- und Rückmessung den selben Betrag hat, noch keine Gewähr dafür bietet, daß zufolge der Vernachlässigung der Lotabweichungen der Mittelwert auch richtig ist.

Unter der Annahme der in der ersten Spalte von Tabelle 6 ausgewiesenen Lotabweichungen ergibt das Mittel aus den Höhenunterschieden von Hin- und Rückmessung praktisch mit hinreichender Genauigkeit den geoidischen Höhenunterschied. In der ersten Doppelzeile ist dieser identisch mit dem ellipsoidischen Höhenunterschied für alle Varianten. Auch hier sieht man deutlich, daß nur dann, wenn die Lotabweichungen an beiden Visurendpunkten gleich groß sind und auch gleiches Vorzeichen haben, das Mittel der Höhenunterschiede von Hin- und Rückmessung identisch mit dem ellipsoidischen Höhenunterschied ist. Es darf also nur in diesen Fällen der so ermittelte Höhenunterschied für die Horizontierung der gemessenen Schrägstrecken verwendet werden. Wie aber vorher schon erwähnt wurde, kann gerade bei stark geneigten Visuren dieser Fall am wenigsten erwartet werden.

5 ELLIPSOIDISCHE HÖHENUNTERSCHIEDE AUS VERTIKALWINKELMESSUNGEN

5,1 Höhenformel mit gemessener Schrägstrecke

Liegt eine elektronisch gemessene Schrägstrecke vor, sind die gemessenen Vertikalwinkel, wenn dies nicht bereits durch die Messung gegeben ist, nach Unterabschnitt 2,52 auf die Höhenbezugspunkte der Streckenmessung zu reduzieren.

Wendet man auf das Dreieck  $P_i - P_k - P_{k(i)}$  in der Abbildung 2.1 den Sinussatz an, erhält man unter Berücksichtigung von Gleichung (2.26) :

$$\Delta E_{i,k} = \frac{\bar{s}_{i,k(M)}}{\cos \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}} \cdot \cos \left[ \zeta_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2} \right] + [I_{i(EM)} - Z_{k(EM)}] \dots\dots (5.1)$$

5,2 Höhenformel mit horizontaler Strecke

Sind keine gemessenen Schrägstrecken vorhanden, muß man mit den aus Koordinaten abgeleiteten horizontalen Strecken  $s_{i,k(E_M)}$  die Berechnung der Höhenunterschiede durchführen. Die zugehörige Höhenformel erhält man, indem man in Gleichung (5.1) die gemessene Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k(M)}$  mit Hilfe von Gleichung (4.4) in die horizontale Strecke  $s_{i,k(E_M)}$  verwandelt:

$$\Delta E_{i,k} = \frac{s_{i,k(E_M)}}{\cos \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}} \cdot \cot \left[ \zeta_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2} \right] + [I_{i(Th)} - Z_{k(Th)}] \dots\dots (5.2)$$

5,3 Mittlerer Fehler eines Höhenunterschiedes aus Vertikalwinkelmessungen

Der mittlere Fehler eines aus Vertikalwinkelmessungen abgeleiteten Höhenunterschiedes ist davon abhängig, ob der Höhenunterschied nach Gleichung (5.1) mit einer gemessenen Schrägstrecke berechnet worden ist oder nach Gleichung (5.2) mit einer horizontalen Strecke.

Bei Höhenunterschieden aus gemessenen Schrägstrecken wird Gleichung (5.1) differenziert, Gleichung (2.27) wird eingeführt und dann wird der Übergang auf mittlere Fehler durchgeführt:

$$m_{\Delta E}^2 = \cos^2 z_{i,k} \cdot m_s^2 + \bar{s}_{i,k(M)}^2 \cdot \sin^2 z_{i,k} \cdot \left[ \frac{\left(\frac{m_{cc}}{z}\right)^2 + \left(\frac{m_{cc}}{q}\right)^2}{(cc)^2} + \frac{\bar{s}_{i,k(M)}^2}{4 \cdot R_i^2(E)} \cdot m_k^2 \right] + m_{(I-Z)}^2 \dots\dots (5.3)$$

Bei horizontalen Strecken erfolgt der gleiche Vorgang, ausgehend von Gleichung (5.2):

$$m_{\Delta E}^2 = \cot^2 z_{i,k} \cdot m_s^2 + \frac{s_{i,k}^2(E_M)}{\sin^4 z_{i,k}} \cdot \left[ \frac{(m_z^{cc})^2 + (m_\varphi^{cc})^2}{(q^{cc})^2} + \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2 \sin z_{i,k}} \cdot m_k^2 \right] + m_{(I-Z)}^2 \dots (5.4)$$

Die Gleichungen (5.3) und (5.4) können in einer Näherungsformel zusammengefaßt werden. Das erste Glied ist in beiden Gleichungen bei horizontalen Visuren gleich Null und wirkt sich nur bei Steilvisuren aus. Es soll hier vernachlässigt werden. Das zweite Glied wird für beide Gleichungen vereinfacht zusammengefaßt, das letzte Glied ist in beiden Gleichungen identisch und wird unverändert übernommen. Dies ergibt die Näherung:

$$m_{\Delta E}^2 \approx s_{i,k}^2 \cdot \left( \frac{m_\varphi^{cc}}{q^{cc}} \right)^2 + m_{(I-Z)}^2 \dots (5.5)$$

Welche Form der horizontalen Strecke in diese Näherungsgleichung eingesetzt wird, ist praktisch belanglos. Der mittlere Fehler  $m_\varphi$  der ellipsoidischen Zenitdistanz ist definiert durch:

$$(m_\varphi^{cc})^2 = (m_z^{cc})^2 + \left[ \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2} \right]^2 \cdot m_k^2 + (m_\varphi^g)^2 \dots (5.6)$$

Unter der Annahme von

$$m_z = \pm 10^{cc} \dots (5.7) \quad \text{und} \quad m_{(I-Z)} = \pm 0,0002 \text{ m}^2 \dots (5.8)$$

wurde in Tabelle 7 für vier verschiedene Werte von  $m_k$  und für einige Werte für  $m_\varphi$  der nach Gleichung (5.6) berechnete mittlere Fehler von aus Zenitdistanzen abgeleiteten Höhenunterschieden zusammengestellt.

#### 5,4 Fehlergrenze

Kann der Höhenunterschied  $\Delta E_{i,k}$  zwischen den Punkten  $P_i$  und  $P_k$  aus mehreren Messungen abgeleitet werden, sind die einzelnen Werte  $\Delta E_{i,k}^{(k)}$  zu überprüfen, ob sie der nachstehenden Fehlergrenze  $F_{\Delta E}$  genügen:

$$\left| \Delta E_{i,k}^{(1)} - \Delta E_{i,k}^{(2)} \right| \leq F_{\Delta E} = 3 \cdot \sqrt{m_{\Delta E_{i,k}}^2(1) + m_{\Delta E_{i,k}}^2(2)} \dots (5.9)$$

Wurden die Höhenunterschiede aus Vertikalwinkelmessungen abgeleitet, sind für die mittleren Fehler die nach Gleichung (5.3), (5.4) oder (5.5) berechneten Werte einzusetzen. Wurde einer der Höhenunterschiede  $\Delta E_{i,k}^{(n)}$  aus einer Schrägstrecke ohne Verwendung von Vertikalwinkelmessungen abgeleitet, ist der mit Gleichung (6.22) berechnete Wert zu verwenden.

Tabelle 7 : Mittlerer Fehler eines aus Zenitdistanzen berechneten Höhenunterschiedes nach Gleichung (5.5)

s in km	$m_k = \pm 0,05$						$m_k = \pm 0,15$						$m_k = \pm 0,25$						$m_k = \pm 0,50$					
	in mm für $m_{\beta} =$						in mm für $m_{\beta} =$						in mm für $m_{\beta} =$						in mm für $m_{\beta} =$					
	0 <sup>cc</sup>	10 <sup>cc</sup>	20 <sup>cc</sup>	30 <sup>cc</sup>	40 <sup>cc</sup>	50 <sup>cc</sup>	0 <sup>cc</sup>	10 <sup>cc</sup>	20 <sup>cc</sup>	30 <sup>cc</sup>	40 <sup>cc</sup>	50 <sup>cc</sup>	0 <sup>cc</sup>	10 <sup>cc</sup>	20 <sup>cc</sup>	30 <sup>cc</sup>	40 <sup>cc</sup>	50 <sup>cc</sup>	0 <sup>cc</sup>	10 <sup>cc</sup>	20 <sup>cc</sup>	30 <sup>cc</sup>	40 <sup>cc</sup>	50 <sup>cc</sup>
0,5	16	18	23	29	35	42	16	18	23	29	35	43	17	19	23	29	36	43	19	20	25	30	37	44
1,0	21	27	38	52	66	81	24	29	40	53	67	82	29	33	43	55	69	84	45	47	54	65	77	90
1,5	29	37	55	76	99	121	38	45	61	80	102	124	52	57	70	88	108	129	92	95	104	116	132	150
2,0	38	49	73	102	131	162	58	66	86	111	139	168	86	91	106	127	152	179	161	164	172	186	204	225
2,5	48	62	92	127	164	202	85	93	115	145	178	214	129	135	151	175	204	235	248	252	260	275	294	317
3,0	61	77	112	154	198	243	117	126	150	183	222	259	183	189	206	231	263	298	356	359	368	383	402	427
3,5	74	92	133	181	232	285	155	164	190	226	269	315	247	253	270	297	330	369	483	487	496	511	531	556
4,0	90	110	154	209	267	327	199	209	235	274	320	372	320	326	344	371	407	448	630	633	643	658	679	704
4,5	107	128	177	238	302	369	249	259	286	327	377	432	403	409	427	456	492	536	797	800	809	825	845	872
5,0	126	149	202	267	339	413	305	315	343	385	438	497	496	502	520	549	587	633	983	986	995	1011	1032	1058
5,5	147	171	227	298	376	456	366	376	405	449	503	566	599	605	623	653	692	739	1189	1192	1201	1216	1238	1265
6,0	170	195	254	330	414	501	434	444	473	518	575	640	711	717	735	765	805	853	.	.	.	.	.	.
6,5	195	220	282	363	453	546	507	517	547	592	651	720	834	840	859	889	929	978	.	.	.	.	.	.
7,0	222	248	312	397	493	593	587	597	626	673	733	804	966	973	991	1021	1062	1112	.	.	.	.	.	.
7,5	250	277	344	433	535	640	672	682	712	759	821	893	1108	1115	1133	1163	1204	1255	.	.	.	.	.	.
8,0	281	308	377	470	576	688	763	773	803	851	914	988	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8,5	313	341	412	509	619	737	860	870	900	949	1012	1089	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9,0	348	375	453	552	664	788	963	973	1003	1052	1117	1194	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9,5	384	412	486	590	710	839	1072	1082	1112	1161	1227	1306	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10,0	422	451	526	633	757	892	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Die über 1 m hinausgehenden mittleren Fehler eines Höhenunterschiedes wurden nicht mehr ermittelt.

6 ELLIPSOIDISCHE HÖHENUNTERSCHIEDE AUS GEMESSENEN SCHRÄGSTRECKEN

6,1 Höhenformel

HRADILEK hat bereits im Jahre 1958 in [26] darauf hingewiesen, daß es unter bestimmten Voraussetzungen zweckmäßig sein könnte, für die Höhenunterschiedsberechnung nicht die Vertikalwinkelmessung zu verwenden, sondern allein elektronisch gemessene Schrägstrecken heranzuziehen.

Aus dem Dreieck  $P_i - P_k - P_{k(i)}$  in der Abbildung 2.1 rechnet man nach dem Kosinussatz die Seite  $\bar{s}_{i,k(M)}$  aus. Damit erhält man eine quadratische Gleichung für den ellipsoidischen Höhenunterschied  $\Delta E_{i,k}$ , in der keine Vertikalwinkelmessung enthalten ist. Daraus ergibt sich folgende Gleichung für den Höhenunterschied:

$$\Delta E_{i,k} = -s_{i,k(i)} \cdot \sin \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2} \pm \sqrt{\bar{s}_{i,k(M)}^2 - s_{i,k(i)}^2 \cdot \cos^2 \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}} \quad \dots (6.1)$$

Das positive Vorzeichen vor der Wurzel ist zu verwenden, wenn die Zenitdistanz der Visur kleiner als  $\pi/2$  ist, also bei einem positiven Höhenunterschied, das negative Vorzeichen bei einem negativen Höhenunterschied.

In der Gleichung (6.1) ist also nur der ellipsoidische Zenitwinkel  $\gamma_{i,k(E)}$  enthalten, die gemessene Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k(M)}$  und eine horizontale Strecke  $s_{i,k(i)}$  im Niveau des Punktes  $P_i$ , die allerdings unabhängig von der gemessenen Strecke  $\bar{s}_{i,k(M)}$  zu ermitteln ist, am zweckmäßigsten kontrolliert aus wenigstens zwei Dreiecken mit direkt gemessenen Schrägstrecken von sehr geringem Neigungswinkel.

Die Anwendung der Gleichung (6.1) auf Visuren mit geringem Neigungswinkel ist nicht sinnvoll, da hierbei gegenüber der Höhenformel mit Verwendung der Vertikalwinkelmessungen ein Genauigkeitsverlust zu erwarten ist, wie im Abschnitt 6,3 gezeigt wird.

Wird hingegen die Gleichung (6.1) bei Steilvisuren angewendet, erreicht man damit vor allem, daß bei der Berechnung der ellipsoidischen Höhenunterschiede die Auswirkung der Unsicherheit im Refraktionskoeffizienten vollständig ausgeschaltet ist. Sie ist zwar noch in der Reduktion der Strecken in den Dreiecken der Bodenfigur enthalten, doch wird von diesen Strecken verlangt, daß sie nahezu horizontal sein sollen, damit sich die Refraktionsunsicherheit praktisch nicht auswirken kann. Sind keine Lotabweichungen gegeben, ist die dadurch bedingte Vernachlässigung insofern geringer, als der Lotabweichungsfehler nur im Rahmen der Dreiecksauflösungen in den errechneten Strecken enthalten ist.

6,2

Vorschlag für eine kontrollierte Messungsanordnung im Gelände

Will man unabhängig von Vertikalwinkelmessungen ellipsoidische Höhenunterschiede allein aus gemessenen Schrägstrecken ableiten, erscheint es als zweckmäßig, nach Möglichkeit die in Abbildung 6.1 dargestellte kontrollierte Messungsanordnung zu verwenden. Für diesen Fall wäre z. B. der ellipsoidische Höhenunterschied von  $P_1$  nach  $P_0$  gesucht, außerdem wäre die gemessene Schrägstrecke  $\bar{s}_{1,0(M)}$  zu horizontieren. Dazu wäre anzustreben, alle fünf in Abbildung 6.1 eingezeichneten Strecken zu messen, also  $\bar{s}_{1,0(M)}$ ,  $\bar{s}_{2,0(M)}$ ,  $\bar{s}_{3,0(M)}$ ,  $\bar{s}_{1,2(M)}$  und  $\bar{s}_{1,3(M)}$ . Für die Auflösung der Dreiecke  $P'_0-P'_1-P'_2$  und  $P'_0-P'_3-P'_1$  soll in allen vier Geländepunkten,  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$ , die Messung der Richtungen nach den übrigen Punkten durchgeführt werden. Die Messung der gegenseitigen Vertikalwinkel wäre an sich nur für die Horizontierung der Strecken  $\bar{s}_{1,2(M)}$  und  $\bar{s}_{1,3(M)}$  notwendig, wenn nicht die ellipsoidischen Höhen aller drei Ausgangspunkte,  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  vorgegeben sind.

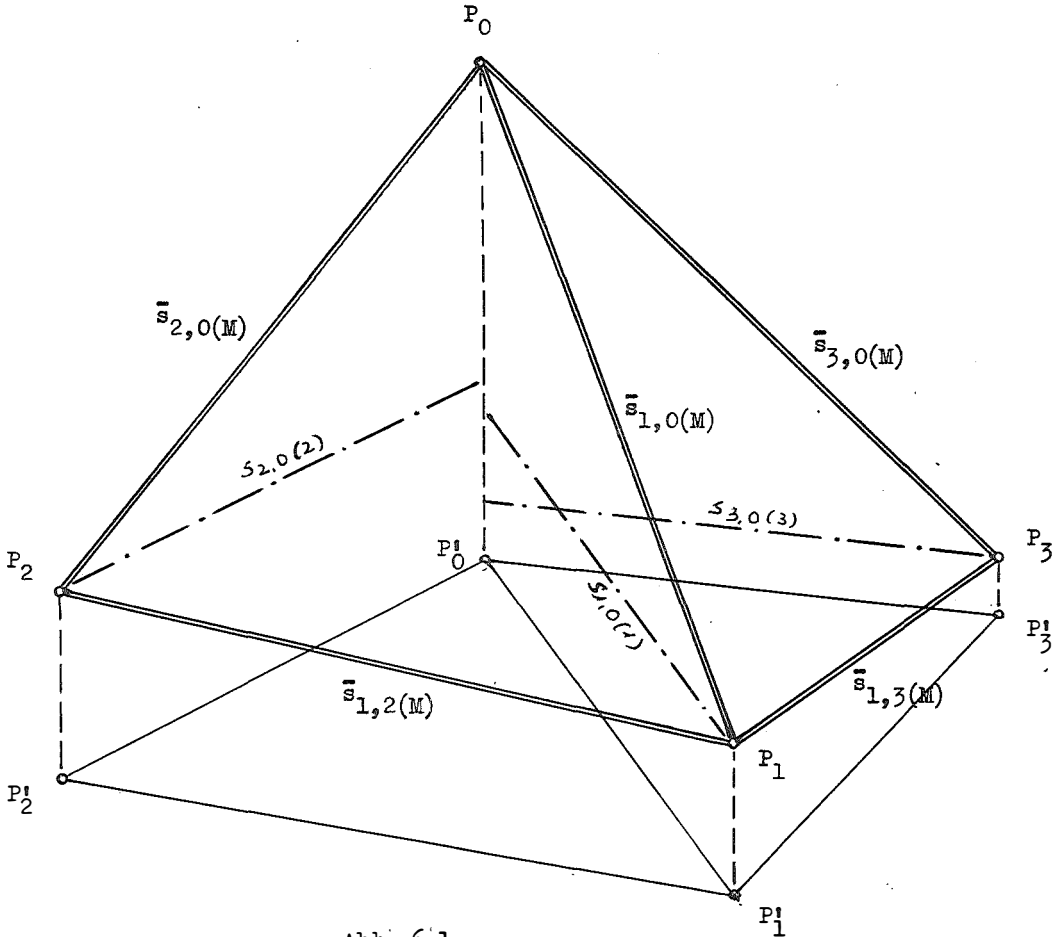


Abb. 6.1

Es ist aber empfehlenswert, alle Vertikalwinkel zu messen, auch die zwischen den Talpunkten und dem Bergpunkt  $P_0$  und die zugehörigen Rückvisuren. Obwohl sie nicht benötigt werden für die eigentliche Höhenunterschiedsberechnung, können mit ihrer Hilfe auch die Strecken nach  $P_0$  für die Berechnung vorläufiger Koordinaten genähert horizontaliert werden.

Zusätzlich sind auf allen vier Geländepunkten astronomische Beobachtungen durchzuführen, aus denen die Lotabweichungskomponenten  $\xi_i$  und  $\eta_i$  abzuleiten sind. Dafür werden eben wenigstens vorläufige Koordinaten der vier Geländepunkte benötigt. Die Lotabweichungen dienen in diesem Fall dazu, die gemessenen Richtungen auf das Ellipsoid reduzieren zu können.

Durch Dreiecksauflösungen und entsprechende Reduktion sind die horizontalen Strecken  $s_{2,0(3)}$ ,  $s_{1,0(1)}$  aus dem Dreieck  $P_0^i - P_1^i - P_2^i$  und ein zweites mal aus dem Dreieck  $P_0^i - P_2^i - P_1^i$  und  $s_{3,0(3)}$  zu berechnen. Mit diesen vier horizontalen Strecken und den drei gemessenen Schrägstrecken  $\bar{s}_{1,0(M)}$ ,  $\bar{s}_{2,0(M)}$  und  $\bar{s}_{3,0(M)}$  kann mit Hilfe der Gleichung (6.1) viermal die ellipsoidische Höhe des Punktes  $P_0$  abgeleitet werden. Für das Gewichtsmittel der  $E_0^{(n)}$  wäre folgendes Gewicht zu verwenden:

$$P_{E_0}^{(n)} = \frac{1}{m \Delta E_{i,0}} \quad \dots (6.2)$$

Mit der so errechneten gemittelten Höhe  $E_0$  des Punktes  $P_0$  können unter Anwendung der Gleichung (4.7) oder (4.9) die gemessenen Schrägstrecken  $\bar{s}_{1,0(M)}$ ,  $\bar{s}_{2,0(M)}$  und  $\bar{s}_{3,0(M)}$  richtig horizontaliert werden, frei von den unbekanntem Refraktionseinflüssen.

Es sei ausdrücklich darauf nochmals hingewiesen, daß diese Methode nur dann günstige Ergebnisse liefert, wenn sie auf Steilvisuren mit einer Neigung gegen die Horizontale ab etwa  $20^\circ$  angewendet wird, wie im Abschnitt 6,3 gezeigt wird.

Ist in einem Ausnahmefall nur eines der beiden in Abbildung 6.1 dargestellten Dreiecke möglich und konnte z. B. zusätzlich zu der nahezu horizontalen Talstrecke  $\bar{s}_{1,2(M)}$  nur für die Steilvisur von  $P_1$  nach  $P_0$  die Strecke gemessen werden, kann nach dieser Methode die Höhe des Punktes  $P_0$  nur einmal berechnet werden. In diesem Fall wäre die Anwendung der Gleichung (4.7) oder (4.9) für die Horizontalisierung der Schrägstrecke  $\bar{s}_{1,0}$  nur mehr eine reine Rechenkontrolle, da die daraus resultierende horizontale Strecke mit der aus der Dreiecksauflösung abgeleiteten Strecke  $s_{1,0}$ , reduziert auf das mittlere Niveau der Punkte  $P_0$  und  $P_1$ , identisch sein muß.

Nun ist noch zu untersuchen, wie groß die Neigung der im Tal gemessenen Strecken sein darf, um sie als praktisch von der Refraktion unbeeinflusst bezeichnen zu können. Dazu wird die Gleichung (4.4) differenziert:

$$ds_{i,k(E_M)} = d\bar{s}_{i,k(M)} \cdot \sin\left[\varphi_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}\right] + \bar{s}_{i,k(M)} \cdot \cos\left[\varphi_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}\right] \cdot d\varphi_{i,k} \quad \dots (6.3)$$

Da voraussetzungsgemäß die Visur nahezu horizontal sein soll, kann man genähert  $\sin\left[\varphi_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}\right] \approx 1$  setzen. Außerdem wird Gleichung (5.1) eingeführt:

$$ds_{i,k(E_M)} \approx d\bar{s}_{i,k(M)} + \Delta E_{i,k} \cdot d\varphi_{i,k} \quad \dots (6.4)$$

$d\varphi_{i,k}$  erhält man durch Differenzieren der Gleichung (2.27):

$$d\varphi_{i,k} = dz_{i,k} + d\delta_{i,k} + d\varepsilon_{i,k} \quad \dots (6.5)$$

Der durch die Refraktion bedingte Fehlereinfluß auf die horizontierte Strecke ist somit gegeben durch

$$ds(\delta) = \Delta E_{i,k} \cdot d\delta_{i,k} \quad \dots (6.6)$$

Nimmt man für den Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  die Gleichung (8.13), erhält man  $d\delta_{i,k}$  aus

$$d\delta_{i,k} = \frac{\bar{s}_{i,k(M)} \cdot dk_i + d\bar{s}_{i,k(M)} \cdot k_i}{2 \cdot R_i(E)} \quad \dots (6.7)$$

Hierin kann man das zweite Glied vernachlässigen. Damit wird Gleichung (6.6) zu

$$ds(\delta) = \Delta E_{i,k} \cdot \frac{\bar{s}_{i,k(M)}}{2 \cdot R_i(E)} \cdot dk_i \quad \dots (6.8)$$

Daraus kann für bestimmte Voraussetzungen der zulässige Höhenunterschied berechnet werden. In der Tabelle 8 ist für einen Streckenfehler  $ds(\delta) = 0,001$  m und für die beiden angenommenen Refraktionsfehler  $dk_1 = 0,15$  und  $dk_2 = 0,25$  für verschiedene Streckenlängen der zulässige Höhenunterschied zusammengestellt:

$\bar{s}(M)$ in km	$\Delta E$ (zul.) in m für $dk =$		$\bar{s}(M)$ in km	$\Delta E$ (zul.) in m für $dk =$	
	0,15	0,25		0,15	0,25
1,0	85,06	51,04	6,0	14,18	8,51
2,0	42,53	25,52	7,0	12,15	7,29
3,0	28,35	17,01	8,0	10,63	6,38
4,0	21,26	12,76	9,0	9,45	5,67
5,0	17,01	10,21	10,0	8,51	5,10

Tabelle 8



6,3 Mittlerer Fehler eines aus Schrägstrecken abgeleiteten Höhenunterschiedes

Um den mittleren Fehler eines aus Schrägstrecken abgeleiteten Höhenunterschiedes zu erhalten, wird vorerst Gleichung (6.1) differenziert. Hierbei wird Gleichung (4.8) berücksichtigt und der Wurzelausdruck im Nenner genähert gleich dem Höhenunterschied gesetzt:

$$d(\Delta E) = - \sin \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2} \cdot ds_{i,k(i)} - \frac{1}{\Delta E_{i,k}} \cdot [\bar{s}_{i,k(M)} \cdot d\bar{s}_{i,k(M)} - s_{i,k(i)} \cdot ds_{i,k(i)}] \dots (6.9)$$

Das erste Glied von Gleichung (6.9) ist klein von zweiter Ordnung und kann daher vernachlässigt werden. Für das letzte Glied muß erst der Fehler  $ds_{i,k(i)}$  der horizontalen Strecke aus der Dreiecksauflösung abgeleitet werden, wobei auch die Auswirkung der Lotabweichungen zu berücksichtigen ist.

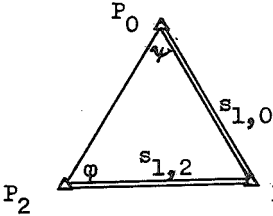


Abb. 6.2

Aus dem Dreieck  $P_0-P_1-P_2$  (Abb. 6.2) erhält man nach dem Sinussatz die Seite  $s_{1,0}$ :

$$s_{1,0} = s_{1,2} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \dots (6.10)$$

Diese Gleichung wird differenziert und etwas umgeformt:

$$ds_{1,0} = s_{1,0} \cdot \left( \frac{ds_{1,2}}{s_{1,2}} + \cot \varphi \cdot d\varphi - \cot \psi \cdot d\psi \right) \dots (6.11)$$

Beim Übergang auf mittlere Fehler erhält man

$$m_{s_{1,0}(1)}^2 = s_{1,0}^2 \cdot \left( \frac{m_{s_{1,2}}^2}{s_{1,2}^2} + \cot^2 \varphi \cdot m_{\varphi}^2 + \cot^2 \psi \cdot m_{\psi}^2 \right) \dots (6.12)$$

Es soll nun die auf dem Geländepunkt  $P_i$  gemessene Richtung  $R_{i,k}^!$  nach dem Punkt  $P_k$  bezüglich der im Azimut  $A_i$  vorhandenen Lotabweichung  $\vartheta_i^!$  so korrigiert werden, daß die auf das Ellipsoid bezogene Richtung  $R_{i,k}$  entsteht. Diese Korrektur kann analog der Auswirkung eines Stehachsenfehlers dargestellt werden durch:

$$R_{i,k} - R_{i,k}^! = \vartheta_i^! \cdot \cot z_{i,k} \cdot \sin (\alpha_{i,k} - A_i) \dots (6.13)$$

Löst man dies auf und führt man die Lotabweichungskomponenten  $\xi_i$  und  $\eta_i$  ein, erhält man

$$R_{i,k} - R_{i,k}^! = -\xi_i \cdot \cot z_{i,k} \cdot \sin \alpha_{i,k} + \eta_i \cdot \cot z_{i,k} \cdot \cos \alpha_{i,k} \dots (6.14)$$

Nun sollen die Dreieckswinkel  $\varphi$  und  $\psi$  in (6.11) und (6.12) als Differenz zweier gemessener Richtungen, verbessert um die Lotabweichungen, dargestellt werden:

$$\varphi = R_{2,1} - R_{2,0} = R_{2,1}' - \xi_2 \cdot \cot z_{2,1} \cdot \sin \alpha_{2,1} + \eta_2 \cdot \cot z_{2,1} \cdot \cos \alpha_{2,1} - R_{2,0}' + \xi_2 \cdot \cot z_{2,0} \cdot \sin \alpha_{2,0} - \eta_2 \cdot \cot z_{2,0} \cdot \cos \alpha_{2,0} \dots (6.15)$$

Nun setzt man:

$$R_{2,1}' - R_{2,0}' = \varphi' \dots (6.16)$$

$$\varphi = \varphi' - \xi_2 \cdot (\cot z_{2,1} \cdot \sin \alpha_{2,1} - \cot z_{2,0} \cdot \sin \alpha_{2,0}) + \eta_2 \cdot (\cot z_{2,1} \cdot \cos \alpha_{2,1} - \cot z_{2,0} \cdot \cos \alpha_{2,0}) \dots (6.17)$$

Diese Gleichung wird differenziert, dann wird der Übergang auf mittlere Fehler durchgeführt:

$$m_\varphi^2 = m_{\varphi'}^2 + m_{\xi_2}^2 \cdot (\cot z_{2,1} \cdot \sin \alpha_{2,1} - \cot z_{2,0} \cdot \sin \alpha_{2,0})^2 + m_{\eta_2}^2 \cdot (\cot z_{2,1} \cdot \cos \alpha_{2,1} - \cot z_{2,0} \cdot \cos \alpha_{2,0})^2 \dots (6.18)$$

Man setzt nun

$$m_{\xi_2}^2 = m_{\eta_2}^2 = m_\varphi^2 \dots (6.19) \quad \text{und} \quad m_{\varphi'}^2 = m_{\psi'}^2 = 2 \cdot m_R^2 \dots (6.20)$$

Damit wird Gleichung (6.18) nach einer Umformung zu

$$m_\varphi^2 = 2 \cdot m_R^2 + m_\varphi^2 \cdot (\cot^2 z_{2,1} + \cot^2 z_{2,0} - 2 \cdot \cot z_{2,1} \cdot \cot z_{2,0} \cdot \cos \varphi) \dots (6.21)$$

Eine analoge Gleichung erhält man auch für  $m_\psi^2$ . Dies wird nun in Gleichung (6.12) eingesetzt. Für Gleichung (6.9) wird der Übergang auf mittlere Fehler durchgeführt, die umgeformte Gleichung (6.12) wird eingesetzt, wodurch man schließlich folgende Gleichung erhält:

$$m_{\Delta E}^2 = \frac{m_s^2}{\Delta E_{1,0}^2} \cdot [\bar{s}_{1,0(M)}^2 + \frac{s_{1,0(1)}^4}{s_{1,2(1)}^2}] + \frac{2 \cdot s_{1,0(1)}^4}{\Delta E_{1,0}^2} \cdot (\cot^2 \varphi + \cot^2 \psi) \cdot m_R^2 + \frac{s_{1,0(1)}^4}{\Delta E_{1,0}^2} \cdot [\cot^2 \varphi \cdot (\cot^2 z_{2,1} + \cot^2 z_{2,0} - 2 \cdot \cot z_{2,1} \cdot \cot z_{2,0} \cdot \cos \varphi) + \cot^2 \psi \cdot (\cot^2 z_{0,2} + \cot^2 z_{0,1} - 2 \cdot \cot z_{0,2} \cdot \cot z_{0,1} \cdot \cos \psi)] \cdot m_\varphi^2 \dots (6.22)$$

Mit dieser allgemeinen Gleichung kann für jeden einzelnen Fall der mittlere Fehler eines aus gemessenen Schrägstrecken abgeleiteten Höhenunterschiedes berechnet werden.

Um einen Genauigkeitsvergleich mit den in Tabelle 7 enthaltenen mittleren Fehlern von aus Zenitdistanzen abgeleiteten Höhenunterschieden durchführen zu können, wurde die Gleichung (6.22) etwas vereinfacht. Das Dreieck  $P_0-P_1-P_2$  wurde dazu als gleichseitig angenommen. Außerdem wurde gesetzt:

$$z_{2,1} = 100^{\text{G}} ; \quad z_{0,1} = z_{0,2} \quad \text{und} \quad z_{2,0} \stackrel{\text{!}}{=} \tilde{h} - z_{0,2} \cdot$$

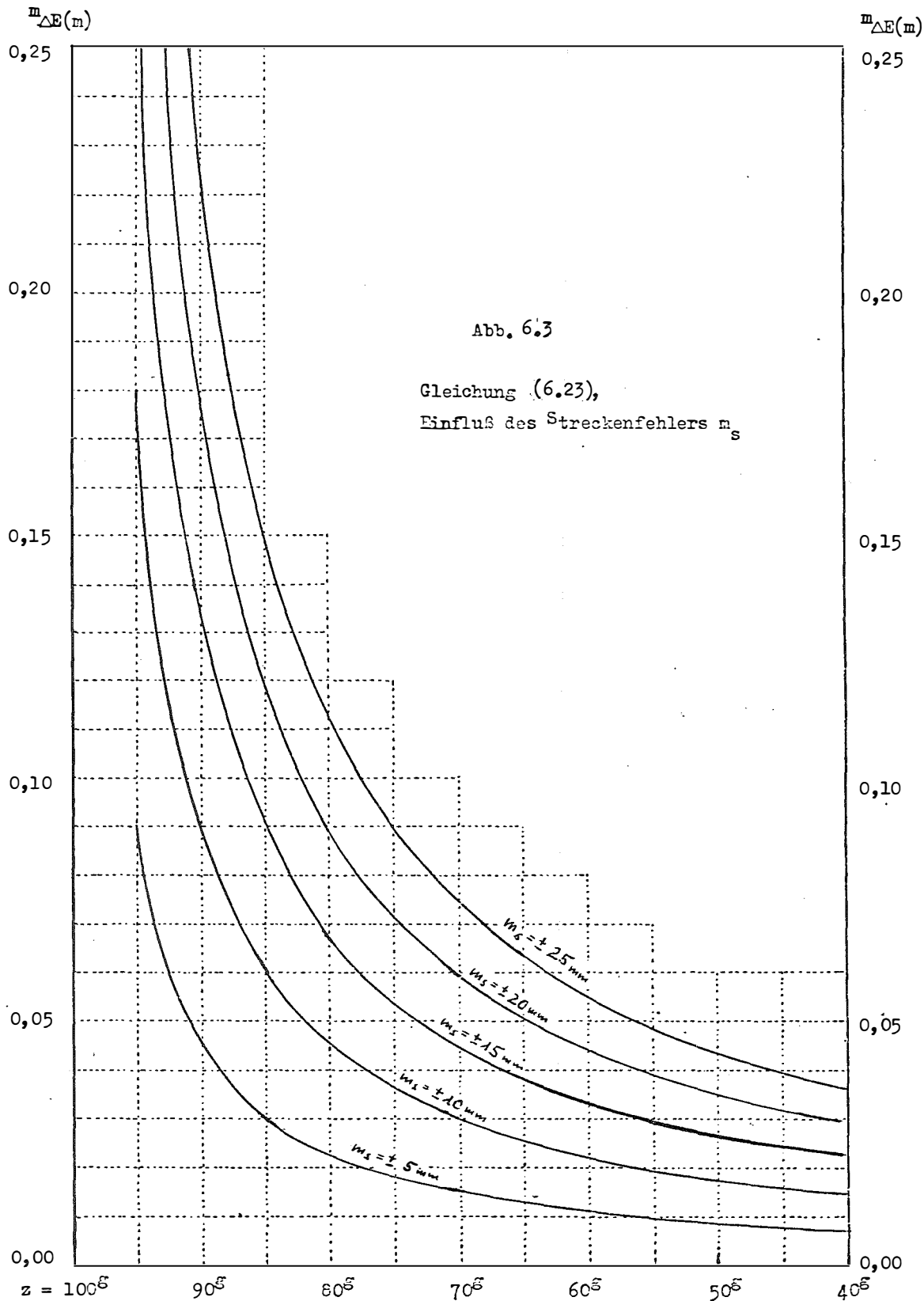
Durch diese Annahmen erhält man nach einigen Umformungen die folgende Näherungsgleichung:

$$m_{\Delta E}^2 = \frac{1 + \sin^2 z_{i,k}}{1 - \sin^2 z_{i,k}} \cdot m_s^2 + \frac{4}{3} \cdot s_{i,k(i)}^2 \cdot \tan^2 z_{i,k} \cdot m_R^2 + 0,6 \cdot s_{i,k(i)}^s \cdot m_{\varphi}^2 \dots \dots (6.23)$$

In den nachfolgenden Abbildungen 6.3 bis 6.9 ist die Auswertung der Gleichung (6.23) unter verschiedenen Annahmen dargestellt.

Aus den Abbildungen 6.3, 6.4 und 6.5 sind die Bedingungen ersichtlich, unter denen mit der Gleichung (6.1) brauchbare Höhenunterschiede erhalten werden können. Man erkennt daraus, daß es wenig sinnvoll ist, die Gleichung (6.1) bei Visurneigungen von weniger als  $\pm 20^{\text{G}}$  anzuwenden. Man sieht aber auch, daß es außerordentlich wichtig ist, den mittleren Richtungsfehler möglichst klein zu halten, da gerade dieser einen sehr großen Einfluß auf den Gesamtfehler hat. Wie Abb. 6.4 zeigt, wäre wenigstens ein mittlerer Richtungsfehler von  $m_R = \pm 5^{\text{CC}}$  anzustreben. Die Abb. 6.5 macht deutlich, daß die Lotabweichung wenigstens eine Genauigkeit von  $m_{\varphi} = \pm 10^{\text{CC}}$  haben soll. Wenn auch der mittlere Streckenfehler  $m_s$  bei Steilvisuren von mehr als  $20^{\text{G}}$  Neigung einen relativ nicht mehr so bedeutenden Einfluß hat, sollte doch getrachtet werden, die elektronisch gemessenen Schrägstrecken mit einem mittleren Fehler von  $m_s = \pm 10 \text{ mm}$  zu erhalten.

In den Abbildungen 6.6 bis 6.9 ist die Auswertung der Gleichung (6.23) für ein  $m_R = \pm 5^{\text{CC}}$ , ein  $m_{\varphi} = \pm 10^{\text{CC}}$  und für verschiedene Werte von  $m_s$  dargestellt. Zum Vergleich ist auch der mittlere Fehler eines aus Zenitdistanzen abgeleiteten Höhenunterschiedes für ein  $m_k = \pm 0,05$  und ein  $m_k = \pm 0,15$  eingezeichnet. Hier ist besonders deutlich sichtbar, daß für Zenitdistanzen von weniger als  $80^{\text{G}}$  bzw. mehr als  $120^{\text{G}}$  die Höhenunterschiedsberechnung nach Gleichung (6.1) genauer ist als nach Gleichung (5.1).



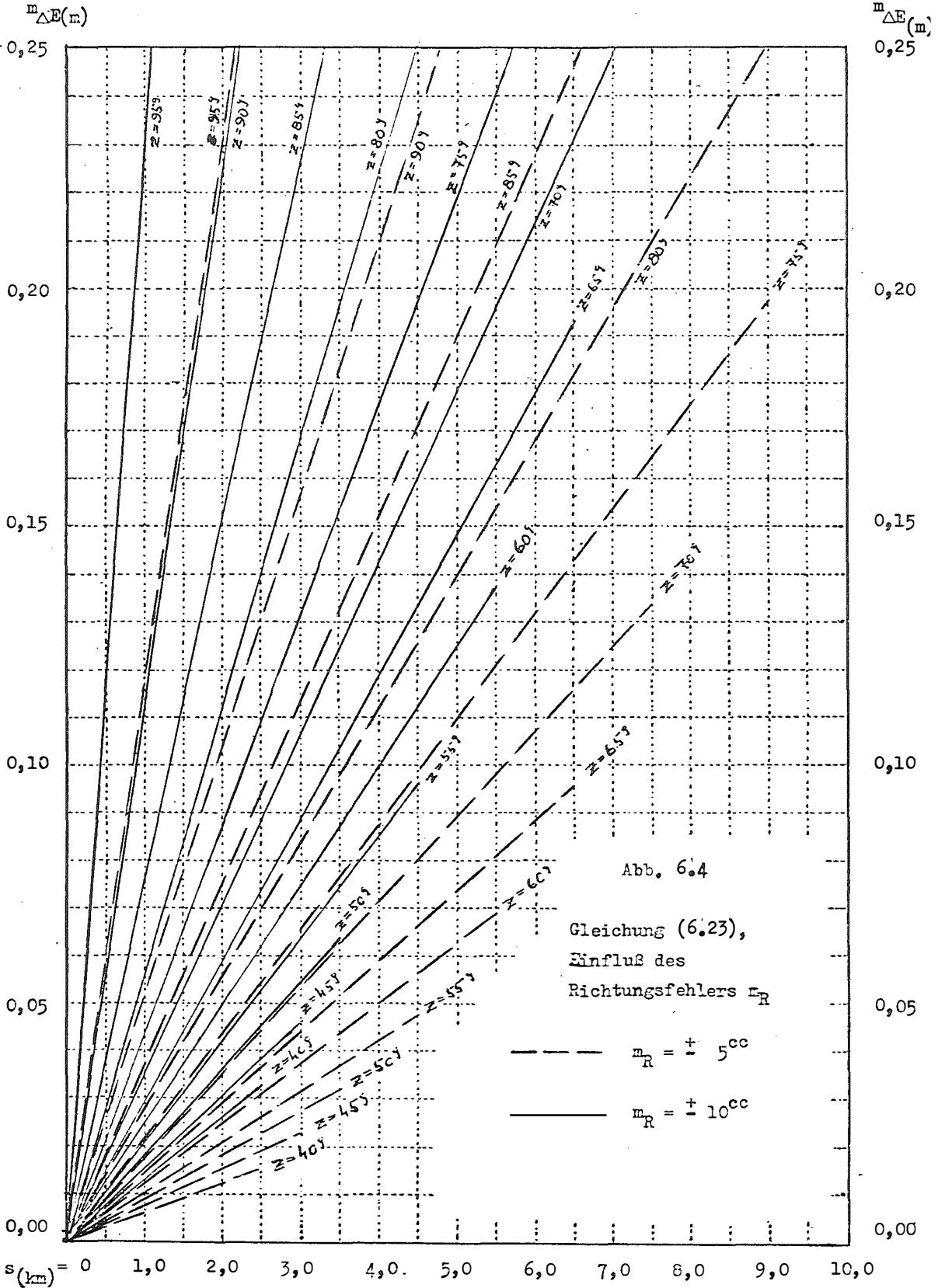


Abb. 6.4

Gleichung (6.23),  
Einfluß des  
Richtungsfehlers  $\epsilon_R$

---  $\epsilon_R = + 5^{\circ}$

—  $\epsilon_R = + 10^{\circ}$

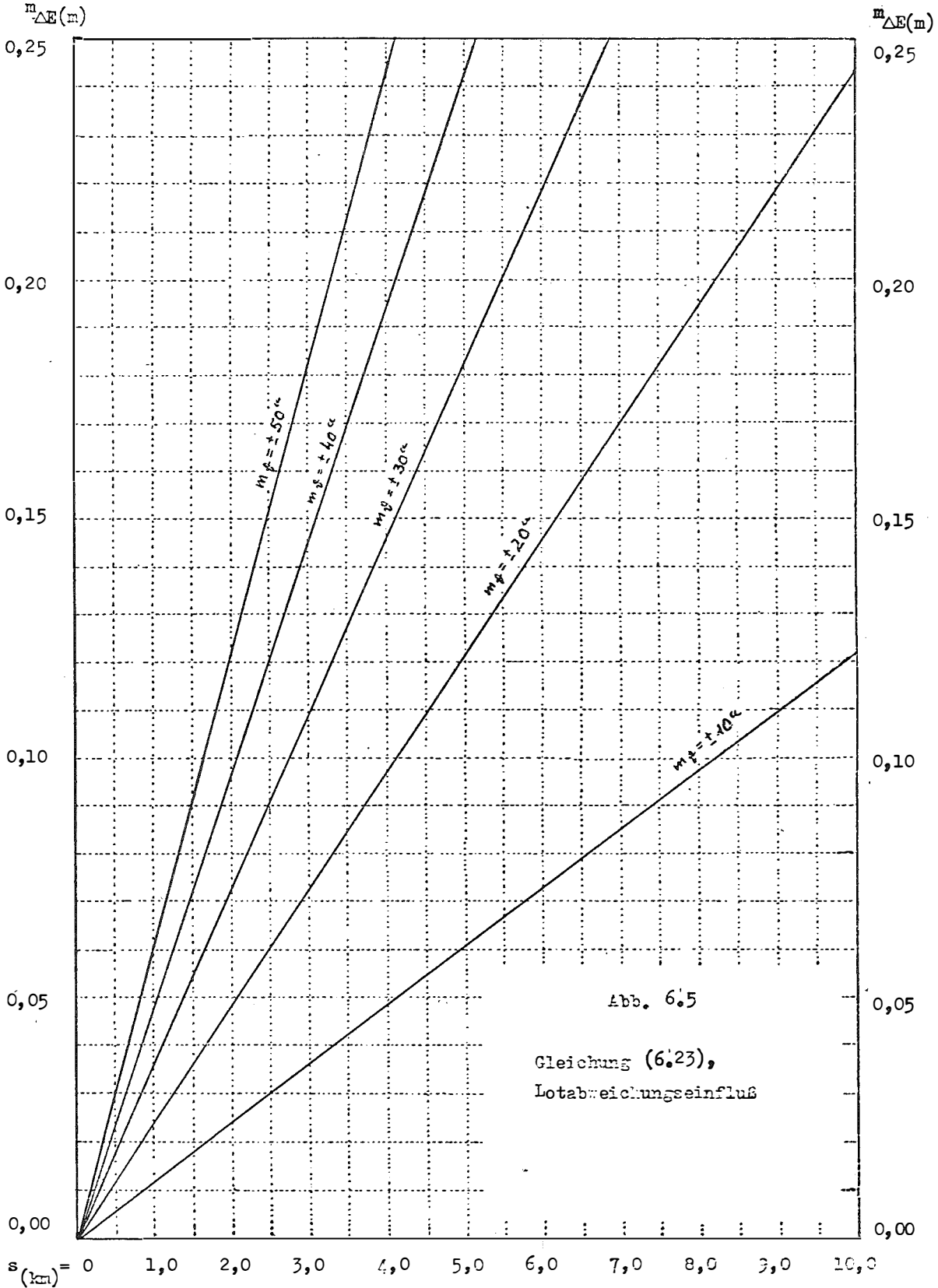


Abb. 6.5

Gleichung (6.23),  
Lotabweichungseinfluß

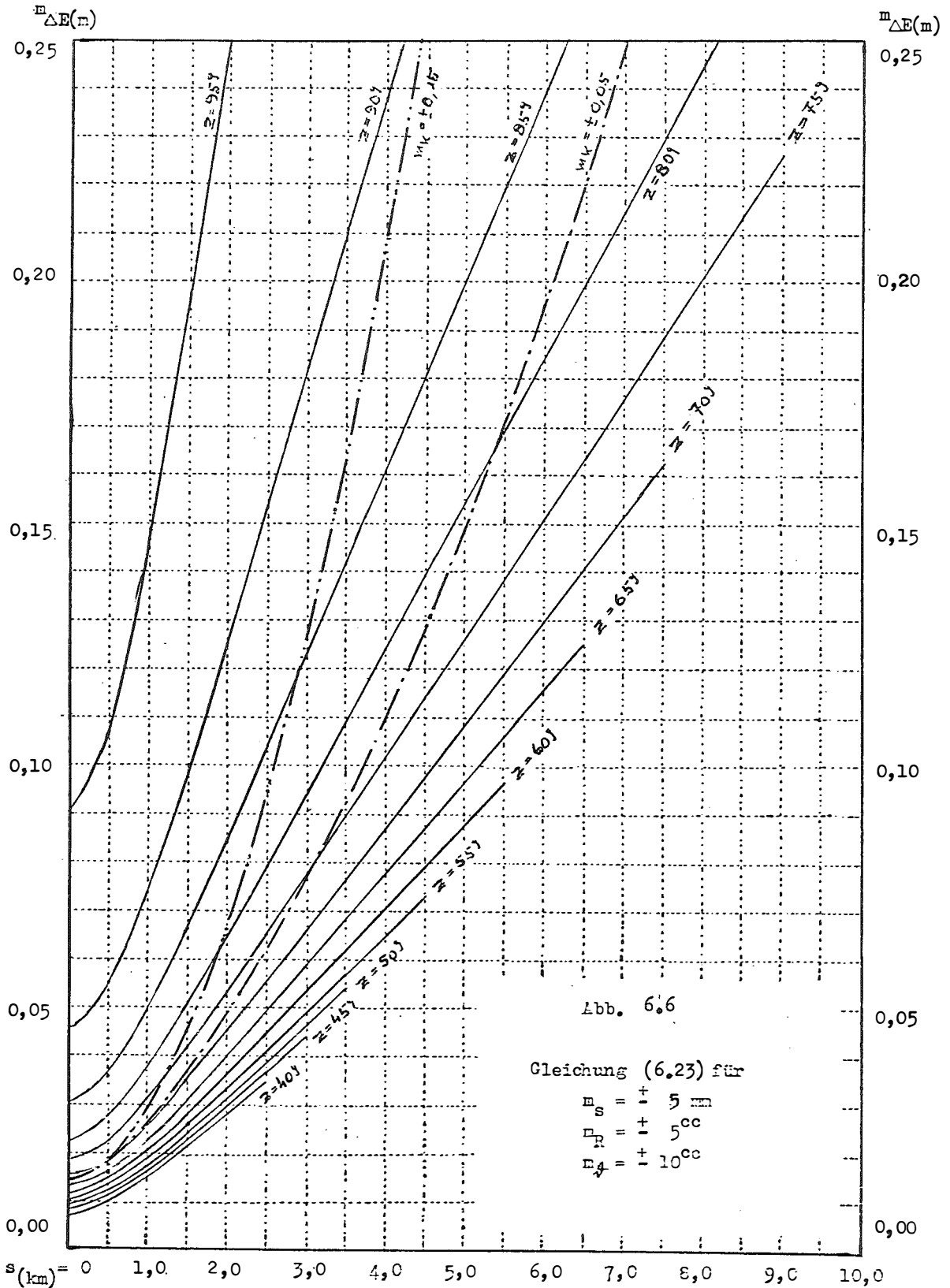


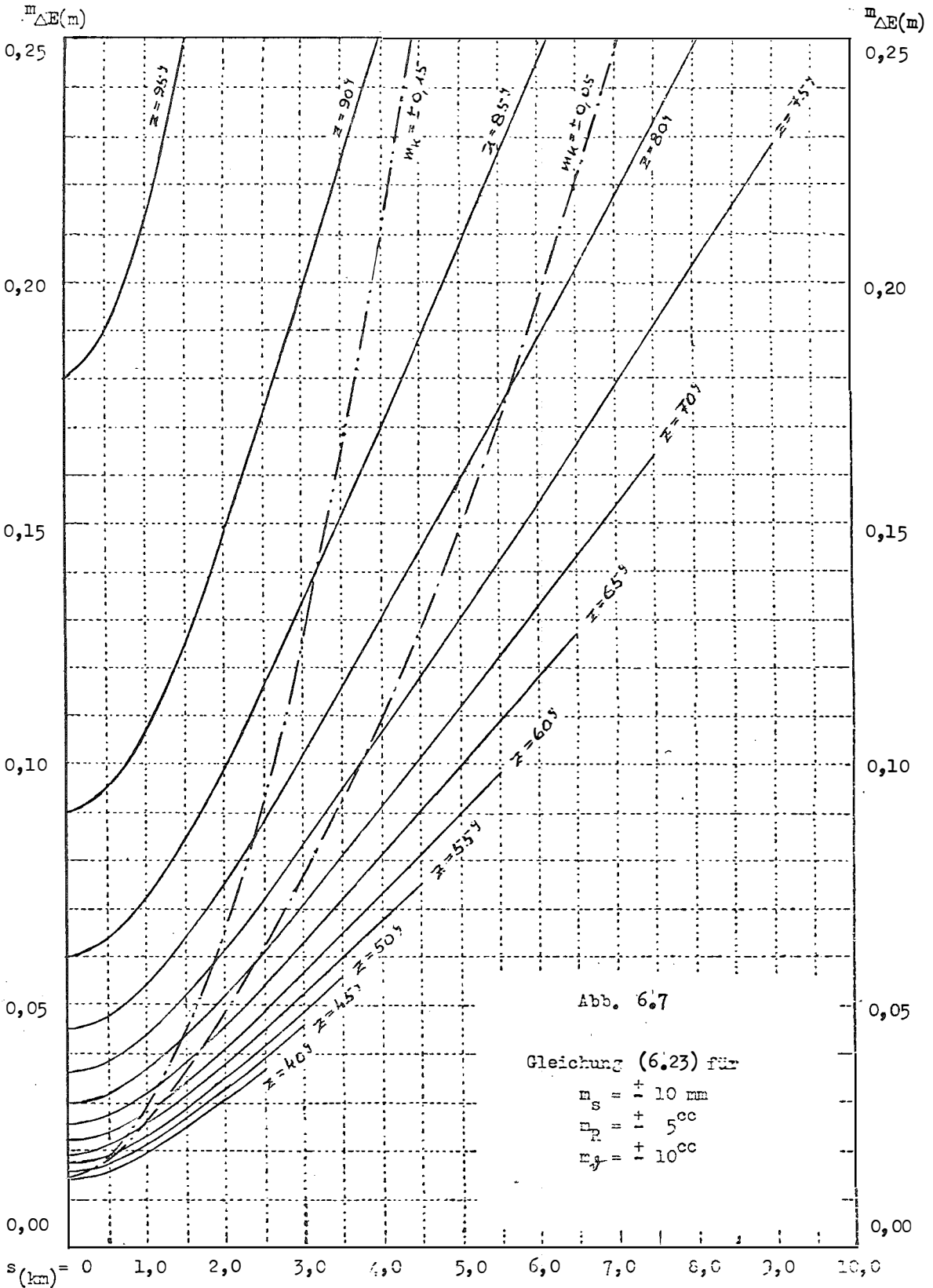
Abb. 6.6

Gleichung (6.23) für

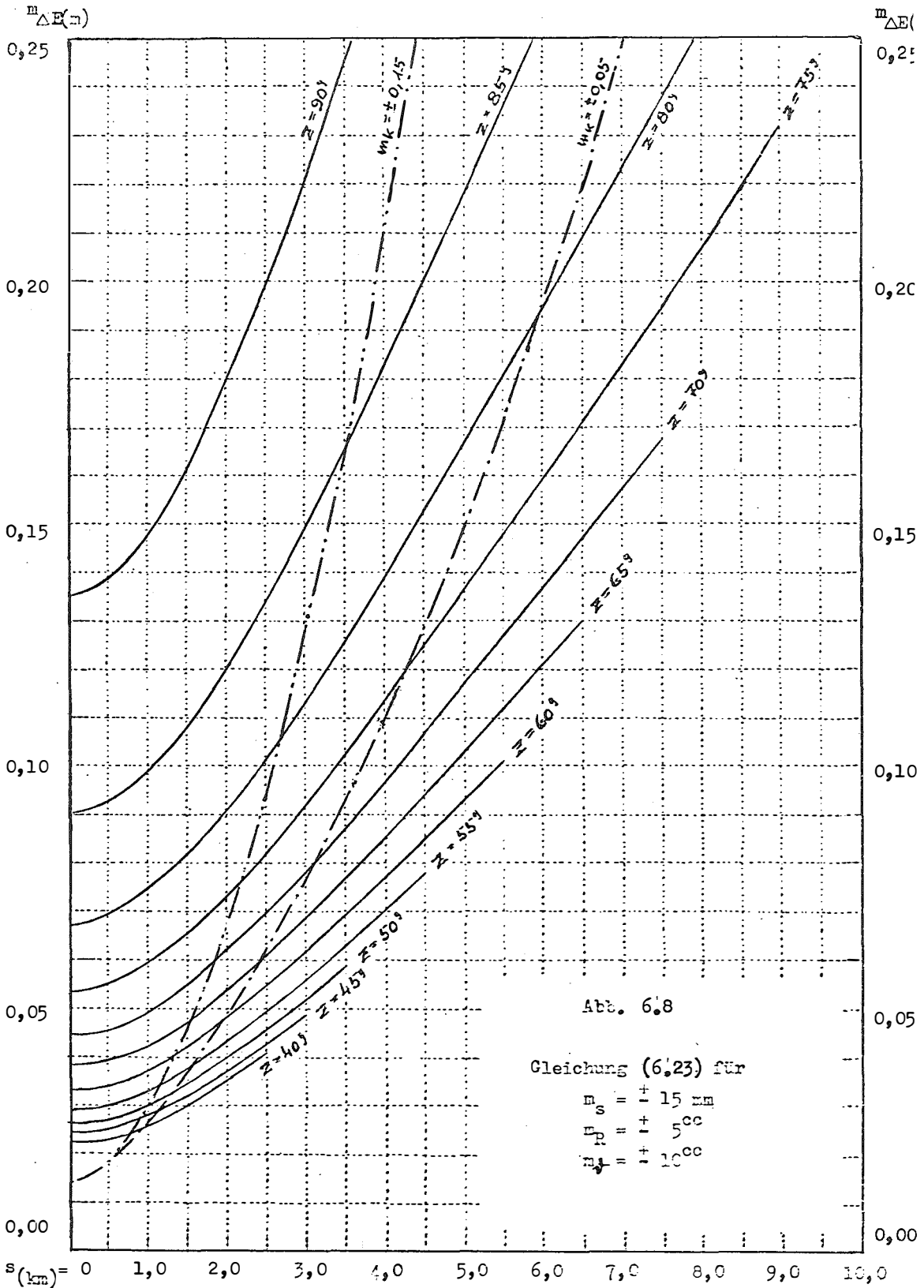
$m_s = + 5 \text{ mm}$

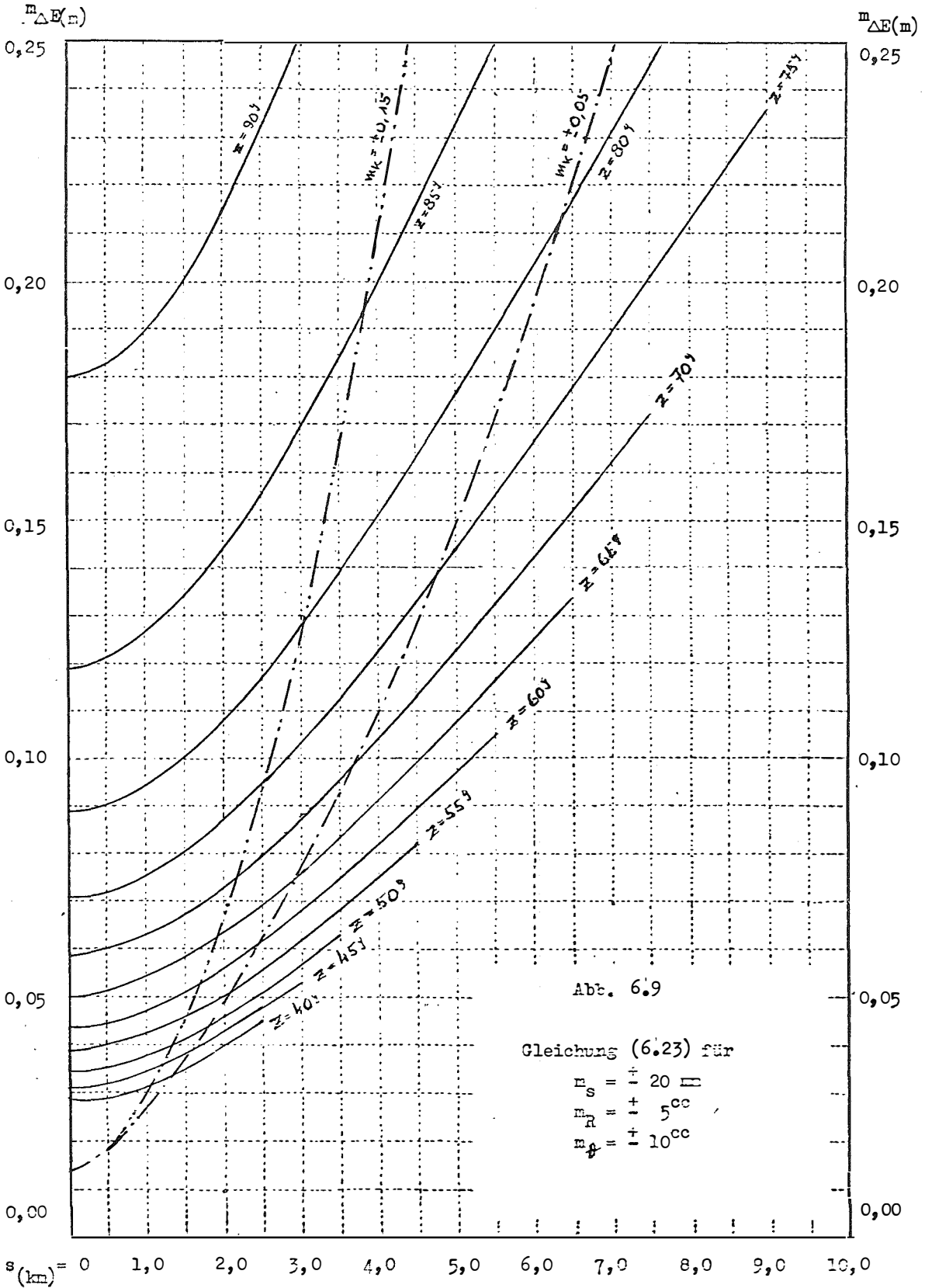
$m_p = + 5 \text{ cc}$

$m_d = + 10 \text{ cc}$









6,4 Beispiele

Diese Art der Höhenbestimmung, wie sie im Abschnitt 6,1 und 6,2 behandelt worden ist, war bis zum Außendienst 1976 noch in keinem österreichischen Triangulierungsoperat enthalten. Es wurden daher aus den früheren Triangulierungsoperaten ähnlich gelagerte Beispiele herausgesucht, die eine Gegenüberstellung der aus Vertikalwinkelmessungen abgeleiteten Höhenunterschiede mit den aus den gemessenen Schrägstrecken errechneten Höhenunterschieden ermöglichen. In diesen Beispielen haben sich zum Teil beträchtliche Differenzen gezeigt.

Beispiel 1: Operat T-256/1973, Visur Steinberg - Müllegger.

Die horizontale Strecke, Länge rund 861 m, konnte aus drei Dreiecken abgeleitet werden, maximale Differenz 20 mm zwischen den drei Werten. Die aus der gemessenen Schrägstrecke nach Gleichung (4.4) errechnete Horizontalstrecke ist um 24 mm größer als der Mittelwert aus der Dreiecksauflösung. Da bei der Dreiecksauflösung keine Lotabweichungen berücksichtigt werden konnten, kann der aus Gleichung (6.1) abgeleitete Höhenunterschied nur genähert als ellipsoidisch bezeichnet werden. Er ist bei einer Visurneigung von rund  $23^{\text{S}}50^{\text{C}}$  und rund 333 m Höhenunterschied um 48 mm größer als der als genähert geoidisch zu bezeichnende Mittelwert der Berechnung aus den gegenseitigen Vertikalwinkeln. Die Differenz zwischen den Höhenunterschieden aus Hin- und Rückmessung betrug 1 cm. Nimmt man nun den Refraktionskoeffizienten mit 0,13 an und errechnet man damit die zugehörigen Refraktionswinkel, ermittelt man andererseits aus Gleichung (5.1), in die der nach (6.1) berechnete Höhenunterschied eingesetzt wird, die ellipsoidische Zenitdistanz, kann man gegenüber den gemessenen Zenitdistanzen Differenzwinkel errechnen. Diese Differenzwinkel sind nun für die Visur vom Tal hinauf  $-40^{\text{CC}}$  und zurück  $+45^{\text{CC}}$ . Man kann nun zwar annehmen, daß ein relativ großer Anteil in diesen Differenzwinkeln der Lotabweichung zuzuschreiben ist, es sind aber außerdem auch noch andere Einflüsse enthalten, wie die Fehler der gemessenen Schrägstrecke, die Fehler der aus Dreiecken abgeleiteten horizontalen Strecken, vor allem aus der Nichtberücksichtigung der Lotabweichungen, die Beobachtungsfehler bei den Vertikalwinkeln, die Refraktionsanomalien, Stehachsenfehler, Fehler beim Einspielenlassen der Versicherungslibelle usw., so daß man nicht einfach erklären darf, der Gesamtbetrag dieser Differenzwinkel ist nur der Lotabweichung zuzuschreiben.

Beispiel 2: Operat T-256/1973, Visur Hinterberg - Tristenkopf.

Die horizontale Seite konnte nur aus einem Dreieck abgeleitet werden. Sie war bei einer Länge von 2440 m um 33 mm kleiner als die nach Gleichung (4.4) errechnete Horizontalstrecke. Der Höhenunterschied von rund 387 m war bei einer Visurneigung von rund  $10^{\text{S}}02^{\text{C}}$  nach Gleichung (6.1) um 179 mm

größer als der Mittelwert der Berechnung aus den gegenseitigen Vertikalwinkeln, wobei zwischen Hin- und Rückmessung eine Differenz von 9 cm auftrat. Die zurückgerechneten Differenzwinkel betragen für die Visur vom Tal hinauf  $- 61^{\text{cc}}$  und zurück  $+ 47^{\text{cc}}$ . Dieses Beispiel ist allerdings mit Vorsicht zu betrachten, da zufolge der relativ geringen Visurneigung aus der Abbildung 6.7 für den nach Gleichung (6.1) berechneten Höhenunterschied ein mittlerer Fehler von rund 17 cm zu erwarten ist, während der Höhenunterschied aus der Vertikalwinkelmessung nur einen mittleren Fehler von 9 cm erwarten läßt.

Beispiel 3: Operat T-250/1972, Visur Karbach - Kleine Mittagsspitze.

Horizontale Seite von rund 1603 m Länge, nur aus einem Dreieck, um 16 mm kleiner als aus Reduktion der Schrägstrecke. Höhenunterschied von rund 744 m bei einer Visurneigung von rund  $27^{\text{e}65^{\text{c}}}$  nach (6.1) um 34 mm größer als aus gegenseitigen Vertikalwinkeln bei 8 cm Differenz zwischen der Hin- und Rückmessung. Differenzwinkel für die Visur vom Tal hinauf  $- 56^{\text{cc}}$  und zurück  $+ 30^{\text{cc}}$ .

Beispiel 4: Operat T-250/1972, Visur Stamplach - Kleine Mittagsspitze.

Horizontale Seite von rund 1582 m Länge, nur aus einem Dreieck, um 49 mm kleiner als aus Reduktion der Schrägstrecke. Höhenunterschied von rund 900 m bei einer Visurneigung von rund  $32^{\text{e}93^{\text{c}}}$  nach (6.1) um 87 mm größer als aus gegenseitigen Vertikalwinkeln bei 8 cm Differenz zwischen der Hin- und Rückmessung. Differenzwinkel für die Visur vom Tal hinauf  $- 18^{\text{cc}}$  und zurück  $+ 50^{\text{cc}}$ .

Beispiel 5: Operat St-197/1964, Visur Kübler - Hochkar.

Horizontale Seite von rund 2430 m Länge, aus zwei Dreiecken, Differenz 12 mm zwischen den beiden Berechnungen, um 109 (!) mm kleiner als aus Reduktion der Schrägstrecke. Höhenunterschied von rund 1250 m bei einer Visurneigung von rund  $30^{\text{e}25^{\text{c}}}$  um 480 mm (!) größer als aus gegenseitigen Vertikalwinkeln. Differenzwinkel für die Visur vom Tal hinauf  $- 119^{\text{cc}}$  und zurück  $+ 134^{\text{cc}}$ . Zu diesem Beispiel ist zu bemerken, daß die Dreiecksseiten von Kübler nach Fachwerk und Petrus nicht direkt gemessen werden konnten, und ebenso wie auch die zugehörigen Richtungen aus Polygonzügen abgeleitet wurden. Es zeigt sich hier sehr deutlich, daß unter allen Umständen zu trachten ist, die Talstrecken direkt messen zu können und ebenso auch die zugehörigen Richtungen und sie nicht aus einer Anzahl von Polygonpunkten ableiten zu müssen, wodurch auch eine größeren Unsicherheit in die Richtungsmessung kommt, die im Gegensatz zu der im Abschnitt 6,3 erhobenen Forderung steht.

Die Beispiele 1 bis 5 zeigen die gleiche Systematik, es sind die genähert ellipsoidischen Höhenunterschiede aus Gleichung (6.1) größer als die aus gegenseitigen Vertikalwinkelmessungen abgeleiteten genäherten geoidischen Höhenunterschiede. Setzt man in die Gleichung (5.1) den Mittelwert der Höhenunterschiede aus Hin- und Rückmessung von der Operatsberechnung ein, kommt man bis auf die Beobachtungsfehler und die durch die Refraktionsanomalien verursachten Differenzen zu den beobachteten und auf die Höhenbezugspunkte der Streckenmessung reduzierten Vertikalwinkeln. Man erhält also statt der Differenzwinkel  $\epsilon$  gewissermaßen die Verbesserungen  $v$ . Dies zeigt nun andererseits, daß die Differenzwinkel  $\epsilon$  tatsächlich weitgehend durch die Lotabweichungen verursacht sind, allerdings mit der Einschränkung, daß sich hier voll und ganz die Unsicherheit der nach Gleichung (6.1) berechneten Höhenunterschiede auswirkt, besonders bei den Beispielen 2 und 5.

Die in den fünf Beispielen angemerkten Differenzen zwischen den beiden Arten von Höhenunterschieden könnte man grob gesprochen als die Differenz ( $N_k - N_i$ ) ansprechen, allerdings verfälscht durch verschiedene Vernachlässigungen, in der Hauptsache bedingt durch die nicht berücksichtigten Refraktionsanomalien bei den Höhenunterschieden aus Vertikalwinkelmessungen und durch die nicht bezüglich der Lotabweichungen korrigierten Richtungen bei den aus Dreiecksauflösungen ermittelten horizontalen Strecken für die Höhenunterschiedsberechnung nach Gleichung (6.1).

Man kann nun bei dem Höhendreieck DOBRATSCH aus [19] auch eine Analogie zu diesen fünf Beispielen feststellen. Während bei den hier angeführten Beispielen keine Lotabweichungsmessungen zur Verfügung standen, konnten beim Höhendreieck Dobratsch astronomisch ermittelte Lotabweichungen verwendet werden. Bei den Höhenunterschieden zwischen den Punkten 27 und 119 bzw. 27 und 21 haben die gemessenen Lotabweichungen vom Berg ins Tal wie in den Beispielen dieses Abschnittes einen etwas größeren positiven Wert. Die Visuren vom Tal hinauf haben beim Höhendreieck Dobratsch jedoch nur geringe Lotabweichungen von wechselndem Vorzeichen. Insgesamt ist aber bei beiden Fällen gleichfalls der ellipsoidische Höhenunterschied größer als der geoidische, also die gleiche Erscheinung wie bei den Beispielen 1 bis 5.

Etwas anders ist allerdings die Situation bei dem Höhenunterschied zwischen den Punkten 21 und 119 des Höhendreiecks Dobratsch bei einem etwas geringeren Höhenunterschied von rund 105 m. Dort haben die beobachteten Lotabweichungen von relativ geringer Größe das umgekehrte Vorzeichen wie die Differenzwinkel in den Beispielen dieses Abschnittes. Es ist dort daher auch der ellipsoidische Höhenunterschied kleiner als der geoidische. Die Differenz ( $N_k - N_i$ ) hat somit auch das umgekehrte Vorzeichen im Vergleich zu den anderen Fällen.

Die Punkte 21 und 119 aus dem Höhendendreieck Dobratsch können jedoch gleichermaßen als Talpunkte angesprochen werden, wodurch sich der Unterschied gegenüber den übrigen Beispielen erklären läßt.

Damit zeigt sich bei den angeführten Beispielen die einheitliche Erscheinung, daß bei größeren Höhenunterschieden zwischen Tal- und Bergpunkten der ellipsoidische Höhenunterschied größer ist als der geoidische Höhenunterschied. Dies hat zur Folge, daß in diesen Fällen die mittels der ellipsoidischen Höhenunterschiede richtig reduzierten Schrägstrecken kürzer sind als jene, die unter Vernachlässigung der Lotabweichungen mit Vertikalwinkelmessungen horizontiert wurden.

Die Visuren vom Berg ins Tal haben in diesen Fällen positive Lotabweichungen, die Visuren vom Tal hinauf im allgemeinen negative Lotabweichungen oder nur ganz geringe positive Lotabweichungen. Unter Talpunkten können die Verhältnisse differieren.

7

PUNKTBESTIMMUNG AUS DREI GEMESSENEN SCHRÄGSTRECKEN

Sind bei der in Abbildung 6.1 dargestellten Situation die Koordinaten  $x_i$  und  $y_i$  sowie die ellipsoidischen Höhen  $E_i$  der Talpunkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  gegeben, besteht die Möglichkeit, unabhängig von Refraktion und Lotabweichung allein mit den drei gemessenen Schrägstrecken  $\bar{s}_{1,0(M)}$ ,  $\bar{s}_{2,0(M)}$  und  $\bar{s}_{3,0(M)}$  die Koordinaten  $x_0$  und  $y_0$  und die ellipsoidische Höhe  $E_0$  des Punktes  $P_0$  zu ermitteln.

Man geht hierfür von der Gleichung (6.1) aus, die auf die drei gemessenen Schrägstrecken angewendet wird:

$$\begin{aligned} E_0 - E_1 &= -s_{1,0(1)} \cdot \sin \frac{\gamma_{1,0(E)}}{2} \pm \sqrt{\frac{-2}{\bar{s}_{1,0(M)}^2} - s_{1,0(1)}^2 \cdot \cos^2 \frac{\gamma_{1,0(E)}}{2}} \\ E_0 - E_2 &= -s_{2,0(2)} \cdot \sin \frac{\gamma_{2,0(E)}}{2} \pm \sqrt{\frac{-2}{\bar{s}_{2,0(M)}^2} - s_{2,0(2)}^2 \cdot \cos^2 \frac{\gamma_{2,0(E)}}{2}} \\ E_0 - E_3 &= -s_{3,0(3)} \cdot \sin \frac{\gamma_{3,0(E)}}{2} \pm \sqrt{\frac{-2}{\bar{s}_{3,0(M)}^2} - s_{3,0(3)}^2 \cdot \cos^2 \frac{\gamma_{3,0(E)}}{2}} \\ &\dots\dots (7.1) \end{aligned}$$

Dies sind nach einer Umformung drei Bestimmungsgleichungen für die drei Unbekannten  $x_0$ ,  $y_0$  und  $E_0$ . Sind die drei gegebenen Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  Talpunkte und ist der gesuchte Punkt  $P_0$  ein Bergpunkt, sind die positiven Vorzeichen der Wurzeln in den Gleichungen (7.1) zu verwenden, im umgekehrten Fall die negativen Vorzeichen.

Diese Methode der Punktbestimmung darf aus den im Abschnitt 6 dargelegten Genauigkeitsgründen nur dann angewendet werden, wenn die gemessenen Schrägstrecken wenigstens  $\pm 20^\circ$  Neigung gegen die Horizontale aufweisen. Eine wesentliche Voraussetzung ist außerdem auch noch, daß von den drei gegebenen Punkten  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  die ellipsoidischen Höhen bekannt sind. Sind nur Gebrauchshöhen oder geoidische Höhen vorhanden, darf diese Methode der Punktbestimmung nicht angewendet werden.

Versucht man, nach Einführen der unbekanntenen Koordinaten  $x_0$  und  $y_0$  das Gleichungssystem (7.1) direkt auflösen zu wollen, kommt man zu außerordentlich komplizierten und umfangreichen Ausdrücken höherer Ordnung. Für eine eventuelle praktische Anwendung dieser Methode, so weit sie wegen der hierfür notwendigen Voraussetzungen in dieser Form überhaupt praktisch anwendbar ist, erscheint es daher als vorteilhafter, sich vorher auf irgend einem Wege Näherungswerte für die drei Unbekannten  $x_0$ ,  $y_0$  und  $E_0$  zu verschaffen und anschließend mit Hilfe einer Ausgleichung die endgültigen Werte dieser Unbekannten zu bestimmen.

Liegen auch Vertikalwinkelmessungen vor, kann man die gemessenen Schrägstrecken vorläufig reduzieren und weiters z. B. durch einen Bogen= schnitt Näherungskoodinaten für den Neupunkt ableiten. Ersetzt man in Gleichung (2.18)  $E_M$  durch  $E_1$ , kann eine der horizontalen Strecken  $s_{i,k(i)}$  errechnet werden. Setzt man diese in die zugehörige Gleichung (7.1) ein, erhält man einen Näherungswert für  $E_0$ . Es kann aber z. B. auch mit der Gleichung (5.1) ein Näherungswert für  $E_0$  ermittelt werden.

Sind außer den Streckenmessungen keine zusätzlichen Richtungs- und Vertikalwinkelmessungen vorhanden, kann man grobe Näherungswerte für die drei Unbekannten auch einer Karte entnehmen. Durch eine iterative Anwendung des Ausgleichsverfahrens erhält man bessere Näherungswerte bzw. letztlich die endgültigen Werte für die gesuchten Unbekannten.

Im allgemeinen wird eine Überbestimmung vorliegen. Sind nun z. B. zu dem gesuchten Punkt vier Schrägstrecken gemessen worden, hat man noch eine weitere Möglichkeit für die Ermittlung von Näherungswerten. Dazu geht man von Gleichung (4.9) aus, die nach einer Umformung auf die gemessenen Schrägstrecken angewendet wird;

$$\left. \begin{aligned} \bar{s}_{1,0}^2 &\doteq s_{1,0}^2(E_M) + \Delta E_{1,0}^2 & \bar{s}_{3,0}^2 &\doteq s_{3,0}^2(E_M) + \Delta E_{3,0}^2 \\ \bar{s}_{2,0}^2 &\doteq s_{2,0}^2(E_M) + \Delta E_{2,0}^2 & \bar{s}_{4,0}^2 &\doteq s_{4,0}^2(E_M) + \Delta E_{4,0}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.2)$$

Setzt man als weitere Näherung  $s_{i,k(k)} \doteq s_{i,k}(E_M)$ , werden die Gleichungen (7.2) genähert zu

$$\left. \begin{aligned} \bar{s}_{1,0}^2 &\doteq (y_0 - y_1)^2 + (x_0 - x_1)^2 + (E_0 - E_1)^2 \\ \bar{s}_{2,0}^2 &\doteq (y_0 - y_2)^2 + (x_0 - x_2)^2 + (E_0 - E_2)^2 \\ \bar{s}_{3,0}^2 &\doteq (y_0 - y_3)^2 + (x_0 - x_3)^2 + (E_0 - E_3)^2 \\ \bar{s}_{4,0}^2 &\doteq (y_0 - y_4)^2 + (x_0 - x_4)^2 + (E_0 - E_4)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.3)$$

Subtrahiert man nun je zwei Gleichungen voneinander, erhält man ein System von drei linearen Gleichungen für die drei Unbekannten  $x_0$ ,  $y_0$  und  $E_0$ , da die quadratischen Glieder der Unbekannten wegfallen:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_0 \cdot (x_1 - x_2) + 2 \cdot y_0 \cdot (y_1 - y_2) + 2 \cdot E_0 \cdot (E_1 - E_2) + (\bar{s}_{1,0}^2 - \bar{s}_{2,0}^2) - (y_1^2 - y_2^2) - \\ - (x_1^2 - x_2^2) - (E_1^2 - E_2^2) = 0 \\ 2 \cdot x_0 \cdot (x_2 - x_3) + 2 \cdot y_0 \cdot (y_2 - y_3) + 2 \cdot E_0 \cdot (E_2 - E_3) + (\bar{s}_{2,0}^2 - \bar{s}_{3,0}^2) - (y_2^2 - y_3^2) - \\ - (x_2^2 - x_3^2) - (E_2^2 - E_3^2) = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2 \cdot x_0 \cdot (x_3 - x_4) + 2 \cdot y_0 \cdot (y_3 - y_4) + 2 \cdot E_0 \cdot (E_3 - E_4) + (\bar{s}_{3,0}^2 - \bar{s}_{4,0}^2) - (y_3^2 - y_4^2) - \\ - (x_3^2 - x_4^2) - (E_3^2 - E_4^2) = 0 \\ \dots\dots (7.4) \end{aligned}$$

Durch Auflösung des linearen Gleichungssystems (7.4) lassen sich gleichfalls Näherungswerte für die drei Unbekannten  $x_0$ ,  $y_0$  und  $E_0$  ermitteln. Auf diese Methode der Erniedrigung des Grades eines Gleichungssystems durch Einbeziehung einer zusätzlich gemessenen Größe hat KILLIAN z. B. in seinem Artikel "Über das Rückwärtseinschneiden im Raum" im Heft 4 des 43. Jahrg. (1955) der ÖZfV. auf Seite 103 hingewiesen. Es wird hierbei allerdings vorausgesetzt, daß die Messungen, hier die gemessenen Schrägstrecken, fehlerfrei sind. Dies ist hier zwar nicht der Fall, was aber ohne Bedeutung ist, da einerseits nur Näherungswerte berechnet werden sollen und andererseits etliche Näherungen in diesem Berechnungsgang enthalten sind, deren Größenordnung über die Streckenfehler hinausgehen kann.

Die für die nachfolgende Ausgleichung notwendigen Fehlergleichungen und Gewichte sind dem Abschnitt 16 zu entnehmen.

8 REFRAKTION

8,1 Allgemeines

Bei der Berechnung der Höhenunterschiede aus Vertikalwinkelmessungen zeigte sich, daß der HARTL'sche Wert für den Refraktionskoeffizienten in verschiedenen Operaten den tatsächlichen Gegebenheiten nicht entspricht. So mußte z. B. bei der Triangulierung von Groß-Wien (Triangulierungsoperat N-120/1948-1953) der Refraktionskoeffizient  $k = 0$  gesetzt werden.

Im Flachland bringt bei meist bodennahen Visuren die Unsicherheit in der Größe des tatsächlich wirksamen Refraktionskoeffizienten sehr große Widersprüche zwischen den Höhenunterschieden aus Hin- und Rückmessung mit sich. Daß die Mittel aus Hin- und Rückmessung die Refraktionsfehler nicht vollständig beseitigen können, zeigt sich in den vielfach auftretenden großen Widersprüchen bei der Berechnung der Einzelhöhen und somit an den in solchen Gebieten verbleibenden großen Verbesserungen. Beispiele für solche Gebiete sind in Österreich das Marchfeld, der burgenländische Seewinkel, die Welser Heide oder die Rheinebene, um nur einige heraus zu greifen, wo in der Hauptsache nur bodennahe Visuren auftreten mit einem Bodenabstand von nur wenigen Metern. Die hier auftretenden Fehler haben einen sehr unregelmäßigen Charakter.

In anderen Gebieten treten hingegen einseitig wirkende systematische Fehler auf. So zeigen z. B. bei Vertikalwinkelmessungen im Bergland die positiven Höhenunterschiede vom Talboden auf die Berghöhen vielfach einen größeren Zahlenwert als die negativen Höhenunterschiede, während es ansonsten im allgemeinen umgekehrt ist und die negativen Höhenunterschiede den größeren Zahlenwert haben. Diese systematischen Fehler sind aber so groß, daß auf die mit Höhenwinkeln reduzierten Strecken Auswirkungen bis in den Dezimeterbereich möglich sind, sichtbar in den Differenzen der horizontalen Strecken, abgeleitet aus den Vertikalwinkelmessungen von Hin- und Rückmessung. Allerdings sind diese Differenzen nicht von der Refraktion allein verursacht, ein nicht unbeträchtlicher Teil wird durch die Nichtberücksichtigung der Lotabweichungen verursacht.

Wären beim Vorhandensein von gegenseitigen Vertikalwinkelmessungen die wirksamen Refraktionskoeffizienten und als Folge davon die Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  an beiden Visurenden gleich groß, dann wäre die tatsächliche Größe des Refraktionskoeffizienten bedeutungslos, da bei der Bildung des Mittels aus Hin- und Rückmessung die Auswirkung der Refraktion herausfiel. Von dieser Voraussetzung wird auch vielfach bei der Berechnung der Höhenunterschiede ausgegangen. Die praktische Erfahrung zeigt aber, daß im allgemeinen Fall die Refraktionskoeffizienten an den beiden Visurendpunkten

nicht gleich groß sind, auch nicht bei vollständig gleichzeitiger Messung der gegenseitigen Vertikalwinkel. Vor allem dann nicht, wenn zwischen den Endpunkten einer Visur ein größerer Höhenunterschied besteht oder eine starke Verschiedenheit in der Bodenbedeckung auftritt. Besonders groß wird der Unterschied in den Refraktionskoeffizienten an beiden Visurendpunkten dann sein, wenn auf dem einen Ende die Visur ein längeres Stück sehr bodennah ist und auf dem anderen Ende knapp neben dem Standpunkt ein Steilabfall ist. Durch die gleichzeitige Messung der Vertikalwinkel können zwar die großräumigen Veränderungen der Refraktion beseitigt werden, aber nicht die an sich immer mehr oder weniger großen Unterschiede zwischen den einzelnen Standpunkten. So hat unter anderen auch WUNDERLIN in [73] darauf hingewiesen, daß trotz gleichzeitiger Messung der Vertikalwinkel große Refraktionsunterschiede auftraten.

Man muß also streng genommen grundsätzlich davon ausgehen, daß für jede einzelne Vertikalwinkelmessung ein eigener Refraktionskoeffizient wirksam ist und daß daher im allgemeinen der Mittelwert des Höhenunterschiedes aus Hin- und Rückmessung einen restlichen Refraktionsfehler enthält.

Voll und ganz gehen natürlich die Auswirkungen von Refraktionsunterschieden in nur einseitig vorliegende Höhenunterschiede ein, die dann auch vielfach in der Höhenberechnung große Widersprüche verursachen und daher oft ausgeschieden werden.

Relativ klein sind im allgemeinen die Refraktionsanomalien im Hochgebirge bei Vertikalwinkelmessungen von Gipfel zu Gipfel, wo die Visuren meist einen großen Bodenabstand haben. Dort ist meist auch die Unsicherheit  $m_k$  der Refraktionskoeffizienten sehr klein. Beim Übergang vom Talboden auf die Gipfel flur sind die Unterschiede zwischen den Refraktionskoeffizienten an den beiden Visurenden bereits größer. Wegen des vielfach auch etwas geringeren Bodenabstandes der Visur ist hier auch die Unsicherheit  $m_k$  der Refraktionskoeffizienten größer. Am stärksten sind aber die Refraktionsunsicherheiten bei bodennahen Visuren wirksam, also im Talboden und im Flachland. BAHNERT weist z. B. in [1] und [2] darauf hin, daß bei bodennahen Visuren der Refraktionskoeffizient zwischen den Werten  $+2,0$  und  $-2,0$  pendeln und auch noch größer werden kann.

Eine Ermittlung der tatsächlich wirksamen Refraktionskoeffizienten zum Zeitpunkt der jeweiligen Vertikalwinkelmessung aus den entlang der einzelnen Visuren erhobenen meteorologischen Daten unter Berücksichtigung der Temperaturgradienten oder wenigstens aus den an den Visurendpunkten erhobenen Daten in Verbindung mit den Temperaturgradienten kann im Rahmen von wissenschaftlichen Untersuchungen oder in Ausnahmefällen in einem begrenzten Arbeitsgebiet vorgenommen werden. Für einen normalen Feldarbeitsablauf

ist ein solches Vorgehen aus wirtschaftlichen Gründen praktisch nicht durchführbar. Durch eine solche umfangreiche und komplizierte Datenerhebung und ihre rechnerische Auswertung kann zwar eine sich über einen größeren Zeitraum ergebende Veränderung der meteorologischen Verhältnisse erfaßt werden, aber nicht eine kurzfristig auftretende Schwankung in der Refraktion, die zum Zeitpunkt der Messung tatsächlich wirksam ist. WUNDERLIN hat in [73] auch darauf hingewiesen, daß trotz der aufwendigen Datenerhebung und einer komplizierten rechnerischen Auswertung keine Glättung der auf einem Standpunkt über einen größeren Zeitraum verteilt gemessenen Vertikalwinkel möglich war. Offensichtlich waren hier solche kurzzeitig wirksame Schwankungen in der Refraktion wirksam. In [73] wird auch gezeigt, daß trotz gleichzeitiger Messung der Vertikalwinkel relativ große Unterschiede in den Refraktionskoeffizienten zwischen Hin- und Rückmessung auftreten und daß auch große Unterschiede zwischen mehreren auf einem Standpunkt nach verschiedenen Zielen wirksamen Refraktionskoeffizienten sind, bei einer als nahezu gleichzeitig zu bezeichnenden Messung.

Es kann also auch durch Sondenaufstiege und sonstige mehr oder weniger umfangreiche Erhebungen der atmosphärischen Verhältnisse nicht immer der tatsächliche, richtige Refraktionswinkel zum Zeitpunkt der Vertikalwinkelmessung abgeleitet werden, sondern nur ein mehr oder weniger guter Näherungswert, der kurzfristig wirksame Änderungen der atmosphärischen Verhältnisse nicht berücksichtigen kann, wie sie aber vor allem bei bodennahen Visuren besonders stark wirksam werden können, z. B. durch eine plötzliche Unterbrechung der Sonneneinstrahlung durch Vorüberziehen einer größeren Wolke.

Der Idealfall wäre, den zum Zeitpunkt der Vertikalwinkelmessung wirksamen Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  direkt für jede einzelne Visur messen zu können. Darauf zielen auch jene Versuche ab, die die Dispersion des Lichtes dazu verwenden wollen, der Refraktion durch direkte Messung beikommen zu können. Die einzige sichere Methode, die tatsächliche Refraktion zum Zeitpunkt der Messung erhalten zu können, besteht darin, sie direkt zu messen. Alle übrigen Methoden können nur mehr oder weniger gute Näherungswerte ergeben.

Die für eine direkte Messung der Refraktion notwendigen Instrumente sind derzeit erst im Versuchsstadium und stehen daher für den allgemeinen Gebrauch noch nicht zur Verfügung. Es bleibt daher für den normalen Feldarbeitsbetrieb nur die Möglichkeit, zu versuchen, aus den gemessenen Vertikalwinkeln oder aus den daraus abgeleiteten Höhenunterschieden durch einen rechnerischen Ausgleichsvorgang der jeweiligen Situation angepaßte Refraktionskoeffizienten zu ermitteln. Eine Schwierigkeit kann hierbei jedoch nicht ganz überwunden werden, daß nämlich in Gleichung (2,27) der Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  und der Lotabweichungsanteil  $\varepsilon_{i,k}$  additiv miteinander ver-

bunden sind und nicht so ohne weiteres von einander getrennt werden können.

Ein Festpunktfeld wird im allgemeinen nach den für die Lageberechnung der Neupunkte günstigen Gesichtspunkten angelegt, abhängig von den jeweiligen geländemäßig bedingten Gegebenheiten, ohne Rücksicht darauf, daß für eine günstige Höhenbestimmung andere Gesichtspunkte gelten könnten. Es hat auch im allgemeinen die Lagebestimmung eindeutigen Vorrang vor der Höhenbestimmung, die mehr oder weniger als Nebenprodukt anfällt. So gibt es auch viele Festpunktbestimmungen, wie bei der Mehrzahl der EP-Netze, wo überhaupt keine Höhenbestimmung durchgeführt wird.

Für die rechnerische Bestimmung der Lotabweichungskomponenten im Rahmen einer Ausgleichung ist es wichtig, daß die einzelnen Visuren ungefähr gleich lang und gut über den Kreis verteilt sind. Diese Forderung kommt den Grundsätzen der Lagebestimmung sehr nahe und wird daher vielfach erfüllt sein können, wenn nicht gerade eine polygonometrische Punktbestimmung durchgeführt wird. Im Gegensatz dazu wäre es aber für eine relativ sichere Ermittlung eines mittleren Refraktionskoeffizienten notwendig, daß die Zielweiten für die einzelnen Visuren stark unterschiedlich sind, eine Forderung, die nur selten erfüllt sein wird. Man muß daher damit rechnen, daß eine rechnerische Trennung des Einflusses von Refraktion und Lotabweichung im Rahmen einer Ausgleichung nur sehr bedingt möglich ist, wie das Beispiel Rauris ja auch in der Praxis bestätigt. Es wird also in der Praxis so lange, bis die im normalen Feldarbeitsbetrieb mögliche Messung der Refraktionseinflüsse gegeben ist, für jene Punkte, für die keine gemessenen Lotabweichungskomponenten vorliegen, die aus einem Ausgleichungsverfahren ermittelte Auswirkung von Refraktion und Lotabweichung nur bedingt trennbar sein. Für die Berechnung von ellipsoidischen Höhenunterschieden ist dies zwar weniger von Bedeutung, da hierbei beide Einflüsse berücksichtigt werden. Hingegen wird bei der näherungsweise Berechnung der geoidischen Höhenunterschiede nur der Refraktionseinfluß berücksichtigt, wodurch sich in diesem Fall noch Restfehler bemerkbar machen können.

Man kann jedoch zum Teil bereits bei der Feldarbeit die Konsequenzen aus diesen Gegebenheiten ziehen. Einerseits erscheint es als notwendig, für eine relativ größere Anzahl von Punkten aus einer astronomischen Ortsbestimmung die Lotabweichungskomponenten abzuleiten, was mit den heute gegebenen Möglichkeiten vergleichsweise leichter durchführbar ist. Diese Lotabweichungskomponenten haben nicht nur eine Auswirkung auf die Höhenberechnung, sondern beim Vorliegen einer größeren Anzahl von Steilvisuren ist auch ein nicht zu unterschätzender Einfluß auf die Lageberechnung vorhanden, wie gleichfalls das Beispiel Rauris zeigt. Zusätzlich kann man vielfach die Punktentfernungen verringern und auf diese Weise den Einfluß der Refraktionsunsicherheiten wesentlich herabsetzen, der bekanntlich mit dem Quadrat der

Entfernung zu- und auch abnimmt. Es ist z. B. im Flachland bei bodennahen Visuren unrealistisch, wenn man glaubt, daß man z. B. bei einer Punktf Entfernung von 3 km aus einer Vertikalwinkelmessung noch verläßliche, trigonometrisch bestimmte Höhen ableiten kann. Dies machen die in Tabelle 7 ausgewiesenen mittleren Fehler von aus Vertikalwinkelmessungen abgeleiteten Höhenunterschieden deutlich.

Es ist von Fall zu Fall genau zu überlegen, wie weit man bei einer rechnerischen Ermittlung der Refraktion die Annäherung erreichen kann. Dem entsprechend ist dann auch die Art der Berechnung durchzuführen. Es gibt verschiedene Ausgleichsmöglichkeiten für besser angenäherte Refraktionskoeffizienten:

- A) Der Refraktionskoeffizient wird aus entsprechend reduzierten gegenseitigen Vertikalwinkeln allein oder gemeinsam mit der Lotabweichung bestimmt.
- B) Der Refraktionskoeffizient wird aus gegenseitigen Höhenunterschieden allein oder gemeinsam mit der Lotabweichung abgeleitet.
- C) Der Refraktionskoeffizient wird allein oder gemeinsam mit der Lotabweichung im Rahmen der Ausgleichung der Höhen ermittelt, die Fehlergleichungen können auf die Vertikalwinkel oder auf die Höhenunterschiede bezogen sein.
- D) Es wird eine gemeinsame Ausgleichung von Richtungs-, Strecken- und Vertikalwinkelmessungen vorgenommen, in deren Rahmen auch die Refraktionskoeffizienten und die Lotabweichungen berechnet werden.

Für jede der hier angeführten Möglichkeiten gibt es eine Reihe von Untergruppen, die davon abhängen, welche Gruppen von Beobachtungen bei der Bestimmung der Refraktionskoeffizienten zusammengefaßt werden. Der Idealfall, für jede einzelne Vertikalwinkelmessung einen Refraktionskoeffizienten zu ermitteln, was an sich notwendig wäre, ist praktisch nicht möglich, da hierbei die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten größer wäre als die Anzahl der verfügbaren Beobachtungen. Für die daher notwendige Zusammenfassung gibt es in der Hauptsache drei Untergruppen:

- a) Es wird für alle Vertikalwinkelmessungen eines Arbeitsgebietes ein einheitlicher Refraktionskoeffizient errechnet.
- b) Verschiedenen Gruppen von Visuren wird jeweils ein Refraktionskoeffizient zugeordnet, z. B. im Bergland allen Visuren im Talboden, allen Visuren vom Talboden auf die Gipfflur, allen Visuren von der Gipfflur zum Talboden und allen Visuren in der Gipfflur. In anderen Gebieten sind auch Einteilungen nach anderen Gesichtspunkten möglich.
- c) Für jeden Standpunkt der Vertikalwinkelmessung wird für die zum ungefähr gleichen Zeitpunkt gemessenen Vertikalwinkel ein eigener Refraktionskoeffizient bestimmt.

Die örtliche Refraktion nach MALY

MALY hat in [52] im Rahmen der Ausgleichung der Meereshöhen für jeden Standpunkt der Vertikalwinkelmessung einen Refraktionskoeffizienten ermittelt. Bei dieser Berechnungsmethode wird jeder einzelne Höhenunterschied mit einer Fehlergleichung in den Berechnungsgang eingeführt, es werden nicht die Mittelwerte aus der Hin- und Rückmessung verwendet. Im Gegensatz dazu werden bei der in der "riangulierungsabteilung verwendeten Berechnungsmethode nur die Mittelwerte der Höhenunterschiede aus Hin- und Rückmessung als voll gültige Berechnungsgrundlage gewertet. Bloß einseitig vorhandene Höhenunterschiede werden immer mit großem Mißtrauen verwendet und müssen auch oft aus der Berechnung der Meereshöhen ausgeschaltet werden.

Die von MALY angewandte Methode birgt allerdings gewisse Gefahren in sich. Bei etwas instabilen Höhennetzen kann es geschehen, daß die aus der Ausgleichung resultierenden Höhenänderungen und die Refraktionsanomalien sich so gegeneinander verschieben, daß zwar die verbleibenden Verbesserungen in ihrer Quadratsumme ein Minimum ergeben, daß aber die Höhenänderungen und die Refraktionsanomalien unverhältnismäßig hohe Werte annehmen können, die unter Umständen sogar als unrealistisch bezeichnet werden müssen. Außerdem hat MALY mit seiner Ausgleichung allein Refraktionsänderungen berechnet, die gleichfalls vorhandenen Lotabweichungseinflüsse hat er ignoriert. Man könnte also mit den so erhaltenen Ergebnissen vielleicht genäherte ellipsoidische Höhen erhalten, da ja sowohl die <sup>R</sup> Refraktions- und auch die <sup>L</sup> Lotabweichungseinflüsse in den Refraktionsänderungen enthalten sind. Man dürfte aber nicht daraus geoidische Höhen ableiten wollen, da man hierbei für die Näherungsmethode die Lotabweichungseinflüsse nicht einbeziehen darf.

Im Flachland tritt im allgemeinen der Einfluß der Lotabweichungen gegenüber der Unsicherheit der Refraktion weit zurück. Da könnte man die Vernachlässigung der <sup>L</sup> Lotabweichung und die alleinige Ermittlung der Refraktionsänderungen im Rahmen einer solchen Ausgleichung als relativ gerechtfertigt betrachten.

Hingegen ist im Bergland vielfach ein wenigstens gleich großer, wenn nicht sogar ein größerer Einfluß der <sup>L</sup> Lotabweichung zu erwarten. Da muß man mit einer Verfälschung der Ergebnisse rechnen, wenn man den <sup>G</sup> Gesamteinfluß in die <sup>R</sup> Refraktion verlegt, da sich die <sup>R</sup> Refraktion nach etwas anderen Gesetzmäßigkeiten auswirkt als die Lotabweichung. Außerdem hat man im Bergland Visuren von stark unterschiedlicher <sup>V</sup> Visurneigung, die Zielpunkte befinden sich in oft sehr unterschiedlichen Höhenlagen. In diesen Fällen kann man nicht davon ausgehen, daß all diese Visuren den gleichen <sup>R</sup> Refraktionskoeffizienten haben.

Es darf also die von MALY in [52] aufgezeigte Berechnungsmethode nicht auf alle Fälle angewendet werden.

HRADILEK hat z. B. in [25] und [27] gleichfalls für jeden einzelnen Standpunkt einen Refraktionskoeffizienten ermittelt, allerdings unter gleichzeitiger Bestimmung der Lotabweichungen. Aber auch hier kann man nicht in allen Fällen mit voller Berechtigung annehmen, daß allen Visuren eines Standpunktes der gleiche Refraktionskoeffizient zugeordnet werden darf.

8,3 Geometrische Zusammenhänge

Angestrebt wird die Berechnung des Refraktionswinkels  $\delta_{i,k}$ . Der Refraktionskoeffizient  $k_i$  ist eine Hilfsgröße, die die Berechnung des Refraktionswinkels  $\delta_{i,k}$  erleichtert.

Die Formeln für die geometrische Ermittlung des Refraktionswinkels  $\delta_{i,k}$  können unterschiedlich abgeleitet werden. Dem entsprechend ist auch der Refraktionskoeffizient verschieden zu definieren.

Eine Möglichkeit der Ableitung besteht darin, daß auf das Dreieck  $P_i-M(R)-P_k$  in der Abb. 2,1 der Sinussatz angewendet wird:

$$\frac{\bar{s}_{i,k(M)}}{\sin(\delta_{i,k} + \delta_{k,i})} = \frac{R_i(R)}{\cos \delta_{k,i}} = \frac{R_k(R)}{\cos \delta_{i,k}} \dots\dots (8.1)$$

Daraus erhält man

$$\sin(\delta_{i,k} + \delta_{k,i}) = \frac{\bar{s}_{i,k(M)}}{R_i(R)} \cdot \cos \delta_{k,i} = \frac{\bar{s}_{i,k(M)}}{R_k(R)} \cdot \cos \delta_{i,k} \dots\dots (8.2)$$

Nun wird der Refraktionskoeffizient  $k_i$  eingeführt als Verhältnis des Erdkrümmungsradius  $R_i(E)$  zum Krümmungsradius der durch die Refraktion gekrümmten Lichtkurve, wobei die im allgemeinen nicht zutreffende Voraussetzung angenommen wird, der Krümmungsradius der Lichtkurve wäre mit dem Abstand  $R_i(R)$  bzw.  $R_k(R)$  identisch:

$$k_i = \frac{R_i(E)}{R_i(R)} \dots\dots (8.3)$$

Wegen der Kleinheit der Refraktionswinkel kann in Gleichung (8.2) der Kosinus der Refraktionswinkel gleich 1 und der Sinus gleich dem Bogen gesetzt werden. Berücksichtigt man Gleichung (8.3), erhält man

$$\delta_{i,k} + \delta_{k,i} = \frac{k_i \cdot \bar{s}_{i,k(M)}}{R_i(E)} = \frac{k_k \cdot \bar{s}_{i,k(M)}}{R_k(E)} \dots\dots (8.4)$$

Liegen keine gemessenen Schrägstrecken vor, kann  $\bar{s}_{i,k(M)}$  für die Verwendung in Gleichung (8.4) statt aus Gleichung (4.4) mit hinreichender Genauigkeit angenähert werden durch



$$\bar{s}_{i,k(M)} \doteq \frac{s_{i,k(E)}}{\sin z_{i,k}} \quad \dots\dots (8.5) \quad \text{und weiters durch}$$

$$\bar{s}_{i,k(M)} \doteq \frac{s_{i,k(E)}}{\sin z_{i,k}} \quad \dots\dots (8.6)$$

Damit wird Gleichung (8.4) zu

$$\delta_{i,k} + \delta_{k,i} = \frac{s_{i,k(E)}}{R_i(E)} \cdot \frac{k_i}{\sin z_{i,k}} = \frac{s_{i,k(E)}}{R_k(E)} \cdot \frac{k_k}{\sin z_{k,i}} \quad \dots\dots (8.7)$$

Dies kann man auch in folgender Form schreiben:

$$\delta_{i,k} + \delta_{k,i} = \gamma_{i,k(E)} \cdot \frac{k_i}{\sin z_{i,k}} = \gamma_{i,k(E)} \cdot \frac{k_k}{\sin z_{k,i}} \quad \dots\dots (8.8)$$

Aus den Gleichungen (8.4), (8.7) und (8.8) kann man folgende Gleichungen ableiten:

$$\delta_{i,k} + \delta_{k,i} = \frac{\bar{s}_{i,k(M)}}{R(E)} \cdot \frac{1}{2} \cdot (k_i + k_k) \quad \dots\dots (8.9)$$

$$= \frac{s_{i,k(E)}}{R(E)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{k_i}{\sin z_{i,k}} + \frac{k_k}{\sin z_{k,i}} \right) \quad \dots\dots (8.10)$$

$$= \gamma_{i,k(E)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{k_i}{\sin z_{i,k}} + \frac{k_k}{\sin z_{k,i}} \right) \quad \dots\dots (8.11)$$

Bei dieser Definition kann man die beiden Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  und  $\delta_{k,i}$  von Hin- und Rückvisur unter alleiniger Verwendung der geometrischen Größen nicht trennen. Außerdem wird hier auch noch vorausgesetzt, daß die Lichtkurve bei der Hinmessung identisch ist mit der Lichtkurve bei der Rückmessung, was im allgemeinen Fall gleichfalls nicht zutreffen muß. In einer Reihe von Geodäsielehrbüchern hilft man sich nun so, daß man als Lichtkurve einen Kreis annimmt. Unter dieser im allgemeinen falschen Voraussetzung kann man setzen:

$$\delta_{i,k} \doteq \delta_{k,i} \quad \dots\dots (8.12)$$

Führt man dies in die Gleichungen (8.4), (8.7) und (8.8) ein, erhält man

$$\delta_{i,k} \doteq \frac{\bar{s}_{i,k(M)}}{2 \cdot R_i(E)} \cdot k_i \quad \dots\dots (8.13)$$

$$\doteq \frac{s_{i,k(E)}}{2 \cdot R_i(E)} \cdot \frac{k_i}{\sin z_{i,k}} \quad \dots\dots (8.14)$$

$$\doteq \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2} \cdot \frac{k_i}{\sin z_{i,k}} \quad \dots\dots (8.15)$$

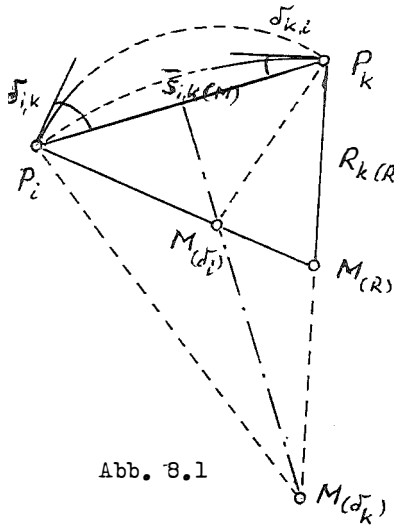


Abb. 8.1

Gedanklich logischer ist die folgende Ableitung, bei der nicht solche im allgemeinen nicht zutreffende Annahmen getroffen werden müssen. Man ersetzt die Lichtkurve im Punkt  $P_i$  und die im allgemeinen nicht identische Lichtkurve bei der Rückmessung im Punkt  $P_k$  jeweils durch ein Kreisbogenstück in der Art, daß die Tangenten an diese Kreisbogen mit den Tangenten an die Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  und  $\delta_{k,i}$  identisch sind. Es gibt nun unendlich viele Kreise, die solche identische Tangenten haben. Als zweckmäßig erscheint es, jene auszuwählen, deren Mittelpunkte in der Streckensymmetrale der Verbindungssehne  $\bar{s}_{i,k(M)}$  von  $P_i$  und  $P_k$  liegen, also jene mit den Mittelpunkten  $M(\delta_i)$  und  $M(\delta_k)$ .

Definiert man nun den Refraktionskoeffizienten  $\bar{k}_i$  so, daß im Nenner von Gleichung (8.3) statt der Abstände  $R_{i(R)}$  bzw.  $R_{k(R)}$  die davon abweichenden Abstände  $\overline{P_i M}(\delta_i)$  bzw.  $\overline{P_k M}(\delta_k)$  stehen, also

$$\bar{k}_i = \frac{R_{i(E)}}{\overline{P_i M}(\delta_i)} \quad \dots\dots (8.3 \text{ a})$$

dann erhält man für den Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$

$$\delta_{i,k} = \frac{\bar{s}_{i,k(M)}}{2 \cdot R_{i(E)}} \cdot \bar{k}_i \quad \dots\dots (8.13 \text{ a})$$

also rein formal dieselbe Gleichung wie (8.13), allerdings ist hierbei  $\bar{k}_i \neq k_i$ , wie man der Abb. 8.1 leicht entnehmen kann.

Bei dieser Definition ist es nicht notwendig, eine Voraussetzung über die Form der Lichtkurve zu machen, da sie ja nur im Beobachtungsstandpunkt durch einen kurzen Kreisbogen ersetzt wird. Außerdem sind Hin- und Rückmessung von einander unabhängig.

Außer diesem rein geometrisch definierten Refraktionskoeffizienten gibt es noch einen physikalisch ableitbaren Refraktionskoeffizienten, der den tatsächlichen Krümmungsradius der Lichtkurve im Beobachtungsstandpunkt in dem durch Gleichung (8.3) definierten Verhältnis enthält. Dieser Krümmungsradius ist jedoch nicht unbedingt identisch mit den rein geometrisch definierten Abständen  $R_{i(R)}$  oder  $\overline{P_i M}(\delta_i)$ .

Es darf aber auch nicht übersehen werden, daß der durch Gleichung (8.3) definierte Refraktionskoeffizient ein anderer Wert ist, als er dann schließlich durch Einführen der Näherung (8.12) erhalten wird. Es liegen somit also drei geometrisch definierte und ein physikalisch definierter Refraktionskoeffizient vor, die unterschiedliche Größen haben können.

8,4 Physikalische Bestimmungsmethoden

Es gibt hier im wesentlichen zwei Gruppen von Formeln. Die eine Gruppe stellt den Zusammenhang zwischen dem Refraktionskoeffizienten und dem Brechungsindex aus physikalischen Daten her, eine zweite Gruppe von Formeln versucht, aus physikalischen Daten den Refraktionswinkel selbst abzuleiten.

Aus den im Unterabschnitt 8,3 dargelegten Gründen erscheint es als günstiger, bei der Auswertung physikalischer Daten die zweite Formelgruppe zu verwenden, die eine direkte Berechnung der Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  ermöglicht.

Wie bereits im Unterabschnitt 8,1 festgestellt wurde, ist für den normalen Feldarbeitsdienst im allgemeinen ein Erheben der notwendigen meteorologischen Daten in dem Ausmaß, wie sie für eine einigermaßen gesicherte physikalische Ableitung der Refraktionswinkel notwendig wären, aus wirtschaftlichen Gründen praktisch nicht durchführbar. Dies kann nur für einzelne wissenschaftliche Untersuchungen oder für begrenzte Sonderaufgaben vorgenommen werden. Für solche Fälle ist dann die jeweils günstigste Methode auszuwählen.

MORITZ gibt z. B. in [57] eine Formel für die direkte Ermittlung des Refraktionswinkels an, ebenso auch WUNDERLIN in [73]. Diese Formeln verlangen eine Integration über die gesamte Visurlänge und setzen die Kenntnis der atmosphärischen Verhältnisse entlang der Visur vom Standpunkt bis zum Zielpunkt voraus. Zufolge der Art der Erhebung der hierfür notwendigen Daten ist es allerdings nicht sicher, daß man tatsächlich die im Augenblick der Vertikalwinkelmessung herrschenden Verhältnisse erfassen kann und nicht nur die sich über einen längeren Zeitraum hinweg ergebenden Veränderungen.

8,5 Direkte Ermittlung der Refraktionswinkel

Das Problem der Refraktion kann man bei der Vertikalwinkelmessung voraussichtlich erst dann echt lösen, wenn die derzeit laufenden Versuche, z. B. mit Hilfe der Dispersion des Lichtes den jeweiligen Refraktionswinkel direkt aus einer Messung ableiten zu können, in praktisch verwendbaren Meßinstrumenten ihren Niederschlag finden. Dann erst können mit einer direkten Messung die zum Zeitpunkt der Vertikalwinkelmessung tatsächlich herrschenden atmosphärischen Verhältnisse erfaßt werden und man erhält nicht nur mehr oder weniger gute Näherungswerte. Die Erreichung dieses Zieles wäre somit grundsätzlich mit aller Kraft anzustreben.

Für eine rechnerische Ermittlung der Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  kann man z. B. von Gleichung (2,28) ausgehen. Sind die Lotabweichungsanteile  $\epsilon_{i,k}$  bekannt, erhält man die Summe der Refraktionswinkel  $\delta_{i,k} + \delta_{k,i}$  aus

$$\delta_{i,k} + \delta_{k,i} = \mathcal{N} - (z_{i,k} + z_{k,i}) + \gamma_{i,k}(E) - (\varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{k,i}) \dots\dots (8.16)$$

Für die Anwendung dieser Gleichung müssen die Vertikalwinkel der Hin- und Rückmessung sich auf dieselben Stand- und Zielpunkte beziehen und auf dieselben Höhenbezugspunkte reduziert sein. Allerdings ist auch hier eine Trennung der beiden Refraktionswinkel von Hin- und Rückmessung nicht möglich.

9 LOTABWEICHUNGEN

9,1 Allgemeines

Die Tangente an die Lotlinie im Geländepunkt  $P_i$  schließt mit der Ellipsoidnormalen durch den Punkt  $P_i$  den Winkel  $\nu_i^A$  ein und hat gegenüber der Ellipsoidnormalen das Azimut  $A_i$ . In den Richtungen der geographischen Koordinaten sind dann nach [31], Band V, die Lotabweichungskomponenten gegeben durch

$$\xi_i = \nu_i^A \cdot \cos A_i \quad \dots\dots (9.1 a)$$

$$\eta_i = \nu_i^A \cdot \sin A_i \quad \dots\dots (9.1 b)$$

Andererseits sind die Lotabweichungskomponenten definiert durch

$$\xi_i = (\varphi_i^! - \varphi_i) \quad \dots\dots (9.2 a)$$

$$\eta_i = (\lambda_i^! - \lambda_i) \cdot \cos \varphi_i \quad \dots\dots (9.2 b)$$

Hierin sind  $\varphi_i$  und  $\lambda_i$  die geodätischen Koordinaten und  $\varphi_i^!$  und  $\lambda_i^!$  die astronomischen Koordinaten.

Eine Zenitdistanz von  $P_i$  nach  $P_k$  hat das Azimut  $\alpha_{i,k}$ , ihr entspricht ein wirksamer Lotabweichungsanteil  $\epsilon_{i,k}$  von

$$\epsilon_{i,k} = \xi_i \cdot \cos \alpha_{i,k} + \eta_i \cdot \sin \alpha_{i,k} \quad \dots\dots (9.3)$$

Wie die Lotabweichungen der österreichischen Triangulierungspunkte 1. Ordnung und wie auch das Beispiel Rauris zeigen, muß in Österreich mit dem Auftreten von Lotabweichungen bis  $50^{\text{cc}}$  und mehr gerechnet werden. Es ist daher nicht tragbar, die Auswirkung dieser Lotabweichungen bei der Auswertung der Vertikalwinkelmessungen, bei der Reduktion elektronischer Schrägstrecken und auch bei der Richtungsmessung wie bisher allgemein zu vernachlässigen.

Früher war es eine relativ langwierige Aufgabe, für einen Festpunkt aus astronomischen Messungen die geographischen Koordinaten zu ermitteln. Mit den heute zur Verfügung stehenden Instrumenten und Meßmethoden ist es in verhältnismäßig kürzerer Zeit möglich, eine astronomische Ortsbestimmung mit der Genauigkeit zu erhalten, wie sie für die Auswertung der Vertikalwinkelmessungen ausreichend ist, etwa  $\pm 5^{\text{cc}}$ . Bei günstigen Witterungsverhältnissen kann in einer Nacht für einige leicht erreichbare Festpunkte eine solche astronomische Ortsbestimmung durchgeführt werden. Man sollte daher trachten, vor allem im Bergland für eine größere Anzahl von Festpunkten eine solche astronomische Ortsbestimmung durchzuführen. Im Flachland wird es wegen der im allgemeinen geringeren Visurneigungen genügen, die Lotabweichungen in einem weitmaschigen Bereich zu bestimmen. Hingegen ist im Bergland eine sehr engmaschige Bestimmung notwendig. Hierdurch bleibt eine Lotabweichungs-

interpolation oder die nur sehr bedingt mögliche rechnerische Trennung von Refraktion und Lotabweichung im Rahmen einer Ausgleichung auf nur wenige Punkte beschränkt, was natürlich eine Genauigkeitssteigerung zur Folge hat.

Da die Berechnungen im österreichischen Festpunktfeld nicht auf dem Niveausphäroid, sondern auf dem in einer bestimmten Lage fixierten BESSEL-Ellipsoid durchgeführt werden, erhält man nur relative Lotabweichungen, abhängig von der Lage des Ellipsoides gegenüber dem Geoid.

## 9,2 Gegenseitige Lage zwischen Geoid und Ellipsoid in Österreich

Die österreichischen Gebrauchskordinaten beruhen im Prinzip auf dem ehemaligen Gradmessungsnetz der österr.-ungar. Monarchie, das für die Zwecke der Landesvermessung brauchbar gemacht worden ist. Für dieses Netz ist der Hermannskogel Triangulierungshauptpunkt. Die astronomisch bestimmten geographischen Positionen wurden ohne Berücksichtigung einer Lotabweichung für das Ellipsoid übernommen. Die Orientierung des Netzes erfolgte mit dem astronomisch ermittelten Azimut Hermannskogel - Hundsheimer Kogel.

Für die sog. Zweite Ausgleichung des österreichischen Netzes 1. Ordnung wurden die geodätischen Koordinaten des Punktes Hermannskogel unverändert vom Gebrauchsnetz übernommen. Es war dies eine rein geometrische Ausgleichung.

Im Anschluß daran wurden von der Abteilung "Erdmessung" des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen als Vorbereitung für die Dritte Ausgleichung des österreichischen Netzes 1. Ordnung, in welche sämtliche astronomischen Beobachtungen, die modernen Grundlinienmessungen und die zur besseren Maßstabsicherung gemessenen Geodimeterseiten einbezogen werden, für alle Punkte 1. Ordnung die Lotabweichungen ermittelt. Beim Punkt Hermannskogel tritt hierbei wegen der Verwendung neuerer astronomischer Beobachtungen auch eine geringfügige Lotabweichung auf.

Durch eine Übertragung der Ergebnisse der Dritten Ausgleichung auf das BESSEL-Ellipsoid erhalte man eine mittlere Lage desselben gegenüber dem Geoid, wodurch sich einerseits eine Verdrehung und andererseits eine Kippung gegenüber der Lage des BESSEL-Ellipsoides vom Gebrauchsnetz im Punkt Hermannskogel ergeben könnte.

Um eine Abschätzung darüber anstellen zu können, in welcher Größenordnung sich eine solche Kippung des Ellipsoides auf die ellipsoidischen Höhen auswirken würde, wird im Punkt Hermannskogel ein  $d\eta = 10'' \approx 30^{\text{cc}}$  angenommen, ein Betrag, der ohne weiteres im Bereich des Möglichen liegt (so wurden z. B. vom Institut für Höhere Geodäsie der Technischen Universität Wien im Rahmen von Lotabweichungsmessungen im Raum von Wien für den Hermannskogel vorläufige Werte mit  $\xi_0 = + 0,5''$  und  $\eta_0 = + 7,6''$  ermittelt).

Durch diese angenommene Ellipsoidkipfung ergeben sich in den ellipsoidischen Höhen, bezogen auf die beiden Ellipsoidlagen, rund folgende Differenzen:

Graz:	3 m	Salzburg:	12 m
Linz:	7 m	Innsbruck:	17 m
Klagenfurt:	9 m	Bregenz:	23 m

Der von der TU. Wien ermittelte Wert von  $\eta_0 = 7,6''$  würde in Bregenz fast 18 m Höhendifferenz bewirken.

Zu dieser Differenz in den ellipsoidischen Höhen als Folge der gekippten Lage des Ellipsoides vom Gebrauchsnetz kommt noch der Höhenunterschied zwischen dem Ellipsoid und dem Geoid in den einzelnen Punkten als Folge der Massenunregelmäßigkeiten. Bei einer mittleren Lage des Ellipsoides gegenüber dem Geoid können diese Höhenunterschiede zwischen dem Geoid und dem Ellipsoid sowohl positives als auch negatives Vorzeichen haben.

Der im Unterabschnitt 2,3 aufgezeigte Fehler bei der Reduktion der Strecken auf Meeresniveau statt richtig auf das Ellipsoid wird somit bei Ellipsoidkipfung umso größer, je weiter man vom Triangulierungshauptpunkt weg ist. Es ist daher zu erwarten, daß dieser Fehler im Westen Österreichs am größten ist. Die tatsächliche Größe dieses Fehlers ist derzeit unbekannt.

Die durch die Zweite Ausgleichung des österreichischen Netzes 1. Ordnung sichtbar gewordenen Koordinatenspannungen gegenüber dem Gebrauchsnetz sind für die Ermittlung der Lotabweichungen hier belanglos, da sie unterhalb der Genauigkeit liegen, mit der die astronomische Ortsbestimmung für die Zwecke der Auswertung der Vertikalwinkelmessungen benötigt wird. Einer Änderung der geographischen Position um  $0,1^{\text{cc}}$  entspricht eine Lageänderung von rund 1 m. Es würde daher der geforderten Genauigkeit der astronomischen Ortsbestimmung von  $5^{\text{cc}}$  eine Lageunsicherheit von rund 50 m entsprechen. Durch die Koordinatenänderungen im Netz der Zweiten Ausgleichung gegenüber dem Gebrauchsnetz erhält man in den geodätisch abgeleiteten geographischen Positionen Änderungen bis zu rund  $0,4^{\text{cc}}$ , also Werte, die weit unter der benötigten Genauigkeit liegen und hier daher bedeutungslos sind.

9,3

#### Bestimmung der Lotabweichungen

Die Lotabweichungen erhält man in erster Linie durch Ermittlung der Lotabweichungskomponenten  $\xi$  und  $\eta$  aus den Differenzen zwischen den astronomisch abgeleiteten und den geodätisch errechneten geographischen Positionen, siehe Gleichungen (9.1) und (9.2).

Praktisch wird es kaum möglich sein, für alle Festpunkte die Lotabweichungen astronomisch ermitteln zu können. Man muß daher Methoden anwenden,

durch welche in ein Netz von Punkten mit astronomisch ermittelten Lotabweichungen, den Geländeverhältnissen entsprechend dicht gewählt, für die restlichen Festpunkte die Lotabweichungen durch Interpolation bestimmt werden können. Eine Möglichkeit hierfür besteht darin, die aus astronomischen Messungen abgeleiteten Lotabweichungen durch Anbringen der Lotkrümmung auf das Geoid zu reduzieren, auf dem Geoid für die restlichen Punkte die gesuchten Lotabweichungen zu interpolieren und schließlich die interpolierten Lotabweichungen durch Anbringen der Lotkrümmung in die Niveauflächen durch die Beobachtungsstandpunkte zu reduzieren. Durch die Verwendung von entsprechend reduzierten Gravimetermessungen kann diese Interpolation verbessert werden.

Wegen der Langwierigkeit der Berechnung der Lotkrümmungen wird man in einzelnen Fällen die unbekanntes Lotabweichungskomponenten in einem Ausgleichungsverfahren gemeinsam mit den Refraktionsänderungen bestimmen. Wegen der nur bedingt möglichen Trennung der Einflüsse von Lotabweichung und Refraktion kann eine solche Art der Lotabweichungsinterpolation bloß als eine mehr oder weniger gute Näherung betrachtet werden, vor allem dann, wenn wie z. B. bei einer polygonometrischen Punktbestimmung eine viel zu geringe Anzahl von überschüssigen Beobachtungen vorliegt.

#### 9,4 Die Lotkrümmung

Als Folge der Massenunregelmäßigkeiten und auch wegen der Abplattung sind benachbarte Niveauflächen zueinander nicht parallel und haben daher an verschiedenen Stellen verschieden große Abstände voneinander. Aus diesem Grund schließt die Tangente an die Flächennormale auf die Niveaufläche im Beobachtungsstandpunkt mit der Tangente an die Flächennormale auf das Geoid im entsprechenden Geoidpunkt den Winkel  $\varepsilon'$  ein, durch den die Lotkrümmung verifiziert wird.

Die Größenordnung der Lotkrümmung darf vor allem im Bergland nicht unterschätzt werden. So wurden z. B. in der Schweiz auf Punkten 1. Ordnung Lotkrümmungen bis zu  $9'' \pm 27^{\text{cc}}$  festgestellt. Es wird vermutet, daß noch größere Beträge auftreten können. Im Gotthardmeridian hat sich gezeigt, daß die Lotkrümmungen auf die Geoidhöhen einen Einfluß bis zu rund 40 cm erreichen können (siehe [13 a], S. 172). Zufolge eines ähnlichen Landschaftscharakters wie in der Schweiz muß somit auch im gebirgigen Teil von Österreich mit Lotkrümmungen von ähnlicher Größenordnung gerechnet werden und es wurden auch bis etwa  $15'' \pm 45^{\text{cc}}$  große Lotkrümmungen festgestellt.

Bei der Berechnung von ellipsoidischen Höhen wird der im Beobachtungsstandpunkt gemessene Vertikalwinkel mit Hilfe der im Beobachtungsstandpunkt ermittelten oder dorthin reduzierten interpolierten Lotabweichung auf das



Ellipsoid reduziert. Hier ist das Geoid nicht beteiligt, es ist daher auch keine Lotkrümmung anzubringen.

Leitet man entsprechend dem Unterabschnitt 10,7 aus gegenseitigen Vertikalwinkelmessungen genäherte geoidische Höhenunterschiede ab, kann man auf die Ermittlung der Lotkrümmung verzichten. Geht man jedoch bei der Berechnung der geoidischen Höhenunterschiede von den vorher berechneten ellipsoidischen Höhenunterschieden aus, dann müssen die Lotkrümmungen und die Abstände  $N_1$  zwischen Geoid und Ellipsoid in den Visurendpunkten berücksichtigt werden.

Es bestehen nun zwei Möglichkeiten, den Einfluß der Lotkrümmungen zu berücksichtigen. Entweder werden die gemessenen Vertikalwinkel in analoger Weise wie hinsichtlich der Lotabweichungen verbessert oder es werden die errechneten Höhenunterschiede wie beim Präzisionsnivellement reduziert.

Bei der ersten Methode wird für jeden einzelnen Standpunkt der Winkel zwischen der Tangente an die Flächennormale auf die Niveaufläche im Beobachtungsstandpunkt und der Tangente an die Flächennormale auf das Geoid im korrespondierenden Geoidpunkt ermittelt. Dieser Winkel  $\epsilon'$  kann wie die Lotabweichung in zwei Komponenten zerlegt werden. Für jede einzelne Visur ist dann nach Gleichung (9.3) der zugehörige Lotkrümmungsanteil zu berechnen und an den gemessenen Vertikalwinkel anzubringen. Auf diese sehr aufwendige Art der Berücksichtigung der Lotkrümmung wird z. B. in [73] hingewiesen, in [36] ist ein Beispiel für die Berechnung der Lotkrümmung angeführt. Als Ergebnis erhält man auf das Geoid reduzierte Vertikalwinkel. Bei dieser direkten Berechnung der Lotkrümmung sind die topographischen Verhältnisse der näheren und weiteren Umgebung des Beobachtungsstandpunktes zu berücksichtigen. Für diese sehrumfangreiche Berechnung könnte sich eine Erleichterung in solchen Fällen ergeben, wo ein digitales Geländemodell die Verwendung eines Computerprogrammes ermöglichen würde.

Die zweite Art der Berücksichtigung der Lotkrümmung ist praktisch identisch mit der orthometrischen Korrektur des geometrischen Nivellements, worauf bereits HELMERT hingewiesen hat. Diese Methode ist z. B. im § 29 des 5. Bandes von [32] enthalten, ebenso auch in [36].

Abgesehen von der Berücksichtigung der Lotkrümmungen bei der Berechnung von geoidischen Höhen kann es auch, wie bereits im Unterabschnitt 9,3 erwähnt, für die Interpolation von Lotabweichungen notwendig sein, für die einzelnen Festpunkte die Lotkrümmung zu ermitteln.

10 GEOIDISCHE HÖHENUNTERSCHIEDE

10,1 Allgemeines

Die Höhenformeln aus den Abschnitten 5 und 6 ergeben die Höhenunterschiede auf dem Ellipsoid. Unter Verwendung der Gleichung (3.7) können daraus geoidische Höhenunterschiede abgeleitet werden. Zusätzlich müssen noch die Auswirkungen der Lotkrümmung berücksichtigt werden. Außerdem muß man die im allgemeinen unbekanntesten Abstände  $N_i$  des Geoids vom Bezugsellipsoid kennen.

Man kann auch direkte Höhenformeln für das Geoid erstellen. In all diesen Formeln sind entweder einzelne Glieder unbekannt oder nur sehr umständlich zu berechnen. Es wird daher versucht, schließlich für die praktische Anwendung brauchbare Näherungen zu erhalten.

10,2 Vertikalwinkelmessungen, gemessene Schrägstrecken

Wendet man auf das Dreieck  $P_i - M_{(N)} - P_k$  in Abb. 2.1 den Sinussatz an, erhält man nach einigen Umformungen die zu Gleichung (5.1) korrespondierende Gleichung:

$$\Delta G_{i,k} = \frac{\bar{s}_{i,k(M)}}{\cos \frac{\gamma_{i,k(N)}}{2}} \cdot \cos(z_{i,k} + \delta_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(N)}}{2}) - [R_{k(N)} - R_{i(N)}] + [I_{i(EM)} - Z_{k(EM)}] \dots (10.1)$$

Die Auswertung dieser Formel für den geoidischen Höhenunterschied stößt allerdings auf Schwierigkeiten. Die Differenz  $[R_{k(N)} - R_{i(N)}]$  ist im allgemeinen unbekannt, sie kann zwar durch die Differenz  $(N_k - N_i)$  der Abstände des Geoids vom Ellipsoid näherungsweise ersetzt werden [siehe Gleichung (10.10)], die jedoch gleichfalls im allgemeinen unbekannt ist. Der Zentriwinkel  $\gamma_{i,k(N)}$  ist gleichfalls nicht bekannt, er kann aber aus Gleichung (2.30) abgeleitet werden, wenn die Lotabweichungen  $\epsilon_{i,k}$  und  $\epsilon_{k,i}$  gegeben sind. Der aus Gleichung (10.1) resultierende Höhenunterschied ist zusätzlich noch bezüglich der Lotkrümmung zu verbessern.

Die verwendeten Vertikalwinkel müssen auf die Höhenbezugspunkte der elektronischen Streckenmessung reduziert sein, daher sind in der Formel (10.1) auch die Instrument- und Zielhöhen der Streckenmessung enthalten.

Man kann nun andererseits auch von Gleichung (3.7) ausgehen und den um die Lotkrümmung verbesserten Höhenunterschied nach (5.1) einsetzen:

$$\Delta G_{i,k} = \frac{\bar{s}_{i,k(M)}}{\cos \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}} \cdot \cos(z_{i,k} + \delta_{i,k} + \epsilon_{i,k} + \epsilon'_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}) - (N_k - N_i) + [I_{i(EM)} - Z_{k(EM)}] \dots (10.2)$$

Wegen der Kleinheit der Korrekturwinkel kann man den Kosinus entwickeln und Gleichung (10.2) genähert auch so darstellen:

$$\Delta G_{i,k} \approx \bar{s}_{i,k(M)} \cdot \cos z_{i,k} - \bar{s}_{i,k(M)} \cdot \sin z_{i,k} \cdot (\delta_{i,k} + \varepsilon_{i,k} + \varepsilon'_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}) - (N_k - N_i) + [I_{i(EM)} - Z_{k(EM)}] \dots (10.3)$$

10,3 Vertikalwinkelmessungen, horizontale Strecken aus Koordinaten

Wollte man eine zu Gleichung (5.2) analoge Formel für geoidische Höhenunterschiede unter Verwendung von horizontalen Strecken ableiten, müßte man die aus Koordinaten ermittelte horizontale Strecke erst auf das Geoid reduzieren, woraus sich zusätzliche Schwierigkeiten ergeben.

Man kann jedoch auch hier wieder von der Gleichung (3.7) ausgehen, in die der bezüglich der Lotkrümmung verbesserte Höhenunterschied nach Gleichung (5.2) eingesetzt wird:

$$\Delta G_{i,k} = \frac{s_{i,k(E_M)}}{\cos \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}} \cdot \cot(z_{i,k} + \delta_{i,k} + \varepsilon_{i,k} + \varepsilon'_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}) - (N_k - N_i) + [I_{i(Th)} - Z_{k(Th)}] \dots (10.4)$$

Auch hier kann man eine Näherung ableiten, indem man die Kotangente nach Taylor entwickelt:

$$\Delta G_{i,k} \approx s_{i,k(E_M)} \cdot \cot z_{i,k} - \frac{s_{i,k(E_M)}}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot (\delta_{i,k} + \varepsilon_{i,k} + \varepsilon'_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}) - (N_k - N_i) + [I_{i(Th)} - Z_{k(Th)}] \dots (10.5)$$

10,4 Vertikalwinkelmessungen, Schrägstrecken aus Koordinaten

Wie im Unterabschnitt 10,7 gezeigt wird, ergeben sich bei der Berechnung geoidischer Höhenunterschiede aus horizontalen Strecken gewisse Schwierigkeiten. Es erscheint daher als zweckmäßig, auch dann, wenn keine gemessenen Schrägstrecken vorliegen, für die Berechnung geoidischer Höhenunterschiede die auf Schrägstrecken beruhenden Formeln zu verwenden. Hiefür müssen aus den Koordinaten und den ellipsoidischen Höhen der Visurendpunkte erst die zu der Vertikalwinkelmessung zugehörigen Schrägstrecken berechnet werden.

Als Näherungswert könnte man hiefür das Ergebnis aus Gleichung (2.25) verwenden. Einen genaueren Wert erhält man jedoch, wenn man aus dem Dreieck  $P_i - P_{k(i)} - P_k$  in der Abb. 2.1 die Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k}$  nach dem Kosinussatz errechnet:

$$\bar{s}_{i,k(K_{I,Z})} = \sqrt{s_{i,k(i)}^2 + (E_k + Z_k - E_i - I_i)^2 + 2 \cdot s_{i,k(i)} \cdot (E_k + Z_k - E_i - I_i) \cdot \sin \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}} \quad \dots (10.6)$$

Hierin ist  $s_{i,k(i)}$  die horizontale Strecke in der Höhe des Punktes  $P_i$ :

$$s_{i,k(i)} = \sqrt{(y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2} \cdot \left(1 - \frac{y_M^2}{2 \cdot R^2} + \frac{E_i + I_i}{R}\right) \quad \dots (10.7)$$

Bei längeren Strecken kann man das Reduktionsglied bezüglich der Projektionsverzerrung noch verfeinern:

$$\frac{y_M^2}{2 \cdot R^2} \rightarrow \frac{y_1^2 + y_1 \cdot y_2 + y_2^2}{6 \cdot R^2}$$

In Gleichung (10.2) bzw. (10.3) ist dann die gemessene Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k(M)}$  durch die aus Koordinaten abgeleitete Schrägstrecke  $\bar{s}_{i,k(K_{I,Z})}$  nach Gleichung (10.6) zu ersetzen. Dem entsprechend muß auch  $[I_i(EM) - Z_k(EM)]$  durch  $[I_i(Th) - Z_k(Th)]$  ersetzt werden.

10,5 Zusammenhang zwischen Gleichung (5.1) und Gleichung (10.1)

Setzt man Gleichung (5.1) in Gleichung (3.7) ein, wobei die ellipsoide Zenitdistanz durch Gleichung (2.27) ausgedrückt wird, kann man die Verbindung mit Gleichung (10.1) herstellen, wenn dort  $\gamma_{i,k(N)}$  durch Gleichung (2.30) ersetzt wird. In beiden Gleichungen kann man die Näherung (4.8) einführen, außerdem ist noch die Lotkrümmung zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \Delta G_{i,k} &= \bar{s}_{i,k(M)} \cdot \cos(z_{i,k} + \delta_{i,k} + \varepsilon_{i,k} + \varepsilon'_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}) - (N_k - N_i) = \\ &= \bar{s}_{i,k(M)} \cdot \cos(z_{i,k} + \delta_{i,k} + \varepsilon_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2} + \frac{\varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{k,i}}{2}) - [R_{k(N)} - R_{i(N)}] \end{aligned} \quad \dots (10.8)$$

Diese Gleichung kann man weiter umformen, bis sich die folgende Näherung ergibt:

$$R_{k(N)} - R_{i(N)} \approx (N_k - N_i) + \bar{s}_{i,k(M)} \cdot \sin(z_{i,k} + \delta_{i,k} + \varepsilon_{i,k} - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2}) \cdot \frac{\varepsilon_{i,k} - \varepsilon_{k,i}}{2} \quad \dots (10.9)$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite von Gleichung (10.9) hat bei einer Seitenlänge von 10 km und einem angenommenen Wert von  $2^c$  für die halbe Differenz der beiden Lotabweichungen eine Größenordnung von rund 3 mm und kann daher vernachlässigt werden. Somit ist letztlich der Zusammenhang zwischen den beiden Ausgangsgleichungen genähert gegeben durch

$$R_{k(N)} - R_{i(N)} \stackrel{!}{=} N_k - N_i \quad \dots\dots (10.10)$$

Dies ist eine Bestätigung für die Ungleichung (2.12)'.  
(2.12)'

10,6 Die Differenz  $N_k - N_i$

Die Größen  $N_i$  stellen die Abstände des Geoids vom Bezugsellipsoid in Richtung der Ellipsoidnormalen durch die Geländepunkte  $P_i$  dar (siehe Abb. 2.1). Wie bereits im Unterabschnitt 3,1 erwähnt, kann die in Gleichung (3.2) für die Höhen abgeleitete Näherung mit noch größerer Berechtigung auch für die Abstände  $N_i$  übernommen werden, so daß sie praktisch identisch sind mit den Erhebungen des Geoids über dem Ellipsoid.

Die Erhebungen  $N_i$  des Geoids über dem Ellipsoid können durch ein astronomisches oder ein astronomisch-gravimetrisches Nivellement ermittelt werden, man erhält sie aber auch als Differenz zwischen den zugeordneten ellipsoidischen und geoidischen Höhen.

Da in Österreich nur ein Gebrauchshöhensystem vorliegt und keine ellipsoidischen und echt geoidischen Höhen vorliegen, konnte bisher die Differenz  $N_k - N_i$  nicht berücksichtigt werden. WUNDERLIN hat nun z. B. in [73] für den Bereich der Heerbrugger Basis ellipsoidische und geoidische Höhen ausgewiesen und daraus die Geoiderhebungen  $N_i$  abgeleitet. Für die in diesem Netz gemessenen Zenitdistanzen mit Visurweiten von rund 5 km bis etwa 17 km haben die Differenzen ( $N_k - N_i$ ) Werte zwischen 0,00 m und 0,64 m. Die auf einem Standpunkt gemessenen Zenitdistanzen weisen große Unterschiede in den zugehörigen ( $N_k - N_i$ )-Werten auf. WUNDERLIN weist in [73] auch darauf hin, daß zwischen den Punkten "Basis Nord" und "Hoher Freschen" auf eine Entfernung von rund 14 km das Geoid um fast einen Meter ansteigt.

Aus der Tabelle in [73] mit der Zusammenstellung der verschiedenen Höhen ersieht man, daß die konventionell berechneten Höhen vergleichsweise eine gute Übereinstimmung mit den geoidischen Höhen zeigen, was man als Bestätigung für die im Unterabschnitt 10,7 vorgeschlagene Näherungsmethode werten kann.

Wie schon im Unterabschnitt 9,4 erwähnt wurde, kann bei einer genäherten Ermittlung der geoidischen Höhenunterschiede nach Unterabschnitt 10,7 auf die Bestimmung der Differenz ( $N_k - N_i$ ) verzichtet werden. Nur dann ist die Berechnung dieser Differenz notwendig, wenn man ausgehend von ellipsoidischen Höhenunterschieden die geoidischen Höhenunterschiede ableiten will.

10,7 Genäherte geoidische Höhenunterschiede aus gegenseitigen Vertikalwinkelmessungen

10,71 Verwendung von Schrägstrecken

Auf dem Wege zu einer Näherungsmethode für die Berechnung geoidischer Höhenunterschiede wird vorerst die Differenz zwischen einem nach konventioneller Art berechneten Höhenunterschied  $\Delta H_{i,k}$  und einem geoidischen Höhenunterschied  $\Delta G_{i,k}$  untersucht.

Für diesen Vergleich wird der geoidische Höhenunterschied nach Gleichung (10.2) verwendet und zwar in der durch Gleichung (10.3) gegebenen Näherung.

Bei der Berechnung des konventionellen Höhenunterschiedes geht man von Gleichung (5.1) aus, in der statt der ellipsoidischen Zenitdistanz  $\{_{i,k}$  die um einen genäherten Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}^!$  verbesserte gemessene Zenitdistanz  $z_{i,k}$  verwendet wird. Wenn man dies analog zu Gleichung (10.2) entwickelt, erhält man mit ausreichender Näherung

$$\Delta H_{i,k}^! \approx \bar{s}_{i,k}(M) \cdot \cos z_{i,k} - \bar{s}_{i,k}(M) \cdot \sin z_{i,k} \cdot \left( \delta_{i,k}^! - \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2} \right) + (I_i - Z_k) \dots (10.11)$$

Die Differenz zwischen dem geoidischen Höhenunterschied  $\Delta G_{i,k}$  und dem konventionellen Höhenunterschied  $\Delta H_{i,k}^!$  beträgt dann

$$\Delta G_{i,k} - \Delta H_{i,k}^! = -\bar{s}_{i,k}(M) \cdot \sin z_{i,k} \cdot \left( \delta_{i,k}^! + \varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{i,k}^! \right) - (N_k - N_i) \dots (10.12)$$

Hierin stellt  $\delta_{i,k}^!$  den noch verbliebenen restlichen Refraktionswinkel dar:

$$\delta_{i,k} = \delta_{i,k}^! + \delta_{i,k}^{\prime\prime} \dots (10.13)$$

Refraktionseinfluß und Einfluß von Lotabweichung und Lotkrümmung werden nun getrennt:

$$\Delta G_{i,k} - \Delta H_{i,k}^! = -\bar{s}_{i,k}(M) \cdot \sin z_{i,k} \cdot \delta_{i,k}^{\prime\prime} - \bar{s}_{i,k}(M) \cdot \sin z_{i,k} \cdot (\varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{i,k}^!) - (N_k - N_i) \dots (10.14)$$

Nun wird ein Zusammenhang zwischen der Summe  $\varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{i,k}^!$  von Lotabweichung und Lotkrümmung und der Differenz  $(N_k - N_i)$  hergestellt. Dazu wird in Abb. 10.1 die Ellipsoidsehne  $s_{i,k}^!(E)$  bis zum korrespondierenden Punkt  $P_{i(G)}$  auf dem Geoid parallel verschoben. Man erhält dann den Winkel  $\bar{\varepsilon}_{i,k}$  zwischen der Parallelen zur Ellipsoidsehne und der Geoidsehne. Er setzt sich zusammen aus dem Lotabweichungs- und Lotkrümmungsanteil im Punkt  $P_i$ ,  $\varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{i,k}^!$ , vermehrt um den halben Zenitwinkel  $\frac{1}{2} \cdot \gamma_{i,k}(E)$  (zwischen der Tangente an das Ellipsoid und der Ellipsoidsehne), vermindert um den Winkel  $\Delta \varepsilon_{i,k}$  zwischen der Tangente an das Geoid und der Geoidsehne:

$$\bar{\epsilon}_{i,k} = \epsilon_{i,k} + \epsilon'_{i,k} + \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2} - \Delta\epsilon_{i,k} \quad \dots (10.15)$$

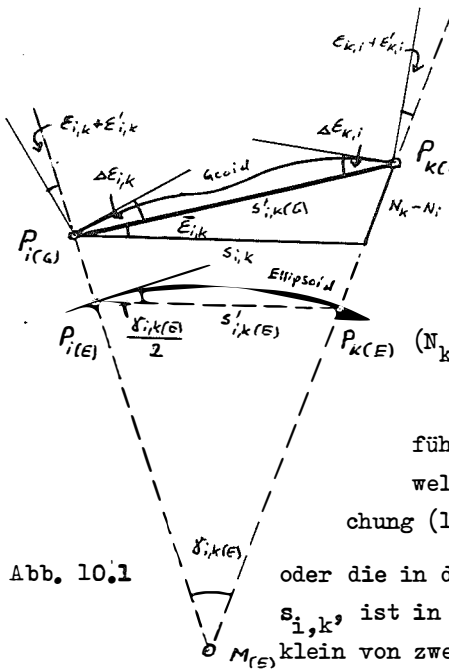


Abb. 10.1

Wegen der Kleinheit des Winkels  $\bar{\epsilon}_{i,k}$  und des relativ geringen Betrages der Differenz  $(N_k - N_i)$ , im allgemeinen im Bereich einiger Dezimeter, kann man in Abb. 10.1 den Winkel zwischen den Seiten  $s_{i,k}$  und  $(N_k - N_i)$  genähert als rechten Winkel betrachten. Damit ist in ausreichender Näherung

$$(N_k - N_i) \approx s_{i,k} \cdot \bar{\epsilon}_{i,k} \quad \dots (10.16)$$

Hier ist noch Gleichung (10.15) einzuführen. Der Fehler, der sich daraus ergibt, welche horizontale Strecke man für die Gleichung (10.16) nimmt,  $s'_{i,k}(E)$ ,  $s'_{i,k}(G)$ ,  $s_{i,k}(E_M)$  oder die in der Abb. 10.1 eingezeichnete Dreiecksseite  $s_{i,k}$ , ist in der Auswirkung auf die Differenz  $(N_k - N_i)$  klein von zweiter Ordnung und kann daher vernachlässigt werden.

Unbekannt ist hierbei nur der Winkel  $\Delta\epsilon_{i,k}$  zwischen der Tangente an das Geoid im Punkt  $P_i(G)$  und der Geoidsehne  $s'_{i,k}(G)$ . An sich müßte es möglich sein, in ähnlicher Art und Weise, wie dies MORITZ in [56] und [57] für die Lichtkurve im Zusammenhang mit der Berechnung des Refraktionswinkels gemacht hat, auch für die Schnittkurve des Geoids, wie sie in Abb. 10.1 dargestellt ist, eine Differentialgleichung aufzustellen. Der Winkel  $\Delta\epsilon_{i,k}$  könnte dann durch eine Integration über den gesamten Weg von  $P_i(G)$  nach  $P_k(G)$  errechnet werden. Für die Rückvisur von  $P_k$  nach  $P_i$  müßte dann durch eine neuerliche Integration über den Weg von  $P_k(G)$  nach  $P_i(G)$  der im allgemeinen von  $\Delta\epsilon_{i,k}$  als verschiedene anzunehmende Winkel  $\Delta\epsilon_{k,i}$  berechnet werden.

Für die praktische Durchführung der Vertikalwinkelmessung im Rahmen eines normalen Feldarbeitsbetriebes ist jedoch aus wirtschaftlichen Gründen die als Voraussetzung für eine solche Integration notwendige Datenerhebung entlang des Visurweges nicht durchführbar, weshalb hier auch die dafür notwendige Ableitung nicht durchgeführt wird.

Um für die Differenz  $(N_k - N_i)$  einen positiven Wert erhalten zu können, muß die Lotabweichung  $\epsilon_{i,k}$  entsprechend der Definition, wie sie nach Gleichung (2,27) eingeführt wurde, einen negativen Wert haben. Die Folge davon ist, daß das zweite und dritte Glied auf der rechten Seite von Gleichung (10.14) sich teilweise gegenseitig aufheben, wenn man Gleichung (10.16)

unter Berücksichtigung von Gleichung (10.15) einführt. Hierbei muß aber noch genähert gesetzt werden:

$$\bar{s}_{i,k(M)} \cdot \sin z_{i,k} \doteq s_{i,k(E_M)} \quad \dots (10.17)$$

Dies verursacht, wie bereits erwähnt, nur einen Fehler, der klein von zweiter Ordnung ist. Man erhält dann

$$\Delta G_{i,k} - \Delta H_{i,k}^! = -s_{i,k(E_M)} \cdot \delta_{i,k}'' - s_{i,k(E_M)} \cdot \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2} + s_{i,k(E_M)} \cdot \Delta \varepsilon_{i,k} \quad \dots (10.18)$$

Beim Vorliegen von nur einseitigen Vertikalwinkelmessungen ist dies die Differenz zwischen dem geoidischen und dem konventionellen Höhenunterschied. Hierin kann das Krümmungsglied noch berechnet werden, während die beiden anderen Glieder unbekannt sind.

Liegen hingegen gegenseitige Vertikalwinkelmessungen vor, kann man erwarten, daß der durch Gleichung (10.18) definierte Fehler weitgehend verringert wird. Der Fehler zwischen dem Mittelwert des geoidischen Höhenunterschiedes aus Hin- und Rückmessung und dem entsprechenden Mittelwert des konventionellen Höhenunterschiedes ist dann gegeben durch:

$$\frac{1}{2} \cdot (\Delta G_{i,k} - \Delta G_{k,i}) - \frac{1}{2} \cdot (\Delta H_{i,k}^! - \Delta H_{k,i}^!) = -\frac{1}{2} \cdot s_{i,k(E_M)} \cdot (\delta_{i,k}'' - \delta_{k,i}'') + \frac{1}{2} \cdot s_{i,k(E_M)} \cdot (\Delta \varepsilon_{i,k} - \Delta \varepsilon_{k,i}) \quad \dots (10.19)$$

Das in Gleichung (10.18) enthaltene Krümmungsglied fällt bei der Bildung des Mittels aus Hin- und Rückmessung heraus. Das erste Glied auf der rechten Seite von Gleichung (10.19) beinhaltet die Differenz der verbliebenen restlichen Refraktionseinflüsse auf beiden Visurendpunkten. Das zweite Glied auf der rechten Seite von Gleichung (10.19) stellt nun den eigentlichen Fehler der konventionellen Höhenunterschiedsberechnung gegenüber dem geoidischen Höhenunterschied dar. Im allgemeinen vermutet man beim Geoid eine positive Krümmung, es wird daher der Faktor  $(\Delta \varepsilon_{i,k} - \Delta \varepsilon_{k,i})$  die tatsächliche Differenz zwischen diesen beiden Winkeln beinhalten, wodurch das gesamte zweite Glied als im allgemeinen sehr klein zu betrachten ist. Nimmt man für diese Differenz einen Wert von  $10^{\text{cc}}$  an, erreicht dieses Glied bei einer Seitenlänge von 10 km eine Größe von 8 mm, ein Betrag, der im allgemeinen kleiner sein wird als das Glied, das den restlichen Refraktionseinfluß beinhaltet.

Die Gleichung (10.19) bedeutet nun praktisch, daß bei der Höhenunterschiedsberechnung mit Gleichung (5.1), also bei Verwendung von Schrägstrecken, unter der Voraussetzung einer möglichst guten Erfassung der Refraktionseinflüsse, aber ohne Berücksichtigung des Einflusses von Lotabweichung und Lotkrümmung und ohne Angabe der Differenz  $(N_k - N_i)$  das Mittel



aus dem Höhenunterschied von Hin- und Rückmessung bei gegenseitig gemessenen Vertikalwinkeln praktisch mit hinreichender Genauigkeit dem geoidischen Höhenunterschied gleich gesetzt werden kann. Liegt keine elektromagnetisch gemessene Schrägstrecke vor, dann ist hierfür eine aus Koordinaten und ellipsoidischen Höhen abgeleitete Schrägstrecke nach Gleichung (10.6) zu verwenden.

BRUNNER hat in seiner Dissertation [9] aus einer anderen Ableitung ein ähnliches Ergebnis erhalten, er leitet aber daraus zum Teil etwas andere Schlüsse ab.

### 10.72 Verwendung von horizontalen Strecken

Verwendet man für diese Untersuchung horizontale Strecken, verwendet man für die Differenz zwischen dem geoidischen Höhenunterschied und dem konventionell errechneten Höhenunterschied einerseits die Gleichung (10.5), andererseits die aus Gleichung (5.2) durch eine Entwicklung nach Taylor abgeleitete Höhenformel:

$$\Delta H_{i,k}^! \doteq s_{i,k}(E_M) \cdot \cot z_{i,k} - \frac{s_{i,k}(E_M)}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot (\delta_{i,k}^! - \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2}) + (I_i - Z_k) \dots\dots (10.20)$$

Die Differenz zwischen den Gleichungen (10.5) und (10.20) ergibt die zur Gleichung (10.12) korrespondierende Gleichung:

$$\Delta G_{i,k} - \Delta H_{i,k}^! = - \frac{s_{i,k}(E_M)}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot (\delta_{i,k}'' + \varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{i,k}^!) - (N_k - N_i) \dots\dots (10.21)$$

Der in Gleichung (10.21) enthaltene Faktor  $1/\sin^2 z_{i,k}$  hat zur Folge, daß nur bei horizontalen Visuren der gleiche Effekt wie bei Gleichung (10.14) auftritt. Bei steileren Visuren wird jedoch der Fehler zwischen der geoidischen und der konventionellen Höhenunterschiedsermittlung größer sein als bei der Verwendung von Schrägstrecken, worauf gleichfalls BRUNNER in seiner Dissertation [9] bereits hingewiesen hat.

Gleichung (10.21) wird nun so umgeformt, daß Gleichung (10.16) direkt anwendbar ist. Dazu wird auf der rechten Seite von Gleichung (10.21) das Glied  $s_{i,k}(E_M) \cdot (\varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{i,k}^!)$  addiert und wiederum subtrahiert:

$$\begin{aligned} \Delta G_{i,k} - \Delta H_{i,k}^! = & - \frac{s_{i,k}(E_M)}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot \delta_{i,k}'' - \left[ \frac{s_{i,k}(E_M)}{\sin^2 z_{i,k}} - s_{i,k}(E_M) \right] \cdot (\varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{i,k}^!) - \\ & - s_{i,k}(E_M) \cdot \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2} + s_{i,k}(E_M) \cdot \Delta \varepsilon_{i,k} \dots\dots (10.22) \end{aligned}$$

Den wesentlichsten Unterschied zwischen den Gleichungen (10.18) und (10.22) bildet das zweite Glied auf der rechten Seite von Gleichung (10.22). Durch Herausheben von  $s_{i,k}(E_M)$  kann dieses Glied umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \Delta G_{i,k} - \Delta H_{i,k}^! &= - \frac{s_{i,k}(E_M)}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot \delta_{i,k}'' - s_{i,k}(E_M) \cdot \cot^2 z_{i,k} \cdot (\varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{i,k}^!) - \\ &- s_{i,k}(E_M) \cdot \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2} + s_{i,k}(E_M) \cdot \Delta \varepsilon_{i,k} \quad \dots (10.23) \end{aligned}$$

Beim Vorliegen gegenseitiger Vertikalwinkelmessungen erhält man die zur Gleichung (10.19) korrespondierende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (\Delta G_{i,k} - \Delta G_{k,i}) - \frac{1}{2} \cdot (\Delta H_{i,k}^! - \Delta H_{k,i}^!) &= - \frac{1}{2} \cdot \frac{s_{i,k}(E_M)}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot (\delta_{i,k}'' - \delta_{k,i}'') - \\ - \frac{1}{2} \cdot s_{i,k}(E_M) \cdot \cot^2 z_{i,k} \cdot (\varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{i,k}^! - \varepsilon_{k,i} - \varepsilon_{k,i}^!) &+ \frac{1}{2} \cdot s_{i,k}(E_M) \cdot (\Delta \varepsilon_{i,k} - \Delta \varepsilon_{k,i}) \\ &\dots (10.24) \end{aligned}$$

Hierin wurde mit hinreichender Genauigkeit  $\sin^2 z_{i,k} \doteq \sin^2 z_{k,i}$  und  $\cot^2 z_{i,k} \doteq \cot^2 z_{k,i}$  gesetzt.

Das erste Glied auf der rechten Seite von Gleichung (10.24) zeigt bei starker Visurneigung bereits ein etwas anderes Ergebnis als in Gleichung (10.19). Die wesentlichste Auswirkung hat jedoch das zweite Glied auf der rechten Seite von Gleichung (10.24), wo der Einfluß von Lotabweichung und Lotkrümmung mit dem Quadrat der <sup>A</sup>otangente der Zenitdistanz multipliziert wird. Es wird also vor allem bei steileren Visuren ein relativ großer Unterschied zwischen dem geoidischen und dem konventionell berechneten Höhenunterschied auftreten.

## 10,73 Folgerungen

Aus den beiden vorhergehenden Unterabschnitten ergeben sich für die praktische Feldarbeit gewisse Folgerungen.

Die in Gleichung (10.19) enthaltenen Reduktionswinkel  $\Delta \varepsilon_{i,k}$  und  $\Delta \varepsilon_{k,i}$  werden im allgemeinen immer kleiner werden, je kürzer die Visurlängen  $s_{i,k}$  sind. Es wird dann auch ihre Differenz sich immer mehr der Null nähern. Durch kürzere Visuren wird außerdem auch eine starke Verringerung der Refraktionseinflüsse erreicht. Es ist daher nach Möglichkeit anzustreben, im allgemeinen für die Berechnung von geoidischen Höhenunterschieden nur die im Triangulierungsnetz 5. Ordnung auftretenden Visuren von etwa 1 km bis 2 km Länge heranzuziehen und weitere Visuren nur dann zu verwenden, wenn keine andere Möglichkeit vorhanden ist.

Wie die Gleichung (10.24) zeigt, können Höhenunterschiedsberechnungen unter Verwendung von horizontalen Strecken nur bei nahezu horizontalen Visuren als genähert geoidisch betrachtet werden. Bei Steilvisuren sind größere Fehler gegenüber den geoidischen Höhenunterschieden zu erwarten.

Um nun ohne Berücksichtigung der Lotabweichungs- und Lotkrümmungseinflüsse und ohne Kenntnis der Differenz ( $N_k - N_i$ ) gut genäherte geoidische Höhenunterschiede ableiten zu können, sind also einige Voraussetzungen notwendig. Es müssen unbedingt gegenseitig gemessene Vertikalwinkel vorliegen, nur einseitig vorhandene Vertikalwinkelmessungen dürfen nicht verwendet werden. Für die Höhenunterschiedsberechnung sind unbedingt Schrägstrecken zu verwenden. Sind keine gemessenen Schrägstrecken da, sind aus den Koordinaten und den ellipsoidischen Höhen der Visurendpunkte nach Gleichung (10.6) die zu der Vertikalwinkelmessung zugehörigen Schrägstrecken abzuleiten. Hierbei ist zu beachten, daß für die Hin- und für die Rückmessung im allgemeinen verschieden große Schrägstrecken zu erwarten sind, wegen der unterschiedlichen Instrument- und Zielhöhen. Schließlich sind die gemessenen Vertikalwinkel möglichst gut bezüglich der Refraktion zu korrigieren. Für eine möglichst gute Ermittlung der Refraktionswinkel ist jedoch die Kenntnis der in den Beobachtungsstandpunkten wirksamen Lotabweichungen notwendig.

11 GEOMETRISCHES NIVELLEMENT ALS SONDERFALL DES TRIGONOMETRISCHEN NIVELLEMENTS

Das geometrische Nivellement kann als Sonderfall des trigonometrischen Nivellements betrachtet werden, für den die gemessene Zenitdistanz mit  $z_{i,k} = 100^{\text{E}}$  einzuführen ist.

Es wird nun entsprechend dem Arbeitsablauf beim geometrischen Nivellement die Formel für die trigonometrische Höhenmessung angewendet. Vom Standpunkt  $P_i$  aus wurde der Rückblick  $P_R$  und hernach der Vorblick  $P_V$  angezielt. Der Gesamthöhenunterschied von  $P_R$  nach  $P_V$  ergibt sich als Differenz des Höhenunterschiedes von  $P_i$  nach  $P_V$  weniger dem Höhenunterschied von  $P_i$  nach  $P_R$ . Bei Verwendung gemessener Schrägstrecken kann man von Gleichung (10.3) ausgehen, jedoch ohne Lotkrümmungsanteil, da auch beim geometrischen Nivellement die Lotkrümmung erst später berücksichtigt wird.

$$\begin{aligned} \Delta G_{R,V} = & \bar{s}_{i,V(M)} \cdot \cos z_{i,V} - \bar{s}_{i,V(M)} \cdot \sin z_{i,V} \cdot (\delta_{i,V} + \varepsilon_{i,V} - \frac{Y_{i,V(E)}}{2}) + (I_i - Z_V) - \\ & - (N_V - N_i) - \bar{s}_{i,R(M)} \cdot \cos z_{i,R} + \bar{s}_{i,R(M)} \cdot \sin z_{i,R} \cdot (\delta_{i,R} + \varepsilon_{i,R} - \frac{Y_{i,R(E)}}{2}) - \\ & - (I_i - Z_R) + (N_R - N_i) \quad \dots\dots (11.1) \end{aligned}$$

Wendet man hierauf die Gleichung (10.16) an, kann man wegen der geringen Punktentfernungen beim geometrischen Nivellement das Ellipsoid und das Geoid durch eine praktisch mit der jeweiligen Sehne identischen Gerade ersetzen. Bei einer Entfernung von rund 113 m weicht die in Abb. 10.1 dargestellte Schnittkurve des Ellipsoids von der Sehne erst um 1 mm ab. Es können daher der halbe Zenitwinkel und der Reduktionswinkel  $\Delta \varepsilon_{i,k}$  praktisch vernachlässigt werden.

Für den Fall des geometrischen Nivellements ist außerdem

$$z_{i,V} = z_{i,R} = 100^{\text{E}} \quad \dots\dots (11.2)$$

Damit erhält nun die Gleichung (11.1) folgende Form:

$$\begin{aligned} \Delta G_{R,V} = & (Z_R - Z_V) + \bar{s}_{i,R(M)} \cdot \delta_{i,R} - \bar{s}_{i,V(M)} \cdot \delta_{i,V} - \bar{s}_{i,R(M)} \cdot \frac{Y_{i,R(E)}}{2} + \\ & + \bar{s}_{i,V(M)} \cdot \frac{Y_{i,V(E)}}{2} \quad \dots\dots (11.3) \end{aligned}$$

Diese vereinfachte Form gilt nur dann, wenn wie beim geometrischen Nivellement die Bildkurven des Ellipsoids und des Geoids durch Gerade ersetzt werden können.

Sind die Seiten  $\bar{s}_{i,V(M)}$  und  $\bar{s}_{i,R(M)}$  gleich lang, wie es beim geometrischen Nivellement angestrebt wird, fallen die Krümmungsglieder heraus. Ansonsten wird nur die Differenz dieser beiden Glieder wirksam. Bei der Refraktion ist die Differenz der beiden Refraktionswinkel wirksam.

Das entscheidende Glied für die Höhenunterschiedsbestimmung ist selbstverständlich die Zielhöhendifferenz ( $Z_R - Z_V$ ).

Die Gleichung (11.3) zeigt, daß das geometrische Nivellement nur ein Sonderfall des trigonometrischen Nivellements ist, für den die Gleichung (11.2) gilt bei sehr kurzen Zielweiten.

Bei Verwendung horizontaler Strecken kann man auch von Gleichung (10.5) ausgehen, woraus man die zu Gleichung (11.1) analoge Gleichung erhält:

$$\begin{aligned} \Delta G_{R,V} = & s_{i,V(E_M)} \cdot \cot(100^g + \delta_{i,V} + \varepsilon_{i,V} - \frac{\gamma_{i,V(E)}}{2}) + (I_i - Z_V) - (N_V - N_i) - \\ & - s_{i,R(E_M)} \cdot \cot(100^g + \delta_{i,R} + \varepsilon_{i,R} - \frac{\gamma_{i,R(E)}}{2}) - (I_i - Z_R) + (N_R - N_i) \\ & \dots\dots (11.4) \end{aligned}$$

Da  $\cot(100^g + \dots) = -\tan(\dots)$  ist, kann wegen Kleinheit der durch die Punkte dargestellten Winkelkombination die Tangente durch den Bogen ersetzt werden. So kommt man schließlich wieder auf die durch die Gleichung (11.3) ausgedrückte Endform. Da beim geometrischen Nivellement immer eine horizontale Visur vorliegt, erhält man das selbe Ergebnis, unabhängig davon, ob man von Schrägstrecken oder von horizontalen Strecken ausgeht.

12 ERMITTLUNG VON REFRAKTION UND LOTABWEICHUNG AUS GEGENSEITIGEN  
VERTIKALWINKELMESSUNGEN

12,1 Allgemeines

Liegen in einer Berechnungsgruppe fast ausschließlich gegenseitig gemessene Vertikalwinkel vor, können durch eine getrennte Ausgleichung vor der Berechnung der Höhenunterschiede und vor der Ausgleichung der Höhen die Verbesserungen der Refraktionskonstanten und die <sup>L</sup>otabweichungskomponenten bestimmt werden. Hiefür müssen die gegenseitig gemessenen Vertikalwinkel jeweils dieselben Stand- und Zielpunkte haben und außerdem für die Hin- und Rückmessung auf die selben Höhenbezugspunkte reduziert sein.

Sollen in einer Berechnungsgruppe auch <sup>L</sup>otabweichungskomponenten bestimmt werden, müssen wenigstens für zwei Punkte die <sup>L</sup>otabweichungskomponenten vorgegeben sein. Diese Punkte sollen möglichst weit auseinander liegen, damit man eine Lotabweichungsinterpolation erreicht. Das Ergebnis wird umso besser sein, je mehr Punkte mit bekannter <sup>L</sup>otabweichung in die Ausgleichung einbezogen werden können, da im Rahmen einer solchen Ausgleichung eine echte Trennung der Refraktions- und Lotabweichungseinflüsse nur sehr bedingt möglich ist.

Die Gleichung (2.28) wird für die Ermittlung der Refraktionswinkel und der <sup>L</sup>otabweichungsanteile etwas umgruppiert:

$$\pi + \gamma_{i,k(E)} - (z_{i,k} + z_{k,i}) = (\delta_{i,k} + \delta_{k,i}) + (\varepsilon_{i,k} + \varepsilon_{k,i}) \quad \dots (12.1)$$

Die linke Seite der Gleichung (12.1) ist bekannt. Für die Summe der beiden Refraktionswinkel kann eine der Gleichungen (8.9), (8.10) oder (8.11) eingeführt werden, die Lotabweichungsanteile werden durch Gleichung (9.3) ausgedrückt. Damit wird Gleichung (12.1) zu

$$\pi + \gamma_{i,k(E)} - (z_{i,k} + z_{k,i}) = \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2} \cdot \left( \frac{k_i}{\sin z_{i,k}} + \frac{k_k}{\sin z_{k,i}} \right) + \xi_i \cdot \cos \alpha_{i,k} + \eta_i \cdot \sin \alpha_{i,k} + \xi_k \cdot \cos \alpha_{k,i} + \eta_k \cdot \sin \alpha_{k,i} \quad \dots (12.2)$$

Die Refraktionswinkel können auch durch eine der anderen angeführten Gleichungen ausgedrückt werden. Je nach der Situation werden alle oder nur einige der Glieder von Gleichung (12.2) verwendet.

12,2

Einfache Berechnung durch Mittelbildung

In einzelnen Fällen mag es ausreichend sein, aus Gleichung (12.1) unter Vernachlässigung des Lotabweichungseinflusses die Refraktionswinkel zu berechnen und daraus für eine Berechnungsgruppe durch einfache Mittelbildung einen mittleren Refraktionskoeffizienten abzuleiten.

Für die einzelnen gegenseitigen Vertikalwinkelmessungen erhält man aus einer der Gleichungen (8.4), (8.7) oder (8.8) den zugehörigen Refraktionskoeffizienten, abhängig davon, ob gemessene Schrägstrecken oder nur horizontale Strecken vorliegen:

$$k_i = \frac{(\delta_{i,k}^{cc} + \delta_{k,i}^{cc}) \cdot R_i(E)}{Q^{cc} \cdot \bar{s}_{i,k}(M)} \dots\dots (12.3)$$

$$k_i = \frac{(\delta_{i,k}^{cc} + \delta_{k,i}^{cc})}{\gamma_{i,k}^{cc}} \cdot \sin z_{i,k} \dots\dots (12.4)$$

Hiefür sei ein Beispiel angeführt, für welches die Vernachlässigung der Lotabweichungsanteile nicht mehr zulässig ist. Im Triangulierungsoperat St-270/1969 wurden z. B. auf dem Kartenblatt 98 zwischen einigen Punkten Strecken- und Höhenwinkelmessungen durchgeführt. In der Tabelle 9 wurden die aus Gleichung (12.1) unter Vernachlässigung der Lotabweichung ermittelte Summe der Refraktionswinkel und die daraus nach Gleichung (12.3) abgeleiteten Refraktionskoeffizienten zusammengestellt:

Von-nach	Höhenwinkel	$\sum \delta^{cc}$ aus (12.1)	$k_i$ aus (12.3)	$\sum \delta^{cc}$ aus (8.4)	$\sum \epsilon^{cc}$ aus (12.1)
87- 94	0 <sup>6</sup> 68 <sup>c</sup>	+ 12,3	0,1627	+ 9,83	+ 2,5
92-169	13 <sup>6</sup> 85 <sup>c</sup>	+ 96,6	0,2422	+ 51,85	+ 44,7
92-171	5 <sup>6</sup> 34 <sup>c</sup>	+ 98,2	0,3255	+ 39,22	+ 59,0
94-147	7 <sup>6</sup> 71 <sup>c</sup>	+ 39,7	0,1757	+ 29,38	+ 10,3
94-169	10 <sup>6</sup> 53 <sup>c</sup>	+ 128,4	0,2461	+ 67,83	+ 60,6
94-171	3 <sup>6</sup> 89 <sup>c</sup>	+ 127,0	0,3087	+ 53,49	+ 73,5

Tabelle 9

Aus den k-Werten, die den gegenseitigen Vertikalwinkeln von und nach einem Punkt zugeordnet sind, kann man für jeden Punkt einen Mittelwert berechnen, ebenso auch ein Gesamtmittel:

Punkt	n	k(Mittel)	Punkt	n	k(Mittel)	Gesamtmittel
87	1	0,1627	147	1	0,1757	k = 0,2435
92	2	0,2838	169	2	0,2442	
94	4	0,2233	171	2	0,3171	

Die so errechneten k-Werte sind durch Lotabweichungseinflüsse verfälscht, sie enthalten aber auch noch andere Fehlereinflüsse.

Berechnet man andererseits aus Gleichung (8.4) mit dem angenommenen Wert  $k = 0,13$  die Summe der beiden Refraktionswinkel, in Tabelle 9 in der vorletzten Spalte ausgewiesen, erhält man aus Gleichung (12.1) die Summe der beiden Lotabweichungsanteile von Hin- und Rückmessung.

Da auf diese Weise ohne zusätzliche Angaben eine exakte Trennung der beiden Einflüsse, Refraktion und Lotabweichung, nicht möglich ist, kann man damit im allgemeinen nur einen groben Überblick erhalten.

### 12,3 Fehlergleichungen

Bringt man in der Gleichung (12.2) aus Unterabschnitt 12,1 alle Glieder auf die linke Seite, wird sich nach der Ausgleichung im allgemeinen ein von Null verschiedener Restfehler  $v_{i,k}$  ergeben. Daraus erhält man die für die Ausgleichung notwendige Fehlergleichung:

$$v_{i,k}^{cc} = - \frac{\gamma_{i,k}^{cc}(E)}{2 \cdot \sin z_{1,k}} \cdot k_i - \frac{\gamma_{i,k}^{cc}(E)}{2 \cdot \sin z_{k,i}} \cdot k_k - \xi_i^{cc} \cdot \cos \alpha_{i,k} - \eta_i^{cc} \cdot \sin \alpha_{i,k} - \xi_k^{cc} \cdot \cos \alpha_{k,i} - \eta_k^{cc} \cdot \sin \alpha_{k,i} + [\pi + \gamma_{i,k}^{cc}(E) - (z_{1,k} + z_{k,i})]^{cc} \dots (12.5)$$

Je nach der Situation sind für die betreffenden gegenseitigen Vertikalwinkelmessungen von der Fehlergleichung (12.5) alle oder nur einzelne Glieder in die Ausgleichung einzuführen. Sollen für einzelne Standpunkte auch Lotabweichungskomponenten bestimmt werden, müssen wenigstens für zwei möglichst weit auseinander liegende Punkte die Lotabweichungskomponenten  $\xi_i$  und  $\eta_i$  gegeben sein.

### 12,4 Gewichte

Zur Berücksichtigung der Gewichte ist es zweckmäßig, vor dem Aufstellen und Auflösen der Normalgleichungen jede einzelne Fehlergleichung (12.5) mit dem zugehörigen Wert  $\sqrt{p_{i,k}}$  zu multiplizieren.

Da es derzeit noch nicht allgemein möglich ist, die Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  direkt durch Messung zu erhalten, müssen sie genähert aus mehr oder weniger gut bestimmten Refraktionskoeffizienten abgeleitet werden. Es erscheint daher als zweckmäßig, in Anlehnung an [74] für die Vertikalwinkelmessungen vier Genauigkeitsstufen einzuführen, abhängig von der durchschnittlichen Bodenentfernung der Visuren. Jeder Genauigkeitsstufe wird ein Wert  $m_k$  für die Unsicherheit der Refraktionskonstanten zugeordnet.

In [74] wurden die vier Genauigkeitsstufen durch die nachstehend zusammengestellten durchschnittlichen Bodenabstände der Visuren definiert und es wurden ihnen folgende Werte für  $m_k$  zugeordnet:



Stufe	durchschn. Bodenabstand	$m_k$
1	mehr als 150 m	$\pm 0,05$
2	zwischen 30 m und 150 m	$\pm 0,15$
3	zwischen 5 m und 30 m	$\pm 0,25$
4	bis höchstens 5 m	$\pm 0,50$

..... (12.6)

Um den mittleren Fehler einer ellipsoidischen Vertikalwinkelmessung zu erhalten, wird Gleichung (2.27) differenziert. Der Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  wird durch Gleichung (8.15) und der Lotabweichungsanteil  $\epsilon_{i,k}$  durch Gleichung (9.3) ausgedrückt.

$$d\xi_{i,k} = dz_{i,k} + \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2 \cdot \sin z_{i,k}} \cdot dk_i + \cos \alpha_{i,k} \cdot d\xi_i + \sin \alpha_{i,k} \cdot d\eta_i \quad \dots (12.7)$$

Für den Übergang auf mittlere Fehler kann man genähert setzen

$$d\xi_i \approx d\eta_i \approx d\zeta_i \quad \dots (12.8)$$

$$(m_f^{cc})^2 = (m_z^{cc})^2 + \left(\frac{\gamma(E)}{2}\right)^2 \cdot m_k^2 + (m_\beta^{cc})^2 \quad \dots (12.9)$$

Das Gewicht für eine ellipsoidische Zenitdistanz ist dann

$$p_f = \frac{C^2}{(m_f^{cc})^2} \quad \dots (12.10)$$

In die Gleichung (12.10) wäre Gleichung (12.9) einzusetzen.

Für die in (12.6) angegebenen Werte von  $m_k$  wurde in Tabelle 10 die Auswertung der Gleichung (12.9) unter der Annahme von (5.7) für einige Seitenlängen zusammengestellt.

Die Fehlergleichung (12.5) beinhaltet zwei Vertikalwinkelmessungen, es müßte daher jeder einzelnen Fehlergleichung das doppelte Gewicht zugeordnet werden, wie es durch Gleichung (12.10) ausgedrückt wird. Da jedoch die Konstante C in Gleichung (12.10) frei gewählt werden kann, ist auch die Annahme  $C = 1$  zulässig.

Tabelle 10: Mittlerer Fehler einer Zenitdistanz für verschiedene Werte von  $m_p$  nach Gleichung (12.9)

s in km	$m_k = 0,05$						$m_k = 0,15$						$m_k = 0,25$						$m_k = 0,50$					
	$m_f^{cc}$ für $m_p =$						$m_f^{cc}$ für $m_p =$						$m_f^{cc}$ für $m_p =$						$m_f^{cc}$ für $m_p =$					
	0 <sup>cc</sup>	10 <sup>cc</sup>	20 <sup>cc</sup>	30 <sup>cc</sup>	40 <sup>cc</sup>	50 <sup>cc</sup>	0 <sup>cc</sup>	10 <sup>cc</sup>	20 <sup>cc</sup>	30 <sup>cc</sup>	40 <sup>cc</sup>	50 <sup>cc</sup>	0 <sup>cc</sup>	10 <sup>cc</sup>	20 <sup>cc</sup>	30 <sup>cc</sup>	40 <sup>cc</sup>	50 <sup>cc</sup>	0 <sup>cc</sup>	10 <sup>cc</sup>	20 <sup>cc</sup>	30 <sup>cc</sup>	40 <sup>cc</sup>	50 <sup>cc</sup>
0,5	10	14	22	32	41	51	11	15	23	32	41	51	12	16	23	32	42	51	16	19	26	34	43	53
1,0	10	14	23	32	41	51	13	16	24	33	42	52	16	19	26	34	43	53	27	29	34	40	48	57
1,5	11	15	23	32	41	51	15	18	25	34	43	52	21	24	29	37	45	54	39	40	44	49	56	63
2,0	11	15	23	32	42	51	18	21	27	35	44	53	27	29	34	40	48	57	51	52	55	59	65	71
2,5	12	16	23	32	42	51	21	24	29	37	45	54	33	34	38	44	52	60	63	64	66	70	75	81
3,0	13	16	24	33	42	52	25	27	32	39	47	55	39	40	44	49	56	63	75	76	78	81	85	91
3,5	13	17	24	33	42	52	28	30	34	41	49	57	45	46	49	54	60	67	88	89	90	93	97	101
4,0	14	17	25	33	42	52	32	33	37	44	51	59	51	52	55	59	65	71	100	101	102	105	108	112
4,5	15	18	25	34	43	52	35	37	40	46	53	61	57	58	60	64	70	76	113	113	115	117	120	123
5,0	16	19	26	34	43	53	39	40	44	49	56	63	63	64	66	70	75	81	125	126	127	129	131	135
5,5	17	20	26	35	44	53	42	44	47	52	58	66	69	70	72	76	80	86	138	138	139	141	143	146
6,0	18	21	27	35	44	53	46	47	50	55	61	68	75	76	78	81	85	91	150	150	151	153	155	158
6,5	19	22	28	36	44	54	50	51	54	58	64	71	82	82	84	87	91	96	163	163	164	165	167	170
7,0	20	23	28	36	45	54	53	54	57	61	67	73	88	89	90	93	97	101	175	175	176	178	179	182
7,5	21	24	29	37	45	54	57	58	60	64	70	76	94	95	96	99	102	107	187	188	188	190	192	194
8,0	22	25	30	37	46	55	61	62	64	68	73	79	100	101	102	105	108	112	200	200	201	202	204	206
8,5	23	26	31	38	46	55	64	65	67	71	76	82	107	107	108	111	114	118	212	213	213	214	216	218
9,0	24	27	32	39	47	56	68	69	71	74	79	85	113	113	115	117	120	123	225	225	226	227	228	230
9,5	26	28	33	40	48	56	72	73	75	78	82	88	119	119	121	123	126	129	237	237	238	239	241	242
10,0	27	29	34	40	48	57	75	76	78	81	85	91	125	126	127	129	131	135	250	250	251	252	253	255

13 ERMITTLUNG VON REFRAKTION UND LOTABWEICHUNG AUS GEGENSEITIGEN  
VORLÄUFIGEN HÖHENUNTERSCHIEDEN

13,1 Allgemeines

In Analogie zum vorhergehenden Hauptabschnitt 12 ist es auch möglich, aus gegenseitigen vorläufigen Höhenunterschieden Refraktions- und Lotabweichungseinflüsse zu ermitteln. Diese Methode ist zweckmäßigerweise in jenen Fällen anzuwenden, wenn für die Vertikalwinkelmessung bei Hin- und Rückmessung verschiedene Nebenpunkte der Festpunkte verwendet worden sind.

Mit einem angenommenen Näherungswert für den Refraktionskoeffizienten und unter Vernachlässigung der noch nicht bekannten Lotabweichungen werden aus den Vertikalwinkelmessungen vorläufige Höhenunterschiede abgeleitet. Bei Standpunkten mit bereits bekannten Lotabweichungskomponenten sind diese selbstverständlich bei der Höhenunterschiedsberechnung zu berücksichtigen.

Die Fehlergleichungen sind in ihrem Aufbau davon abhängig, ob die vorläufigen Höhenunterschiede unter Verwendung gemessener Schrägstrecken oder mit horizontalen Strecken berechnet worden sind. Man geht für die Ableitung der Fehlergleichungen davon aus, daß bei richtiger Berücksichtigung der Refraktions- und Lotabweichungseinflüsse unter der Annahme einer fehlerfreien Beobachtung die Summe der Höhenunterschiede von Hin- und Rückmessung gleich Null sein muß:

$$\Delta E_{i,k} + \Delta E_{k,i} = 0 \quad \dots\dots (13.1)$$

13,2 Fehlergleichungen

13,21 Fall mit horizontalen Strecken

Man geht aus von Gleichung (5.2), entwickelt sie analog zu Gleichung (10.5) und führt den durch Gleichung (10.20) gegebenen vorläufigen Höhenunterschied ein. Setzt man dies dann in Gleichung (13.1) ein, erhält man:

$$\Delta E_{i,k} + \Delta E_{k,i} = 0 = \Delta H'_{i,k} + \Delta H'_{k,i} - \frac{s_{i,k}(E_M)}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot (\delta''_{i,k} + \epsilon_{i,k}) - \frac{s_{k,i}(E_M)}{\sin^2 z_{k,i}} \cdot (\delta''_{k,i} + \epsilon_{k,i}) \quad \dots\dots (13.2)$$

Nach durchgeführter Ausgleichung wird Gleichung (13.2) im allgemeinen einen von Null verschiedenen verbleibenden Restfehler  $v_{1,k}$  ergeben. Drückt man den Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  durch Gleichung (8.15) und den Lotabweichungsanteil  $\epsilon_{i,k}$  durch Gleichung (9.3) aus, erhält man die gesuchte Fehlergleichung, die im Gegensatz zu Gleichung (12.5) in m-Einheiten ausgedrückt ist, während die Lotabweichungskomponenten im Bogenmaß enthalten sind.

$$\begin{aligned}
 v_{i,k} = & - \frac{s_{i,k}(E_M)}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2 \cdot \sin z_{i,k}} \cdot k_i - \frac{s_{k,i}(E_M)}{\sin^2 z_{k,i}} \cdot \frac{\gamma_{k,i}(E)}{2 \cdot \sin z_{k,i}} \cdot k_k - \\
 & - \frac{s_{i,k}(E_M)}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot \xi_i \cdot \cos \alpha_{i,k} - \frac{s_{i,k}(E_M)}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot \eta_i \cdot \sin \alpha_{i,k} - \frac{s_{k,i}(E_M)}{\sin^2 z_{k,i}} \cdot \xi_k \cdot \cos \alpha_{k,i} - \\
 & - \frac{s_{k,i}(E_M)}{\sin^2 z_{k,i}} \cdot \eta_k \cdot \sin \alpha_{k,i} + (\Delta H_{i,k}^! + \Delta H_{k,i}^!) \quad \dots (13.3)
 \end{aligned}$$

Je nach der Situation in der betreffenden Berechnungsgruppe werden für die einzelnen gegenseitigen vorläufigen Höhenunterschiede von Gleichung (13.3) alle oder nur einzelne Glieder verwendet.

### 13,22 Fall mit gemessenen Schrägstrecken

Hier geht man analog vor wie im Unterabschnitt 13,21, ausgehend von Gleichung (5.1). Man erhält dann in Entsprechung zu Gleichung (13.2):

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{i,k} + \Delta E_{k,i} = 0 = & \Delta H_{i,k}^! + \Delta H_{k,i}^! - \bar{s}_{i,k}(M) \cdot \sin z_{i,k} \cdot (\delta_{i,k}'' + \epsilon_{i,k}) - \\
 & - \bar{s}_{k,i}(M) \cdot \sin z_{k,i} \cdot (\delta_{k,i}'' + \epsilon_{k,i}) \quad \dots (13.4)
 \end{aligned}$$

In weiterer Folge ergibt sich daraus die Fehlergleichung

$$\begin{aligned}
 v_{i,k} = & - s_{i,k}(E_M) \cdot \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2 \cdot \sin z_{i,k}} \cdot k_i - s_{k,i}(E_M) \cdot \frac{\gamma_{k,i}(E)}{2 \cdot \sin z_{k,i}} \cdot k_k - \\
 & - s_{i,k}(E_M) \cdot \xi_i \cdot \cos \alpha_{i,k} - s_{i,k}(E_M) \cdot \eta_i \cdot \sin \alpha_{i,k} - s_{k,i}(E_M) \cdot \xi_k \cdot \cos \alpha_{k,i} - \\
 & - s_{k,i}(E_M) \cdot \eta_k \cdot \sin \alpha_{k,i} + (\Delta H_{i,k}^! + \Delta H_{k,i}^!) \quad \dots (13.5)
 \end{aligned}$$

### 13,3 Gewichte

Zur Berücksichtigung der Gewichte ist es zweckmäßig, vor dem Aufstellen und Auflösen der Normalgleichungen jede einzelne Fehlergleichung (13.3) oder (13.5) mit dem zugehörigen Wert  $\sqrt{p_{i,k}}$  zu multiplizieren.

Das Gewicht für einen Höhenunterschied ist gegeben durch

$$p_{\Delta H} = \frac{c^2}{m_{\Delta H}^2} \quad \dots (13.6)$$

Der mittlere Fehler eines Höhenunterschiedes ist definiert durch die Gleichungen (5.3) oder (5.4) oder zusammengefaßt genähert durch (5.5).

Auch hier sind in den Fehlergleichungen die Höhenunterschiede von Hin- und Rückmessung enthalten, es gilt daher bezüglich der Gewichte dasselbe wie im Unterabschnitt 12,4.

14 BERECHNUNG DER HÖHEN, WENN REFRAKTION UND LOTABWEICHUNG GEGEBEN SIND

14,1 Allgemeines

Sind die Refraktion und die Lotabweichungskomponenten bekannt, können die endgültigen Höhenunterschiede berechnet werden.

Sollen ellipsoidische Höhenunterschiede ermittelt werden, müssen die Auswirkungen sowohl von Refraktion als auch der Lotabweichung bei der Berechnung der endgültigen Höhenunterschiede berücksichtigt werden. Bei der Berechnung der endgültigen geoidischen Höhenunterschiede gemäß Unterabschnitt 10,7 ist nur die Berücksichtigung der Refraktionseinflüsse notwendig, doch muß trotzdem auch die Lotabweichung bekannt sein, um die in den gemessenen Vertikalwinkeln gemeinsam enthaltenen Refraktions- und Lotabweichungseinflüsse trennen zu können.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen diesen beiden Arten von Höhenunterschieden besteht auch noch insofern, als für die Berechnung von ellipsoidischen Höhen auch nur einseitig vorhandene Höhenunterschiede herangezogen werden können, wenn Refraktion und Lotabweichung bekannt sind, während für die Berechnung geoidischer Höhen nur das Mittel aus den Höhenunterschieden von Hin- und Rückmessung Verwendung finden darf, wenn die im Unterabschnitt 10,7 beschriebene Näherung angewendet wird.

14,2 Endgültige ellipsoidische Höhenunterschiede

Sind der Refraktionskoeffizient und die Lotabweichungskomponenten bekannt, können die genäherten Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  aus Gleichung (8.13), (8.14) oder (8.15) und die Lotabweichungsanteile  $\epsilon_{i,k}$  aus Gleichung (9.3) ermittelt werden. Dann kann man nach Gleichung (5.1) oder (5.2) die endgültigen ellipsoidischen Höhenunterschiede berechnen, abhängig davon, ob Schrägstrecken oder horizontale Strecken gegeben sind.

Wurden für die Berechnung der Refraktionsverbesserungen und der noch unbekanntem Lotabweichungskomponenten vorläufige Höhenunterschiede verwendet, ermittelt aus Gleichung (10.11) oder (10.20), kann der endgültige ellipsoidische Höhenunterschied aus dem vorläufigen Höhenunterschied mit hinreichender Näherung aus einer der nachfolgenden Gleichungen abgeleitet werden:

Schrägstrecken:

$$\Delta E_{i,k} \doteq \Delta H'_{i,k} - \bar{s}_{i,k}(M) \cdot \sin z_{i,k} \cdot (\delta''_{i,k} + \epsilon_{i,k}) \quad \dots\dots (14.1)$$

Horizontale Strecken:

$$\Delta E_{i,k} \doteq \Delta H'_{i,k} - \frac{s_{i,k}(E)}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot (\delta''_{i,k} + \epsilon_{i,k}) \quad \dots\dots (14.2)$$

Hierbei ist  $\delta''_{i,k}$  der Refraktionswinkel, der sich aus der durch die Ausgleichung ermittelten Refraktionsverbesserung  $dk_i$  ergibt, abgeleitet aus einer der Gleichungen (8.13), (8.14) oder (8.15).

Ist in dem vorläufigen Höhenunterschied bereits der Lotabweichungseinfluß enthalten, dann ist in den Gleichungen (14.1) bzw. (14.2) der Lotabweichungsanteil  $\epsilon_{i,k}$  nicht mehr einzubeziehen.

#### 14,3 Genäherte geoidische Höhenunterschiede

Um aus den ellipsoidischen Höhenunterschieden geoidische Höhenunterschiede ableiten zu können, müßte man die Lotkrümmung und die Differenz  $(N_k - N_i)$  der Abstände des Geoids vom Ellipsoid in den Visurendpunkten kennen. Dann könnte man mit den Gleichungen (10.2) oder (10.4) auch aus nur einseitig vorliegenden Vertikalwinkelmessungen geoidische Höhenunterschiede berechnen.

In der Praxis wird es jedoch im allgemeinen notwendig sein, die im Unterabschnitt 10,7 erörterte Näherung zu verwenden. Hiefür sind nach 10,7 die Mittelwerte aus den Höhenunterschieden von Hin- und Rückmessung notwendig, wobei diese Höhenunterschiede allein unter Berücksichtigung der Refraktionseinflüsse aus Schrägstrecken abzuleiten sind. Sind keine gemessenen Schrägstrecken gegeben, können nach Gleichung (10.6) auch aus den Koordinaten der Visurendpunkte die benötigten Schrägstrecken abgeleitet werden. Hierbei ist aber zu beachten, daß man für die Berechnung dieser Schrägstrecken unbedingt die ellipsoidischen Höhenunterschiede zwischen den Visurendpunkten benötigt.

Für die Höhenunterschiedsberechnung ist Gleichung (5.1) zu verwenden, wobei statt  $\zeta_{i,k}$  die um den Refraktionswinkel  $\delta_{i,k}$  verbesserte gemessene Zenitdistanz  $z_{i,k}$  zu nehmen ist:  $\zeta_{i,k} \rightarrow z_{i,k} + \delta_{i,k}$

In Gleichung (5.1) wäre dann  $\Delta E_{i,k}$  durch  $\Delta H_{i,k}$  zu ersetzen.

Wurden analog zu Unterabschnitt 14,2 für die Berechnung der Refraktionsverbesserungen vorläufige Höhenunterschiede verwendet, kann der endgültige Höhenunterschied  $\Delta H_{i,k}$  gleichfalls mit hinreichender Genauigkeit aus dem vorläufigen Höhenunterschied  $\Delta H^!_{i,k}$  abgeleitet werden:

$$\Delta H_{i,k} \doteq \Delta H^!_{i,k} - \bar{s}_{i,k}(M) \cdot \sin z_{i,k} \cdot \delta''_{i,k} \quad \dots (14.3)$$

Hier darf kein Lotabweichungsanteil  $\epsilon_{i,k}$  berücksichtigt werden. Es muß daher bei jenen vorläufigen Höhenunterschieden  $\Delta H^!_{i,k}$ , die für die Berechnung der Refraktionsverbesserungen einen Lotabweichungsanteil  $\epsilon_{i,k}$  enthalten, dieser für die Berechnung der endgültigen Höhenunterschiede abgezogen werden. Gleichung (14.3) wird für diese Fälle zu

$$\Delta H_{i,k} \doteq \Delta H^!_{i,k}(\epsilon) - \bar{s}_{i,k}(M) \cdot \sin z_{i,k} \cdot (\delta''_{i,k} - \epsilon_{i,k}) \quad \dots (14.3 a)$$

14,4 Berechnung und Überprüfung der Einzelhöhen

Die hier besprochene Höhenberechnung ist sowohl für ellipsoidische als auch für geoidische Höhen anzuwenden. Es wird daher hier allgemein nur von Höhenunterschieden  $\Delta H_{i,k}$  und Höhen  $H_i$  gesprochen.

Ausgehend von den Punkten mit bekannten Höhen  $H_i$  werden mit den endgültigen (ellipsoidischen bzw. geoidischen) Höhenunterschieden  $\Delta H_{i,k}$  schrittweise die diesen Höhenunterschieden zugeordneten Einzelhöhen  $H_{k(e)}^{(i)}$  der Neupunkte abgeleitet:

$$H_{k(e)}^{(i)} = H_i + \Delta H_{i,k} \quad \dots\dots (14.4)$$

Die einem Neupunkt zugehörigen Einzelhöhen sind zu untersuchen, ob sie der Fehlergrenze  $F_{H(e)}^{(1)}$  genügen:

$$\left| H_{i(e)Max.}^{(k)} - H_{i(e)Min.}^{(m)} \right| \leq F_{H(e)}^{(1)} = 3 \cdot \sqrt{m_{\Delta H_{k,i}}^2 + m_{\Delta H_{m,i}}^2 + m_{H_k}^2 + m_{H_m}^2} \quad \dots\dots (14.5)$$

Für die mittleren Fehler  $m_{\Delta H}$  der Höhenunterschiede können je nach der Situation die Gleichungen (5.3), (5.4) oder (5.5) verwendet werden bzw. Gleichung (6.22), wenn der Höhenunterschied ohne Vertikalwinkelmessung von einer Schrägstrecke abgeleitet wurde. Hierbei ist zu beachten, daß die Mittelwerte der Höhenunterschiede aus Hin- und Rückmessung einen entsprechend geringeren mittleren Fehler haben als die Einzelwerte.

Bei der Annahme der mittleren Fehler  $m_{H_i}$  der Ausgangshöhen ist zu berücksichtigen, ob die Höhe aus einem Nivelllementanschluß stammt, ob sie trigonometrisch bestimmt oder ob sie nur vorläufig ist.

Jene Einzelhöhen, die außerhalb der Fehlergrenze (14.5) liegen, sind vorerst aus der nachfolgenden Mittelbildung auszuschließen. Die verbleibenden Einzelhöhen werden für die Ermittlung der vorläufigen Höhen gemittelt. Bei Punkten mit sehr stark differierenden Visurweiten der einzelnen Vertikalwinkelmessungen empfiehlt sich ein Gewichtsmittel.

Anschließend sind alle Einzelhöhen, auch die eventuell mit der Fehlergrenze  $F_{H(e)}^{(1)}$  bereits ausgeschiedenen, mit der vorläufigen Höhe  $H_i^1$  zu vergleichen. Sie müssen nun der folgenden Fehlergrenze genügen:

$$\left| H_i^1 - H_{i(e)}^{(k)} \right| \leq F_{H(e)}^{(2)} = 3 \cdot \sqrt{m_{\Delta H_{k,i}}^2 + m_{H_i}^2 + m_{H_k}^2} \quad \dots\dots (14.6)$$

Jene Einzelhöhen, die diese Fehlergrenze übersteigen, sind von der nachfolgenden Ausgleichung der Höhen auszuschließen.

14,5 Fehlergleichungen

Die vorläufigen Höhen  $H_i^!$  der Neupunkte erfahren durch die nachfolgende Ausgleichung eine Höhenänderung  $dH_i$ , mit der man die endgültigen Höhen  $H_i$  erhält:

$$H_i = H_i^! + dH_i \quad \dots (14.7)$$

Die Aufstellung der Fehlergleichungen und die anschließende Ausgleichung sind unabhängig davon, ob ellipsoidische Höhen  $E_i$  oder geoidische Höhen  $G_i$  berechnet werden sollen.

Den Höhenunterschied zwischen den beiden Punkten  $P_i$  und  $P_k$  kann man einerseits als die Differenz der ausgeglichenen Höhen  $H_i$  dieser beiden Punkte darstellen, ausgedrückt durch Gleichung (14.7), andererseits durch den aus den Beobachtungen abgeleiteten endgültigen Höhenunterschied  $\Delta H_{i,k}$  plus einer verbleibenden Verbesserung  $v_{i,k}$ :

$$H_k - H_i = H_k^! + dH_k - H_i^! - dH_i = \Delta H_{i,k} + v_{i,k} \quad \dots (14.8)$$

Daraus erhält man die Fehlergleichung

$$v_{i,k} = -dH_i + dH_k + (H_k^! - H_i^! - \Delta H_{i,k}) \quad \dots (14.9)$$

Faßt man den Klammerausdruck als Widerspruch  $w_{i,k}$  zusammen,

$$w_{i,k} = H_k^! - H_i^! - \Delta H_{i,k} \quad \dots (14.10)$$

erhält man

$$v_{i,k} = -dH_i + dH_k + w_{i,k} \quad \dots (14.11)$$

Diese Fehlergleichung ist unabhängig von der Art der Berechnung der Höhenunterschiede. Die Berechnungsart wirkt sich allerdings in den notwendigen Gewichten aus.

14,6 Gewichte

Zur Berücksichtigung der Gewichte ist es zweckmäßig, vor dem Aufstellen und Auflösen der Normalgleichungen jede einzelne Fehlergleichung (14.11) mit dem zugehörigen Wert  $\sqrt{p_{i,k}}$  zu multiplizieren. Das Gewicht  $p_{i,k}$  ist wie im Abschnitt 13 durch Gleichung (13.6) definiert, wobei der mittlere Fehler eines Höhenunterschiedes durch eine der Gleichungen (5.3), (5.4), (5.5) oder (6.22) definiert sein kann.

Werden in einer Berechnungsgruppe einheitlich nur Einzelhöhen verwendet, die alle entweder nur aus einseitigen oder alle aus gemittelten Höhenunterschieden abgeleitet worden sind, kann in beiden Fällen für alle Gewichte die Konstante  $C = 1$  gesetzt werden.



Sind hingegen in einer Berechnungsgruppe Einzelhöhen enthalten, die aus einseitigen Höhenunterschieden stammen, und auch solche, die aus gemittelten Höhenunterschieden abgeleitet worden sind, ist darauf zu achten, daß die Fehlergleichungen für die Einzelhöhen aus den gemittelten Höhenunterschieden mit der Wurzel aus der Summe der Gewichte von Hin- und Rückmessung  $\sqrt{P_{i,k} + P_{k,i}}$  multipliziert werden.

Werden, wie es bei dieser Art der Höhenberechnung Voraussetzung ist, vor der Ausgleichung der Einzelhöhen zur Ermittlung der Höhenänderungen  $dH_i$  in einer eigenen Ausgleichung die Refraktionsänderungen und die noch unbekanntes Lotabweichungskomponenten bestimmt, kann man eigentlich die als Grundlage der Höhenausgleichung dienenden Einzelhöhen genau genommen nicht mehr als von einander unabhängige Größen bezeichnen. Die durch die Berücksichtigung dieser Korrelationen bedingte Verkomplizierung der Ausgleichung wurde hier vernachlässigt.

15 AUSGLEICHUNG DER ELLIPSOIDISCHEN HÖHEN UNTER GLEICHZEITIGER BERECHNUNG  
VON REFRAKTION UND LOTABWEICHUNG

15,1 Allgemeines

Diese Art der Ausgleichung darf nur im Zusammenhang mit der Berechnung ellipsoidischer Höhen verwendet werden.

Ist keine ausreichende Anzahl von gegenseitigen Vertikalwinkelmessungen vorhanden, um nach den Abschnitten 12 und 13 die Berechnung der Refraktionskoeffizienten und Lotabweichungskomponenten vor der eigentlichen Ausgleichung der Höhen nach Abschnitt 14 durchführen zu können, müssen diese beiden getrennten Ausgleichungsvorgänge in einer Ausgleichung vereinigt werden.

Im Abschnitt 12 wurde die Summe der entsprechend reduzierten gegenseitigen Vertikalwinkel als Grundlage der Ausgleichung genommen, in Abschnitt 13 das Mittel der Höhenunterschiede aus Hin- und Rückmessung. Im Gegensatz dazu wird hier grundsätzlich nur jede einzelne Vertikalwinkelmessung oder der daraus abgeleitete Höhenunterschied der Ausgleichung zu Grunde gelegt.

Die Fehlergleichungen können auch hier auf zwei grundsätzlich verschiedenen Ausgangswerten beruhen. Es können Fehlergleichungen für die einzelnen Vertikalwinkel aufgestellt werden und solche für die aus den gemessenen Vertikalwinkeln abgeleiteten Höhenunterschiede. Zusätzlich ist in beiden Fällen zu unterscheiden, ob Schrägstrecken gegeben sind oder nur aus der Lageberechnung stammende horizontale Punktentfernungen.

Die Praxis hat gezeigt, daß bei einem relativ instabilen Netz, wo einer großen Anzahl von zu bestimmenden Unbekannten nur eine relativ geringe Anzahl von überschüssigen Messungen gegenüber steht, der Fall eintreten kann, daß die Höhenänderungen einerseits und die Refraktionsänderungen und Lotabweichungskomponenten andererseits sich so gegeneinander verschieben, daß zwar die Summe [pvv] außerordentlich klein wird, wobei aber die Werte der Unbekannten eine unrealistische Größenordnung bekommen können.

Um dies zu verhindern, muß für jede einzelne Berechnungsgruppe genau geprüft werden, ob genügend Beobachtungen vorliegen, um die gewünschten Unbekannten einigermaßen gesichert berechnen zu können. Ist dies nicht in ausreichendem Maße der Fall, dann muß durch Vereinfachungen entsprechend der jeweiligen Situation die Anzahl der Unbekannten verringert werden. So könnte man z. B. im Flachland, wie z. B. im Marchfeld oder im Seewinkel etwa auf die Berechnung der Lotabweichungskomponenten verzichten, oder man führt noch weiter gehende Vereinfachungen bei der Berechnung der Refraktionsänderungen durch, indem für eine geringere Anzahl von Visurengruppen eine gemeinsame Refraktionsänderung ermittelt wird.

Andererseits wäre aus diesem Grund auch eine getrennte Ausgleichung entsprechend den Abschnitten 12 bzw. 13 und 14 vorzuziehen, wenn eine genügend große Anzahl von gegenseitig gemessenen Vertikalwinkeln vorliegt.

15,2 Fehlergleichungen

15,21 Vertikalwinkel; horizontale Strecken

Zur Ableitung der Fehlergleichung für einen Vertikalwinkel wird Gleichung (5.2) differenziert, für das Differential der ellipsoidischen Zenitdistanz wird Gleichung (12.7) eingeführt. Weiters wird  $\zeta_{i,k}$  für die Koeffizientenberechnung durch  $z_{i,k}$  hinreichend angenähert. Damit erhält man:

$$dH_k - dH_i = \cot z_{i,k} \cdot ds_{i,k(E_M)} - \frac{s_{i,k(E_M)}}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot \left[ dz_i + \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2 \cdot \sin z_{i,k}} \cdot dk_i + \right. \\ \left. + \cos \alpha_{i,k} \cdot d\zeta_i + \sin \alpha_{i,k} \cdot d\eta_i \right] \quad \dots (15.1)$$

Aus dieser Gleichung wird  $dz_{i,k}$  ausgerechnet:

$$dz_{i,k} = \frac{\sin^2 z_{i,k}}{s_{i,k(E_M)}} \cdot dH_i - \frac{\sin^2 z_{i,k}}{s_{i,k(E_M)}} \cdot dH_k + \frac{\sin^2 z_{i,k}}{s_{i,k(E_M)}} \cdot \cot z_{i,k} \cdot ds_{i,k(E_M)} - \\ - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2 \cdot \sin z_{i,k}} \cdot dk_i - \cos \alpha_{i,k} \cdot d\zeta_i - \sin \alpha_{i,k} \cdot d\eta_i \quad \dots (15.2)$$

Die aus der Lageberechnung stammenden horizontalen Seiten werden hier nicht mehr verändert, es entfällt daher das Glied mit  $ds_{i,k(E_M)}$ . Es wird nun eingeführt:

$$a_{i,k}(z_{s_{E_M}}) = \frac{\sin^2 z_{i,k}}{s_{i,k(E_M)}} \cdot Q^{cc} \quad \dots (15.3)$$

Die Verbesserungsgleichung für Vertikalwinkel lautet dann bei Verwendung horizontaler Strecken:

$$v_{i,k}^{cc}(z_{s_{E_M}}) = a_{i,k}(z_{s_{E_M}}) \cdot dH_i - a_{i,k}(z_{s_{E_M}}) \cdot dH_k - \frac{\gamma_{i,k(E)}}{2 \cdot \sin z_{i,k}} \cdot dk_i - \cos \alpha_{i,k} \cdot d\zeta_i - \\ - \sin \alpha_{i,k} \cdot d\eta_i^{cc} - a_{i,k}(z_{s_{E_M}}) \cdot [(H'_k - H'_i) - \Delta H'_{i,k}] \quad \dots (15.4)$$

15,22 Vertikalwinkel; gemessene Schrägstrecken

Hier geht man in analoger Weise wie in 15,21 vor, ausgehend von Gleichung (5.1). Man erhält dann:

$$dH_k - dH_i = \cos z_{i,k} \cdot d\bar{s}_{i,k(M)} - \bar{s}_{i,k(M)} \cdot \sin z_{i,k} \cdot \left[ dz_{i,k} + \frac{\bar{s}_{i,k(M)}}{2 \cdot R_i(E)} \cdot dk_i + \cos \alpha_{i,k} \cdot d\xi_i + \sin \alpha_{i,k} \cdot d\eta_i \right] \quad \dots (15.5)$$

Aus dieser Gleichung wird  $dz_{i,k}$  ausgerechnet:

$$dz_{i,k} = \frac{dH_i - dH_k}{\bar{s}_{i,k(M)} \cdot \sin z_{i,k}} + \frac{\cos z_{i,k} \cdot d\bar{s}_{i,k(M)}}{\bar{s}_{i,k(M)} \cdot \sin z_{i,k}} - \frac{\bar{s}_{i,k(M)}}{2 \cdot R_i(E)} \cdot dk_i - \cos \alpha_{i,k} \cdot d\xi_i - \sin \alpha_{i,k} \cdot d\eta_i \quad \dots (15.6)$$

Wie in 15,21 entfällt auch hier das Glied mit  $d\bar{s}_{i,k(M)}$ . Es wird gesetzt:

$$a_{i,k}(z_{s_M}^-) = \frac{cc}{\bar{s}_{i,k(M)} \cdot \sin z_{i,k}} \quad \dots (15.7)$$

Bei Verwendung gemessener Schrägstrecken lautet dann die Fehlergleichung für Vertikalwinkel:

$$v_{i,k}(z_{s_M}^-)^{cc} = a_{i,k}(z_{s_M}^-) \cdot dH_i - a_{i,k}(z_{s_M}^-) \cdot dH_k - \frac{Q \cdot \bar{s}_{i,k(M)}}{2 \cdot R_i(E)} \cdot dk_i - \cos \alpha_{i,k} \cdot d\xi_i^{cc} - \sin \alpha_{i,k} \cdot d\eta_i^{cc} - a_{i,k}(z_{s_M}^-) \cdot [(H_k' - H_i') - \Delta H_{i,k}'] \quad \dots (15.8)$$

Führt man in Gleichung (15.7) die durch (10.17) gegebene Näherung ein, erhält man folgenden Zusammenhang:

$$a_{i,k}(z_{s_{EM}}^-) = a_{i,k}(z_{s_M}^-) \cdot \sin^2 z_{i,k} \quad \dots (15.9)$$

Dieser Zusammenhang zeigt, daß beim Vorliegen gemessener Schrägstrecken nur die zugehörigen Verbesserungsgleichungen verwendet werden dürfen und nicht, wie man es in manchen Veröffentlichungen findet, die Fehlergleichungen für horizontale Strecken. Vor allem bei steileren Visuren entstehen dadurch fehlerhafte Ergebnisse. Es müßte nämlich bei der aus der gemessenen Schrägstrecke abgeleiteten horizontalen Strecke nach der Ausgleichung noch eine Verbesserung angebracht werden, verursacht durch die Änderung des Vertikalwinkels als Folge der Ausgleichung.

### 15,23 Höhenunterschiede aus Vertikalwinkeln; horizontale Strecken

Unter der Annahme eines vorläufigen Wertes  $k'$  für den Refraktionskoeffizienten und unter Vernachlässigung der noch unbekanntem Lotabweichungsanteile  $\epsilon_{i,k}$  werden mit den gemessenen Vertikalwinkeln vorläufige Höhenunterschiede nach Gleichung (10.20) berechnet. Die endgültigen ellipsoidischen Höhenunterschiede erhält man aus Gleichung (14.2), die z. B. unter Verwendung von Gleichung (8.15) etwas umgeformt werden kann:

$$\Delta E_{i,k} = \Delta H_{i,k}^! - \frac{s_{i,k}(E_M)}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2 \cdot \sin z_{i,k}} \cdot dk_i - \frac{s_{i,k}(E_M)}{\sin^2 z_{i,k}} \cdot \varepsilon_{i,k} \quad \dots (15.10)$$

Man kann nun setzen:

$$a_{i,k}(\Delta H_{S_{E_M}}) = \frac{s_{i,k}(E_M)}{\sin^2 z_{i,k}} \quad \dots (15.11)$$

$$b_{i,k}(\Delta H_{S_{E_M}}) = a_{i,k}(\Delta H_{S_{E_M}}) \cdot \frac{\gamma_{i,k}(E)}{2 \cdot \sin z_{i,k}} = a_{i,k}(\Delta H_{S_{E_M}}) \cdot \frac{s_{i,k}(E)}{2 \cdot R_i(E) \cdot \sin z_{i,k}} \quad \dots (15.12)$$

Damit wird Gleichung (15.10) zu

$$\Delta E_{i,k} = \Delta H_{i,k}^! - b_{i,k}(\Delta H_{S_{E_M}}) \cdot dk_i - a_{i,k}(\Delta H_{S_{E_M}}) \cdot \varepsilon_{i,k} \quad \dots (15.13)$$

Dies wird nun in Gleichung (14.8) eingeführt, woraus man die Fehlergleichung für einen Höhenunterschied ableiten kann, der mit einer horizontalen Strecke berechnet worden ist:

$$v_{i,k}(\Delta H_{S_{E_M}}) = -dH_i + dH_k + b_{i,k}(\Delta H_{S_{E_M}}) \cdot dk_i + a_{i,k}(\Delta H_{S_{E_M}}) \cdot \cos \alpha_{i,k} \cdot d\xi_i + a_{i,k}(\Delta H_{S_{E_M}}) \cdot \sin \alpha_{i,k} \cdot d\eta_i + [(H_k^! - H_i^!) - \Delta H_{i,k}^!] \quad \dots (15.14)$$

Der Klammerausdruck kann wieder als Widerspruch  $w_{i,k}$ , Gleichung (14.10), zusammengefaßt werden.

#### 15,24 Höhenunterschiede aus Vertikalwinkeln; gemessene Schrägstrecken

Nach analoger Ableitung wie im Unterabschnitt 15,23 erhält man für den endgültigen ellipsoidischen Höhenunterschied:

$$\Delta E_{i,k} = \Delta H_{i,k}^! - \frac{\bar{s}_{i,k}(M) \cdot \sin z_{i,k}}{2 \cdot R_i(E)} \cdot dk_i - \bar{s}_{i,k}(M) \cdot \sin z_{i,k} \cdot \varepsilon_{i,k} \quad \dots (15.15)$$

Man kann nun setzen:

$$a_{i,k}(\Delta H_{S_M}) = \bar{s}_{i,k}(M) \cdot \sin z_{i,k} \quad \dots (15.16)$$

$$b_{i,k}(\Delta H_{S_M}) = a_{i,k}(\Delta H_{S_M}) \cdot \frac{\bar{s}_{i,k}(M)}{2 \cdot R_i(E)} \quad \dots (15.17)$$

Damit erhält man schließlich folgende Verbesserungsgleichung für Höhenunterschiede, die mit einer Schrägstrecke berechnet worden sind; dazu wird die Gleichung (15.18) in Gleichung (14.8) eingeführt.

$$\Delta E_{i,k} = \Delta H_{i,k}^! - b_{i,k}(\Delta H_{S_M}) \cdot dk_i - a_{i,k}(\Delta H_{S_M}) \cdot \varepsilon_{i,k} \quad \dots (15.18)$$

$$v_{i,k}(\Delta H_{S_M}) = - dH_i + dH_k + b_{i,k}(\Delta H_{S_M}) \cdot dk_i + a_{i,k}(\Delta H_{S_M}) \cdot \cos \alpha_{i,k} \cdot df_i + \\ + a_{i,k}(\Delta H_{S_M}) \cdot \sin \alpha_{i,k} \cdot d\eta_i + [(H'_k - H'_i) - \Delta H'_{i,k}] \dots (15.19)$$

Die durch Gleichung (14.10) gegebene Zusammenfassung des Widerspruchs  $w_{i,k}$  gilt auch hier.

Führt man in Gleichung (15.16) die durch (10.17) gegebene Näherung ein, erhält man analog zu (15.9) folgenden Zusammenhang:

$$a_{i,k}(\Delta H_{S_M}) = a_{i,k}(\Delta H_{S_{E_M}}) \cdot \sin^2 z_{i,k} \dots (15.20)$$

Selbstverständlich ist auch hier zu beachten, daß für jene Höhenunterschiede, die aus gemessenen Schrägstrecken abgeleitet wurden, nur die Fehlergleichung (15.19) verwendet werden darf, um richtige Ergebnisse erhalten zu können.

Ein angenommenes Beispiel soll die Unterschiede in den beiden Berechnungsgarten aufzeigen. Berechnet man mit dem nur genähert korrigierten Vertikalwinkel vor der Ausgleichung mit Gleichung (4.4) aus der gemessenen Schrägstrecke die zugehörige Horizontalentfernung und nimmt man an, daß bei Anwendung der Fehlergleichung (15.19) in der Ausgleichung dasselbe Ergebnis entsteht wie bei Anwendung der Fehlergleichung (15.14), erhält man mit den aus beiden Ausgleichungen gleich groß resultierenden Werten für  $dk_i$  und  $\varepsilon_{i,k}$  aus den Gleichungen (5.1) und (5.2) differierende Werte für den Höhenunterschied  $\Delta E_{i,k}$ , wenn man die in die Ausgleichung eingeführte Horizontalentfernung verwendet. Berechnet man aber mit dem nach der Ausgleichung richtig korrigierten Vertikalwinkel neuerlich aus der gemessenen Schrägstrecke die Horizontalentfernung, dann erhält man damit auch aus Gleichung (5.2) den mit Gleichung (5.1) übereinstimmenden Höhenunterschied  $\Delta E_{i,k}$ .

Beispiel: Gegeben:  $E_1 = 500,000$  m;  $\bar{s}_M = 5\,000,000$  m;  $z_{1,2} = 80^{\circ}00'00''$ ;  $R_E = 6\,379\,409$  m;  $k' = 0,13$ .

Annahme: Ergebnis der Ausgleichung:  $\Delta k = + 0,1$ ;  $\varepsilon_{1,2} = + 60''$ .

Refraktionswinkel: vor der Ausgleichung:  $\delta' = 32,43''$  aus (8.13)

$= 32,42''$  aus (8.14)

nach der Ausgleichung:  $\delta = 57,38''$  aus (8.13)

$= 57,36''$  aus (8.14)

$s_E = 4\,754,0228$  m aus (2.15);  $\frac{Y_E}{2} = 237,21''$  aus (2.31)

$\xi_{1,2} - \frac{Y_E}{2} = 79^{\circ}97'95,22''$  aus (2.27) vor der Ausgleichung  
 $= 79^{\circ}98'80,17''$  aus (2.27) nach der Ausgleichung

$$\begin{aligned}
 s_{EM} &= 4\,754,7855 \text{ m aus (4.4) vor der Ausgleichung} \\
 s_{EM} &= 4\,754,9920 \text{ m aus (4.4) nach der Ausgleichung} \\
 \Delta E_{1,2} &= 1546,6147 \text{ m aus (5.1) vor der Ausgleichung} \\
 &= 1545,9802 \text{ m nach der Ausgleichung} \\
 &= 1546,6149 \text{ m aus (5.2) vor der Ausgleichung} \\
 &= 1545,9131 \text{ m nach der Ausgleichung mit altem } s_{EM} \\
 &= 1545,9801 \text{ m nach der Ausgleichung mit neuem } s_{EM} \\
 &= 1546,6146 - 0,1864 - 0,4470 = 1545,9812 \text{ m aus (15.13)} \\
 &\quad \text{nach der Ausgleichung} \\
 &= 1546,6145 - 0,2060 - 0,4941 = 1545,9144 \text{ m aus (15.18) nach der} \\
 &\quad \text{Ausgleichung mit altem } s_{EM} \\
 a_{i,k} &= 5\,256,7617 \text{ m aus (15.11); } b_{i,k} = 2,059\,505 \text{ m aus (15.12)} \\
 &= 4\,755,2825 \text{ m aus (15.16); } \quad = 1,863\,528 \text{ m aus (15.17)}
 \end{aligned}$$

### 15,25 Höhenunterschiede aus gemessenen Schrägstrecken

Sind in die Ausgleichung auch Höhenunterschiede einzubeziehen, die mit Gleichung (6.1) berechnet wurden, kann dies nur dann erfolgen, wenn auch die übrigen Fehlergleichungen in dieser Ausgleichung auf Höhenunterschieden beruhen. Diesen Höhenunterschieden ist eine Fehlergleichung in Form der Gleichung (14.9) zuzuordnen.

Da bei richtiger Anwendung der Gleichung (6.1) die damit berechneten Höhenunterschiede frei von den Einflüssen der Refraktion und Lotabweichung sind, gibt es auch in der Fehlergleichung für diese Einflüsse ~~noch~~ keine zusätzlichen Glieder.

### 15,3 Gewichte

Zur Berücksichtigung der Gewichte ist es zweckmäßig, vor dem Aufstellen und Auflösen der Normalgleichungen jede einzelne Fehlergleichung mit dem zugehörigen Wert  $\sqrt{p_{i,k}}$  zu multiplizieren.

Das Gewicht eines Vertikalwinkels ist gegeben durch Gleichung (12.10), das Gewicht eines Höhenunterschiedes durch Gleichung (13.6). In Gleichung (12.10) wäre als mittlerer Fehler Gleichung (12.9) einzusetzen, in Gleichung (13.6) je nach der Situation eine der Gleichungen (5.3), (5.4) oder als Näherung (5.5), bei Höhenunterschieden aus Schrägstrecken (6.22).

Nach durchgeführter Ausgleichung erhält man eine durchgreifende Kontrolle, wenn man aus den endgültigen Höhenunterschieden die endgültigen Einzelhöhen  $E_i(e)$  ableitet und diese mit den endgültigen Höhen  $E_i$  der Neupunkte in Verbindung bringt. Man erhält dann Verbesserungen

$$v_{i,k} = E_i - E_i(e) \quad \dots \dots (15.21)$$

die jenen aus den Fehlergleichungen gleich sein müssen.

16 GEMEINSAME AUSGLEICHUNG VON RICHTUNGS-, STRECKEN- UND VERTIKALWINKEL-  
MESSUNGEN

16,1 Allgemeines

Eine gemeinsame Ausglei chung von Richtungs-, Strecken- und Vertikalwinkelmessungen darf in dieser Form nur bei der Berechnung von ellipsoidischen Höhen durchgeführt werden. Solch eine gemeinsame Ausglei chung unter gleichzeitiger Ermittlung der Refraktionskoeffizienten und der Lotabweichungskomponenten wird vor allem dann zweckmäßig sein, wenn bei einem Arbeitsgebiet im Bergland eine Vielzahl von elektronisch gemessenen Strecken mit starker Visurneigung vorliegt. Es ist aber immer zu überlegen, ob eine ausreichende Anzahl von überschüssigen Beobachtungen vorliegt, um eine solche gemeinsame Ausglei chung zielführend durchführen zu können. Im anderen Fall wäre eine Iteration in der Form zweckmäßiger, daß nach einer ersten Lageberechnung mit vorläufig reduzierten Strecken nach einem der vorhergehenden Abschnitte die Höhenberechnung durchgeführt wird und erst im Anschluß daran mit den endgültig reduzierten Strecken die endgültige Lageberechnung erfolgt.

Sind in einem Arbeitsgebiet im Bergland nur sehr wenige Streckenmessungen vorhanden, bringt diese gemeinsame Ausglei chung in der Hauptsache eine bessere Ermittlung und Berücksichtigung der Lotabweichungskomponenten im Zusammenhang mit den Richtungsmessungen. Ein wesentlich stärkerer Einfluß auf die Lageberechnung ist aber dann zu erwarten, wenn im Bergland viele gemessene Schrägstrecken vorliegen.

Im Flachland hätte aber eine solche gemeinsame Ausglei chung eine praktisch nur sehr geringe Bedeutung, da bei den flachen Visuren die Auswirkung der Korrekturen auf die horizontierten Strecken sehr gering ist.

Es ist also bei jeder Berechnungsgruppe genau zu prüfen, ob der Aufwand einer solchen gemeinsamen Ausglei chung sinnvoll ist und ob die daraus resultierenden Ergebnisse auch signifikant sein können.

Außer den für die Netzausglei chung notwendigen gegebenen Daten sollten wenigstens für zwei möglichst weit auseinander liegende Punkte die ellipsoidische Höhe und die Lotabweichungskomponenten bekannt sein. Da es aber, wie bereits mehrfach erwähnt, nur sehr bedingt möglich ist, die Refraktions- und Lotabweichungseinflüsse zu trennen, ist es besonders im Bergland wünschenswert, von möglichst vielen Punkten bereits vor der Ausglei chung die Lotabweichung zu kennen, um einigermaßen gesicherte Werte für die Refraktionseinflüsse erhalten zu können.



16,2 Fehlergleichungen

16,21 Fehlergleichungen für Richtungen

Für die gemeinsame Ausgleichung der Richtungs-, Strecken- und Vertikalwinkelmessungen muß an die erweiterte Gauß'sche Relation für die gemessenen Richtungen noch der Einfluß der Lotabweichung angebracht werden. Dies geschieht durch Einführen der Gleichung (6.14). Man erhält dann für eine Richtung  $R_{i,k}$  folgende Fehlergleichung:

$$v_{i,k}^{cc}(R) = a_{i,k}(R) \cdot dx_i + b_{i,k}(R) \cdot dy_i - a_{i,k}(R) \cdot dx_k - b_{i,k}(R) \cdot dy_k - do_i - \cot z_{i,k} \cdot \sin \alpha_{i,k} \cdot d\zeta_i^{cc} + \cot z_{i,k} \cdot \cos \alpha_{i,k} \cdot d\eta_i^{cc} + w_{i,k}(R) \quad \dots (16.1)$$

Hierin ist

$$a_{i,k}(R) = \frac{\rho^{cc}}{s_{i,k}(K)} \cdot \sin v_{i,k} \quad \dots (16.2)$$

$$b_{i,k}(R) = \frac{-\rho^{cc}}{s_{i,k}(K)} \cdot \cos v_{i,k} \quad \dots (16.3)$$

$$w_{i,k}(R) = v'_{i,k} - R_{i,k}^0 \quad \dots (16.4)$$

$do_i$  ..... Orientierungsunbekannte im Standpunkt  $P_i$

16,22 Fehlergleichungen für gemessene Schrägstrecken

Für eine horizontierte Strecke lautet in der Netzausgleichung die Fehlergleichung bekanntlich

$$v_{i,k}(s_{hor}) = a_{i,k}(s) \cdot dx_i + b_{i,k}(s) \cdot dy_i - a_{i,k}(s) \cdot dx_k - b_{i,k}(s) \cdot dy_k - s_{i,k}(K) \cdot M + w_{i,k}(s_{hor}) \quad \dots (16.5)$$

Hierin ist

$$a_{i,k}(s) = -\cos v_{i,k} \quad \dots (16.6)$$

$$b_{i,k}(s) = -\sin v_{i,k} \quad \dots (16.7)$$

$$w_{i,k}(s_{hor}) = s_{i,k}(K) - s_{i,k}(hor) \quad \dots (16.8)$$

$s_{hor}$  ..... horizontierte Strecke in der Rechenfläche

$M$  ..... Maßstabsfaktor

In diese Ausgleichung werden aber nicht wie in der Lageberechnung die horizontierten Strecken einbezogen, sondern die gemessenen Schrägstrecken. Es müssen daher die Streckenkoeffizienten  $a_{i,k}(s)$  und  $b_{i,k}(s)$  noch mit  $\sin z_{i,k}$  multipliziert werden. Eine Änderung der Streckenlänge

bewirkt aber auch eine Höhenänderung, die sich mit  $\cos z_{i,k}$  auf den Höhenunterschied auswirkt.

Somit lautet die Fehlergleichung für gemessene Schrägstrecken:

$$v_{i,k}(\bar{s}_M) = a_{i,k}(s) \cdot \sin z_{i,k} \cdot dx_i + b_{i,k}(s) \cdot \sin z_{i,k} \cdot dy_i - a_{i,k}(s) \cdot \sin z_{i,k} \cdot dx_k - b_{i,k}(s) \cdot \sin z_{i,k} \cdot dy_k - \cos z_{i,k} \cdot dH_i + \cos z_{i,k} \cdot dH_k - s_{i,k}(K) \cdot M + w_{i,k}(\bar{s}_M) \quad \dots (16.9)$$

Der Widerspruch  $w_{i,k}(\bar{s}_M)$  ist definiert durch

$$w_{i,k}(\bar{s}_M) = \sqrt{(\Delta y_{i,k}^2 + \Delta x_{i,k}^2) \cdot \left(1 + \frac{E_M}{R} - \frac{y_M^2}{2 \cdot R^2}\right)^2 + (H'_k - H'_i)^2} - \bar{s}_{i,k}(M) \quad \dots (16.10)$$

16,23 Fehlergleichungen für Vertikalwinkel; gemessene Schrägstrecken

Für diese gemeinsame Ausgleichung muß in Gleichung (15.6) das Glied mit  $d\bar{s}_{i,k}(M)$  erhalten bleiben.  $d\bar{s}_{i,k}(M)$  erhält man durch Differenzieren von Gleichung (4.4) nach s:

$$ds_{i,k}(E_M) = d\bar{s}_{i,k}(M) \cdot \sin z_{i,k} \quad \dots (16.11)$$

Hier wird noch  $dx_i$  und  $dy_i$  eingeführt, dann setzt man dies in Gleichung (15.6) ein. Man erhält schließlich die Fehlergleichung für Vertikalwinkel beim Vorliegen gemessener Schrägstrecken:

$$v_{i,k}^{cc}(z_{s_M}^-) = -a_{i,k}(z_{s_M}^-) \cdot \cot z_{i,k} \cdot \cos v_{i,k} \cdot dx_i - a_{i,k}(z_{s_M}^-) \cdot \cot z_{i,k} \cdot \sin v_{i,k} \cdot dy_i + a_{i,k}(z_{s_M}^-) \cdot \cot z_{i,k} \cdot \cos v_{i,k} \cdot dx_k + a_{i,k}(z_{s_M}^-) \cdot \cot z_{i,k} \cdot \sin v_{i,k} \cdot dy_k + a_{i,k}(z_{s_M}^-) \cdot dH_i - a_{i,k}(z_{s_M}^-) \cdot dH_k - \frac{Q \cdot \bar{s}_{i,k}(M)}{2 \cdot R_i(E)} \cdot dk_i - \cos \alpha_{i,k} \cdot d\epsilon_i^{cc} - \sin \alpha_{i,k} \cdot d\tau_i^{cc} - a_{i,k}(z_{s_M}^-) \cdot [(H'_k - H'_i) - \Delta H'_{i,k}] \quad \dots (16.12)$$

Der Koeffizient  $a_{i,k}(z_{s_M}^-)$  ist durch Gleichung (15.7) gegeben.

16,24 Fehlergleichungen für Vertikalwinkel; horizontale Strecken

Für die gemeinsame Ausgleichung muß in Gleichung (15.2) das Glied mit  $ds_{i,k}(E_M)$  erhalten bleiben. Es sind daher in die Fehlergleichung (15.4) die  $ds_{i,k}(E_M)$  Glieder mit den Koordinatenänderungen  $dx_i$  und  $dy_i$  einzubeziehen. Das ergibt folgende Fehlergleichung für Vertikalwinkel, wenn nur horizontale Strecken gegeben sind, wobei  $a_{i,k}(z_{s_{E_M}}^-)$  durch Gleichung (15.3) gegeben ist:

$$\begin{aligned}
 v_{i,k}^{cc}(z_{s_{EM}}) = & -a_{i,k}(z_{s_{EM}}) \cdot \cot z_{i,k} \cdot \cos v_{i,k} \cdot dx_i - a_{i,k}(z_{s_{EM}}) \cdot \cot z_{i,k} \cdot \sin v_{i,k} \cdot dy_i + \\
 & + a_{i,k}(z_{s_{EM}}) \cdot \cot z_{i,k} \cdot \cos v_{i,k} \cdot dx_k + a_{i,k}(z_{s_{EM}}) \cdot \cot z_{i,k} \cdot \sin v_{i,k} \cdot dy_k + \\
 & + a_{i,k}(z_{s_{EM}}) \cdot \frac{dH_i - a_{i,k}(z_{s_{EM}})}{2 \cdot \sin z_{i,k}} \cdot dk_i - \cos \alpha_{i,k} \cdot df_i^{cc} - \\
 & - \sin \alpha_{i,k} \cdot d\gamma_i^{cc} - a_{i,k}(z_{s_{EM}}) \cdot [(H'_k - H'_i) - \Delta H'_{i,k}] \quad \dots (16.13)
 \end{aligned}$$

HRADILEK verwendet in [27] auf Seite 406 in Gleichung (4) nur die für Horizontalentfernungen gültige Fehlergleichung für die Vertikalwinkel, obwohl er Schrägstrecken in die Ausgleichung einbezieht. Unter dieser Voraussetzung muß damit gerechnet werden, daß die so gewonnenen Ergebnisse mit Fehlern behaftet sind.

16,25 Höhenunterschiede aus gemessenen Schrägstrecken

Höhenunterschiede, die mit Gleichung (6.1) nur aus Schrägstrecken abgeleitet wurden, können in diese Art der Ausgleichung nicht einbezogen werden, da für alle Beobachtungen, aus denen diese Höhenunterschiede abgeleitet werden, bereits Fehlergleichungen enthalten sind.

16,3 Gewichte

Zur Berücksichtigung der Gewichte ist es zweckmäßig, vor dem Aufstellen und Auflösen der Normalgleichungen jede einzelne Fehlergleichung mit dem zugehörigen Wert  $\sqrt{P_{i,k}}$  zu multiplizieren.

Jeder gemessenen Richtung wird das Gewicht  $P_R$  zugeordnet:

$$P_R = \frac{c^2}{(m_R^{cc})^2} \quad \dots (16.14)$$

Für Steilvisuren kann man das Richtungsgewicht noch verfeinern, indem man auch den mittleren Fehler der Lotabweichung berücksichtigt. In Gleichung (16.14) wäre dann für  $m_R$  einzusetzen:

$$(m_R^{cc})^2 = (m_{R1}^{cc})^2 + (m_{R2}^{cc})^2 \cdot \cot^2 z_{i,k} \quad \dots (16.15)$$

Jeder gemessenen Strecke wird das Gewicht  $p_s$  zugeordnet:

$$p_s = \frac{c^2}{m_s^2} \quad \dots (16.16)$$

Die mittleren Streckenfehler  $m_s$  sind von dem verwendeten Streckenmeßgerät abhängig.

Das Gewicht eines Vertikalwinkels ist durch Gleichung (12.10) in Verbindung mit Gleichung (12.9) gegeben.

17 HÖHENBERECHNUNGEN IM SYSTEM DER GEBRAUCHSHÖHEN

Im Unterabschnitt 3,2 wurde das System der Gebrauchshöhen in Österreich kurz behandelt. Die Fehler, die in den horizontalen Strecken bei konventioneller Berechnung im System der Gebrauchshöhen enthalten sein können, wurden im Unterabschnitt 4,4 besprochen.

Hier soll nun auf die Vernachlässigungen eingegangen werden, die bei konventioneller Höhenberechnung im System der Gebrauchshöhen entstehen.

Es hat an sich vergleichsweise wenig Sinn, bei der Einschaltung zusätzlicher Punkte in das Mischsystem der österreichischen Gebrauchshöhen alle an sich notwendigen Reduktionen zu berücksichtigen, wie sie in den vorhergehenden Abschnitten besprochen worden sind. Auf der vorliegenden Grundlage können bei der Einschaltung neuer Punkte weder echte geoidische und schon gar nicht ellipsoidische Höhen erhalten werden.

Für die reine Höhenbestimmung im System der Gebrauchshöhen erscheint es daher am zweckmäßigsten, nur gemittelte Höhenunterschiede aus Hin- und Rückmessungen zu verwenden, die möglichst weitgehend vom Einfluß der Refraktion befreit wurden nach einer der Situation angepaßten Näherungsmethode.

Bisher wurden die Höhen der Festpunkte in der Hauptsache für kartographische Zwecke benötigt. Dafür sind die in konventioneller Weise erreichbaren Genauigkeiten der Höhen nach wie vor mehr als ausreichend. Für technische Projekte werden in den meisten Fällen lokale Höhensysteme entwickelt, aufbauend auf eigenen Nivellements, so daß solche Projekte vielfach unabhängig vom Gebrauchshöhennetz sind.

Im allgemeinen wurden die trigonometrisch bestimmten Gebrauchshöhen aus den Mittelwerten der Höhenunterschiede von Hin- und Rückmessung abgeleitet und zwar fast ausschließlich unter Verwendung horizontaler Seiten. Der Fehler, der hierbei gegenüber den echten geoidischen Höhenunterschieden entsteht, wird durch Gleichung (10,24) ausgedrückt. Das erste Glied auf der rechten Seite von Gleichung (10,24) beinhaltet den Einfluß der Differenz der restlichen Refraktionsfehler von beiden Visurendpunkten. Da im allgemeinen grundsätzlich mit dem HARTL'schen Refraktionskoeffizienten, Gleichung (1.1), gerechnet wurde, kann dieses Glied unter Umständen einigen Einfluß ausüben, vor allem bei Steilvisuren. In Abb. 17,1 ist dieser Einfluß für Seitenlängen bis 10 km und für verschiedene Differenzwinkel der verbleibenden Refraktionsfehler dargestellt bei horizontaler Visur. Für Steilvisuren ist der hier dargestellte Fehleranteil noch durch  $\sin^2 z$  zu dividieren.

Bei bodennahen Visuren wurden in der Praxis zwischen den Höhenunterschieden der Hin- und Rückmessung Differenzen festgestellt, die oft ein mehrfaches der in Abb. 17,1 dargestellten Fehler betragen, die ja für den Mittelwert gelten.

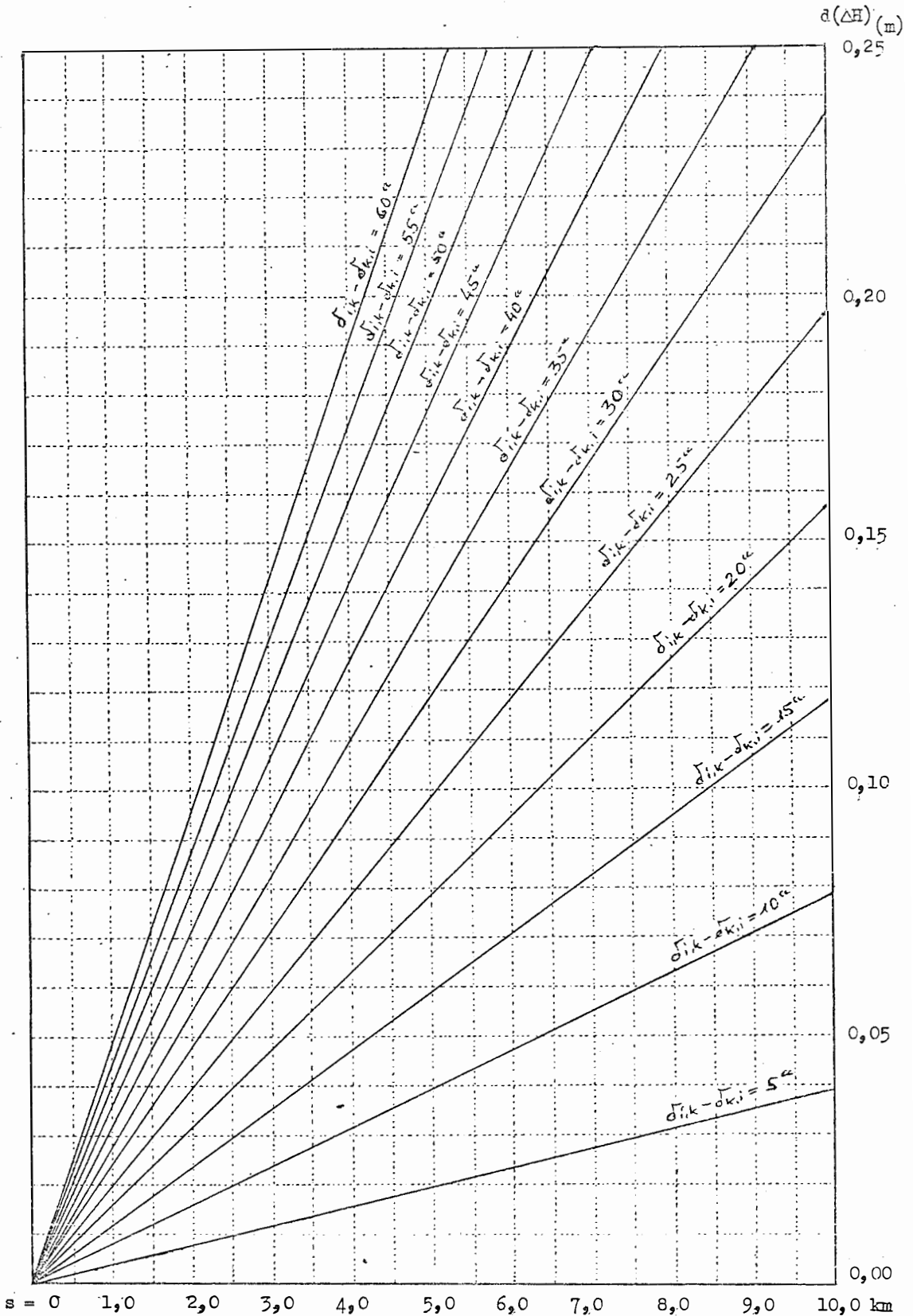


Abb. 17.1 Auswirkung der Differenz der restlichen Refraktionsfehler auf  $\Delta H$

Das zweite Glied auf der rechten Seite von Gleichung (10.24) stellt den Einfluß der Lotabweichungs- und Lotkrümmungsdifferenz von beiden Visurendpunkten dar. Bei horizontalen Visuren ist dieser Einfluß gleich Null, er wird mit steigender Visurmeigung größer. Für eine Zenitdistanz von  $50^\circ$  ist dieser Einfluß analog wie in Abb. 17.1 darzustellen.

Die Auswirkungen dieser beiden Glieder von Gleichung (10.24) können einander teilweise aufheben, sie können sich aber auch summieren. Vor allem im Bergland muß man damit rechnen, daß Differenzen bis in den Dezimeterbereich auftreten können zwischen den echten geoidischen Höhenunterschieden und solchen Höhenunterschieden, wie sie bisher mit alleiniger Verwendung von horizontalen Strecken und einem einheitlichen Refraktionskoeffizienten berechnet wurden. Man muß daher auch bei den trigonometrisch ermittelten Höhen im System der Gebrauchshöhen mit Fehlern von der gleichen Größenordnung gegenüber den tatsächlichen geoidischen Höhen rechnen. Während im Bergland diese Höhenfehler mehr systematischen Charakter haben werden, ist damit zu rechnen, daß im Flachland mit vorwiegend bodennahen Visuren wegen der überwiegenden Refraktionsfehler die Höhenfehler mehr zufälligen Charakter aufweisen werden.

Das dritte Glied von Gleichung (10.24) wird im allgemeinen praktisch keinen Einfluß ausüben, worauf bereits im Unterabschnitt 10,71 hingewiesen wurde.

18 BEISPIEL RAURIS

18,1 Allgemeines

Im Sommer 1976 hatte die Triangulierungsabteilung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen in Wien im Bundesland Salzburg unter anderem auch im Gebiet von Rauris ein Triangulierungsoperat zu machen, Operat S-100/1976.

Um nun die Auswirkungen der bisher üblichen Vernachlässigung der Einflüsse der Lotabweichungen und der Refraktionsanomalien auf die Höhenberechnung und in weiterer Folge auf die <sup>R</sup>eduktion der elektronisch gemessenen Schrägstrecken und damit auch auf die Lageberechnung in ihrer Größenordnung an einem praktischen Beispiel aufzeigen zu können, wurden in einem Teil dieses Operates die dafür notwendigen zusätzlichen Messungen vorgenommen. Außer zusätzlichen Richtungs-, Höhenwinkel- und Streckenmessungen wurden in dem ausgewählten Bereich für einige Punkte aus astronomischen Messungen die Lotabweichungen abgeleitet. Als Folge der ungünstigen Witterungsverhältnisse war es leider nicht möglich, auf allen geplanten Punkten die Lotabweichungsbestimmungen durchzuführen. Die astronomischen Messungen und die Berechnung der Lotabweichungen wurden von der Abteilung K 2 des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen durchgeführt.

Sämtliche Messungen wurden mit Absicht unter normalen Feldarbeitsbedingungen vorgenommen, es wurden also keine besonderen Vorsichtsmaßnahmen getroffen, wie z. B. Messen von einer größeren Anzahl von Sätzen usw. Es sollte ja erprobt werden, welche Ergebnisse man unter den üblichen Feldarbeitsbedingungen erhält. Bei einer Vornahme dieser zusätzlichen Messungen in einem größeren räumliche Umfang könnte schließlich aus wirtschaftlichen Gründen nur das unbedingt notwendige Ausmaß an zusätzlichen Messungen vertreten werden.

Für die hier durchgeführten Untersuchungen wurde aus dem Operat S-100 vom Reißbrachkopf bis zum Schareck aus den tatsächlichen Beobachtungen eine kettenartige Verbindung herausgelöst. Es ist daher bei einzelnen Richtungsätzen im Operat noch eine Anzahl von Richtungen nach anderen Punkten vorhanden, die hier nicht mit verwendet worden sind.

Einerseits sollte erprobt werden, ob es praktisch möglich ist, allein durch das Anlegen von Dreiecken, in denen alle drei Seiten gemessen wurden, die Auswirkungen von Refraktion und Lotabweichung ausschalten zu können. Wäre diese Methode zielführend, könnte man sich das Messen von Lotabweichungen und die Ermittlung der Refraktion in solchen Fällen ersparen, wo es gelingt, in der Natur günstige Dreiecke zu schaffen, wobei jeweils eine Dreiecksseite nahezu horizontal sein sollte und die anderen beiden Seiten

eine Visurneigung von mehr als  $20^{\text{S}}$  gegen die Horizontale aufweisen sollten, um dieses Ziel erreichen zu können.

Weiters sollte die Größenordnung der Lotabweichungen bei einer Hochgebirgsarbeit aufgezeigt werden, sowie die auftretenden Verschiedenheiten als Folge der unterschiedlichen topographischen Gegebenheiten. Interessant war vor allem die Größenordnung der Auswirkungen auf die gemessenen Höhenwinkel, auf die gemessenen Richtungen und auf die reduzierten Strecken. Darüber hinaus sollte auch der Einfluß der Refraktionsänderungen ermittelt werden.

Es sollte auch erprobt werden, ob die im Rahmen einer Ausgleichung rechnerisch ermittelten Lotabweichungskomponenten plausible Werte ergeben.

Schließlich sollte in einigen Varianten einer Netzausgleichung festgestellt werden, wie groß die Auswirkungen der hierbei auftretenden Änderungen auf die Lageberechnung sind.

Die Abb. 18.1 zeigt in einer Lageskizze die für diese Arbeit verwendeten Punkte und Beobachtungen. Die nachstehende Tabelle 11 beinhaltet die von der Abteilung K 2 an die <sup>T</sup>riangulierungsabteilung bekannt gegebenen Lotabweichungskomponenten:

Punkt	$\xi^{\text{cc}}$	$\eta^{\text{cc}}$	$\vartheta^{\text{cc}}$	A
19-154	+ 35,3	+ 13,9	37,9	$23^{\text{S}}88^{\text{C}}$
36-154	+ 39,4	+ 14,4	42,0	$22^{\text{S}}22^{\text{C}}$
47-154	+ 32,0	+ 20,1	37,8	$35^{\text{S}}61^{\text{C}}$
53-154	+ 35,5	+ 16,7	39,2	$27^{\text{S}}96^{\text{C}}$
87-154	+ 46,5	+ 41,3	62,2	$46^{\text{S}}23^{\text{C}}$
108-154	+ 39,0	+ 2,3	39,0	$3^{\text{S}}77^{\text{C}}$
111-154	+ 32,4	- 10,8	34,2	$379^{\text{S}}52^{\text{C}}$
113-154	+ 29,6	+ 8,3	30,8	$17^{\text{S}}45^{\text{C}}$
114-154	+ 30,1	- 3,7	30,3	$392^{\text{S}}20^{\text{C}}$
115-154	+ 32,5	+ 25,6	41,3	$42^{\text{S}}49^{\text{C}}$
116-154	+ 22,7	- 18,6	29,4	$356^{\text{S}}26^{\text{C}}$

Tabelle 11: Lotabweichungskomponenten aus Messung

In den  $\xi$ -Komponenten sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Punkten verhältnismäßig gering. Größere Unterschiede zeigen sich jedoch bei den  $\eta$ -Komponenten, die sehr deutlich die Auswirkungen der Geländeformen widerspiegeln, bedingt dadurch, daß das Tal nahezu in Nord-Süd-Richtung verläuft. Die Spalte für  $\vartheta^{\text{cc}}$  gibt die Gesamtlotabweichung an und die Spalte "A" das Azimut der Lotabweichung.



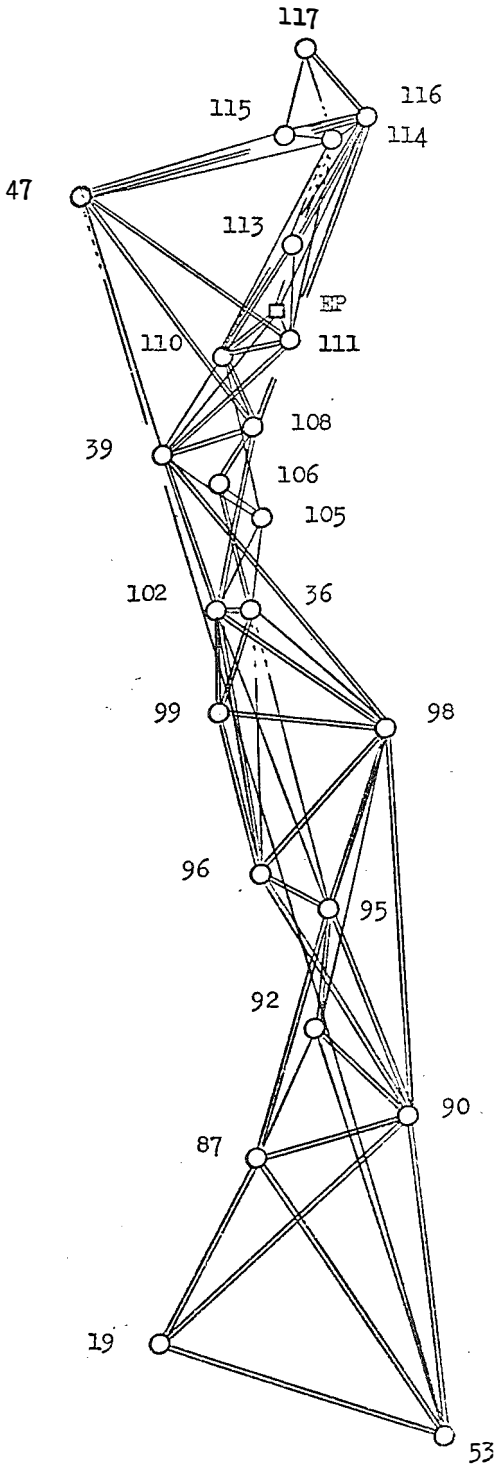
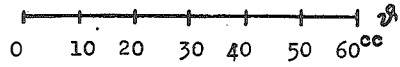


Abb. 18.1 Lageskizze Rauris

# 154 RAURIS

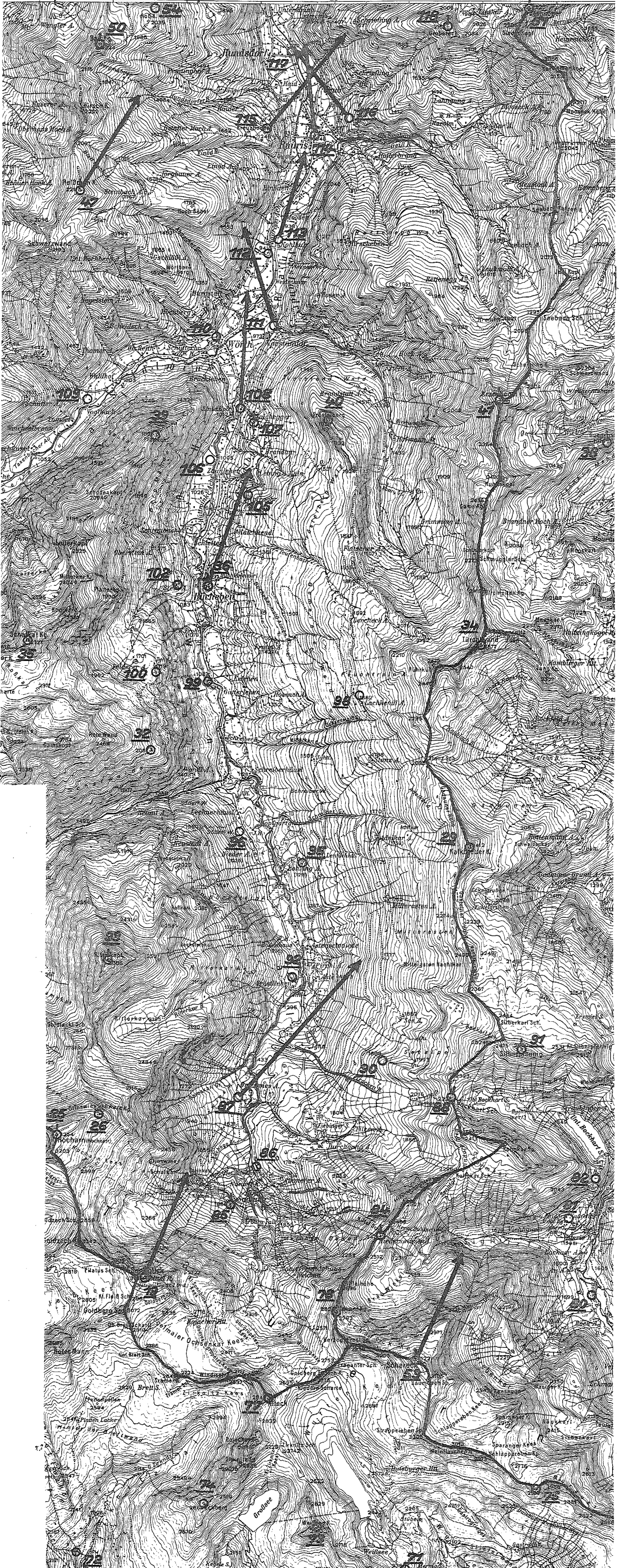
124 Saalfelden am Steinernen Meer



V. A. Zell am Salzburg See

13°

V. A. St. Johann



In Abb. 18,2, einem Ausschnitt aus der Punktübersicht 1 : 50 000, sind die aus den astronomischen Messungen abgeleiteten Lotabweichungen eingezeichnet.

18,2 Streckenreduktion

Ein Ziel dieser Untersuchungen war, auszuprobieren, ob es möglich wäre, ohne Messen der Lotabweichungen und ohne Berechnung der Refraktionsänderungen allein durch das Auflösen von Dreiecken ausgehend von nahezu horizontal gemessenen Strecken, für die praktisch die Vernachlässigung der Refraktions- und Lotabweichungseinflüsse bedeutungslos wäre, für Steilvisuren plausible Streckenwerte abzuleiten. Dieser Versuch muß praktisch als gescheitert betrachtet werden.

Es hat sich gezeigt, daß es oft nur schwer und manchmal überhaupt nicht möglich ist, für die Anwendung dieser Methode die notwendigen Voraussetzungen zu schaffen. Die notwendigen Dreiecke sollen nahezu gleichseitig sein, eine Dreiecksseite soll nahezu horizontal sein und die beiden anderen Dreiecksseiten sollen eine Visurneigung gegenüber der Horizontalen von mehr als  $20^{\circ}$  haben, um aus diesen Dreiecken einerseits die entsprechend reduzierten Strecken, andererseits die von Lotabweichung und Refraktion unabhängigen Höhenunterschiede ableiten zu können. Es ergaben sich bei dieser Arbeit nur wenige Dreiecke, die von der Form her wirklich gut für die Dreiecksauflösung geeignet sind. Obwohl dies eine Hochgebirgsarbeit ist, sind unter den hier verwendeten 38 Strecken nur zwei, die für die Anwendung der Gleichung (6.1) zu fordernde Bedingung erfüllen, daß sie eine Visurneigung von mehr als  $20^{\circ}$  haben. Nur weitere 6 Strecken haben eine Visurneigung zwischen  $15^{\circ}$  und  $20^{\circ}$ . Diese praktische Anwendung hat also vor allem einmal erwiesen, wie schwierig es ist, sogar bei einer Hochgebirgsarbeit die Grundvoraussetzungen für die Anwendung dieser Methode zu schaffen.

Es war in diesem Beispiel Rauris möglich, eine Reihe von Strecken aus mehreren Dreiecken ableiten zu können. In der Tabelle 12 sind jene gemessenen Strecken zusammengestellt, die auch aus Dreiecken abgeleitet werden konnten. Hier zeigt sich nun, daß zwischen den aus mehreren Dreiecken abgeleiteten Strecken Differenzen auftreten, die zum Teil größer als 10 cm sind. Vergleicht man andererseits die aus den Dreiecksauflösungen stammenden Strecken mit jenen Werten, die aus der Reduktion unter Berücksichtigung der gemessenen Lotabweichungen, jedoch unter Verwendung des HARTL-Refraktionskoeffizienten stammen, und weiters mit den unter Verwendung von ellipsoidischen Höhen reduzierten Strecken, zeigen sich gleichfalls beträchtliche Unterschiede. Die größten Differenzen ergaben sich in jenen Fällen, wo die Ausgangsseite für die Dreiecksauflösung aus einem (in Tabelle 12 in Klammer beigefügten) Nachbardreieck abgeleitet wurde.

Von-nach	Konform reduzierte Strecke				
	Konvent. Berechnung	aus Sinussatz	Dreieck	m. Lotabw., HARTL- <sup>R</sup> refr.	aus ellips. Höhen
19- 87	3349,0983	3349,1618 ,1951 ,2488	19- 53- 87 19- 87- 90 19- 87- 90 (87- 90- 95)	3348,9655	-
19- 90	5402,5956	5402,6559 ,6455 ,7320	19- 53- 90 19- 87- 90 19- 87- 90 (87- 90- 95)	5402,5468	-
39-102	2562,0878	2562,0815	39- 98-102	-	-
39-108	1474,5374	1474,5316	39-108-110	1474,5174	1474,4869
39-111	2767,2088	2767,1342 .1840	39- 47-111 39-111- EP	2767,1895	2767,1624
47-108	4610,6036	4610,6666 ,5804	47-108-114 47-108-116	4610,6441	4610,5823
47-111	4021,2261	4021,2392	39- 47-111	4021,2536	4021,1771
47-116	4707,8361	4707,8767	47-108-116	4707,8724	4707,8036
53- 87	5312,8726	5312,9405 3,0158 3,1007	19- 53- 87 53- 87- 90 53- 87- 90 (87- 90- 95)	5312,8293	-
53- 90	5122,1445	5122,1339 ,1948 ,2767	19- 53- 90 53- 87- 90 53- 87- 90 (87- 90- 95)	5122,0508	-
87- 90	2505,2390	2505,2791	87- 90- 95	2505,2639	-
90- 92	2017,3902	2017,4310 ,3971	90- 92- 95 90- 92- 98	-	-
90- 95	3552,2917	3552,3416 ,2730 ,3395 ,2122	87- 90- 95 90- 92- 95 90- 95- 96 90- 95- 98	-	-
90- 96	4551,0314	4550,9814 1,0281	90- 95- 96 90- 96- 98	-	-
95- 98	3059,7455	3059,7552 ,7918 ,6771	90- 95- 98 95- 96- 98 95- 98-102 (95- 96-102)	-	-
96- 98	3099,4122	3099,5004 ,4774 ,4073 ,3502	90- 96- 98 95- 96- 98 96- 98- 99 96- 98-102	-	-
98- 99	2593,5692	2593,5418 .4849	96- 98- 99 98- 99-102	-	-
98-102	3605,2677	3605,3042 ,3019 ,2362 ,2142	39- 98-102 95- 98-102 (95- 96-102) 96- 98-102 98- 99-102	-	-
116-117	1458,2287	1458,2104	115-116-117	1458,2183	1458,2236

Die in Tabelle 12 ausgewiesenen Ergebnisse zeigen, daß diese Methode für den allgemeinen Fall der Anwendung zu unsicher ist. Die auftretenden Differenzen sind offensichtlich auf den Einfluß der Lotabweichungen zurückzuführen, sind doch bei jenen Punkten, wo gemessene Lotabweichungen vorliegen, bei Berücksichtigung der Lotabweichungen Richtungsänderungen von  $+ 20,0^{\text{cc}}$  bis  $- 17,6^{\text{cc}}$  entstanden, was selbstverständlich Auswirkungen auf die Dreiecksauflösungen hat.

Wegen der großen Differenzen zwischen den aus mehreren Dreiecken abgeleiteten Strecken wurde der anzuschließende Versuch unterlassen, aus diesen Strecken unter Verwendung von Gleichung (6.1) Höhenunterschiede abzuleiten. Eine wesentliche Voraussetzung wäre hierfür, daß für die Talpunkte ellipsoidische Höhen bekannt wären, für deren Ermittlung man wieder Lotabweichungsmessungen benötigt.

Dieser Teil der Untersuchungen beim Beispiel Rauris zeigt also deutlich, daß es einerseits bereits sehr schwierig ist, in der Natur bei der Auswahl der benötigten Dreiecke die notwendigen Voraussetzungen zu schaffen, und daß es außerdem zu erwarten ist, daß bei der Auflösung von Dreiecken in einer Hochgebirgsregion zufolge der nicht berücksichtigten Lotabweichungseinflüsse Streckenfehler bis in den Dezimeterbereich auftreten können. Man muß also aus diesem Beispiel Rauris den Schluß ziehen, daß in solchen Extremfällen der Anschluß an Hochgebirgspunkte vom Tal aus nur unter bestimmten Voraussetzungen durchgeführt werden darf, wenn man keine zusätzlichen Netzspannungen erzielen will. Ob man nun Richtungsmessungen allein verwendet und mit ihrer Hilfe aus im Tal gemessenen Strecken Anschlußstrecken zu den Bergpunkten ableitet, ob man nur eine Ausgleichung unter Verwendung von Richtungsmessungen durchführt, oder ob man direkt gemessene Strecken verwendet, der Lagefehler kann in den Talpunkten bis in den Dezimeterbereich gehen, wenn man die Auswirkungen der Lotabweichungen ignoriert.

Hier taucht natürlich sofort der Gedanke auf, auf den Anschluß an die Bergpunkte überhaupt zu verzichten, um sich aus wirtschaftlichen Gründen die notwendigen zusätzlichen Messungen ersparen zu können. Abgesehen davon, daß es etliche Fälle geben wird, wo es unbedingt notwendig ist, diesen Anschluß durchzuführen, um überhaupt eine Kontrolle erreichen zu können, ist auch in den anderen Fällen die Verpflichtung gegeben, die Nachbarschaftsbeziehung herzustellen. Und was geschieht dann, wenn man bei der Bestimmung der Neupunkte auf den Anschluß an die Bergpunkte verzichtet und im Rahmen einer Folgemessung muß später eine Verbindung zwischen einem Talpunkt und einem nicht berücksichtigten Bergpunkt hergestellt werden?

In diesem Zusammenhang tauchen ja überhaupt einige offene Fragen auf. Einerseits wurde das bisher erstellte Gebrauchsnetz ohne Berücksichtigung

der Lotabweichungseinflüsse berechnet. Hat es daher einen Sinn, in einen Rahmen, der möglicherweise als Folge davon mit Lagefehlern behaftet ist, in Zukunft mit größerer Genauigkeit Neupunkte hineinzustellen? Eine weitere Frage ist, was geschieht bei Nachfolgemessungen? Werden in einem Gebiet, wo die Festpunkte mit Berücksichtigung der Lotabweichungen bestimmt worden sind, bei Nachfolgemessungen keine Lotabweichungen bestimmt und berücksichtigt, besteht gleichfalls die Möglichkeit, daß größere Spannungen auftreten. Doch alle diese Fragen stehen außerhalb des Rahmens dieser Arbeit, da diesbezügliche Entscheidungen auf einer anderen Ebene liegen.

Außer der Untersuchung der Ergebnisse der Dreiecksauflösungen wurde der bisher üblichen konventionellen Berechnung der reduzierten Strecken die Reduktion unter Berücksichtigung der vorhandenen Lotabweichungsmessungen, aber unter Verwendung der HARTL-Refraktion gegenüber gestellt.

Für die kleine Figur, von den Punkten 39-154 und 108-154 nach Norden, wurden durch eine Ausgleichung nach Abschnitt 13 die Refraktionsänderungen und für jene Punkte, für welche sie nicht aus den astronomischen Messungen abgeleitet worden sind, auch die Lotabweichungskomponenten ermittelt. Hernach wurde eine ellipsoïdische und eine geoidische Höhenberechnung durchgeführt.

Unter Verwendung der so erhaltenen ellipsoïdischen Höhen wurde nochmals eine Reduktion der gemessenen Schrägstrecken vorgenommen. Dies wären eigentlich erst die richtig reduzierten Strecken.

Die Ergebnisse dieser drei Arten der Streckenreduktion sind in der Tabelle 13 zusammengestellt.

Die größte Differenz zwischen der Berechnung in herkömmlicher Weise und unter Berücksichtigung der Lotabweichung ergab sich bei der Strecke von 19 nach 87, unter Verwendung eines der beiden Höhenwinkel mit 175 mm, im Mittel aus Hin- und Rückmessung mit 133 mm. Andererseits zeigte sich die größte Auswirkung der in der Ausgleichung errechneten Refraktionsänderungen bei den Strecken zum Punkt 47 im Vergleich mit den nur bezüglich der Lotabweichung korrigierten Strecken immerhin noch mit 62 mm, 76 mm und 69 mm.

Die Zusammenstellung in Tabelle 13 zeigt deutlich, wie gefährlich es sein kann, im Hochgebirge die Streckenreduktion ohne Berücksichtigung der Lotabweichungen und ohne Errechnung eines aktuellen Wertes für die Refraktion durchzuführen, da die Auswirkungen auf die horizontale Seite immerhin bis in den Dezimeterbereich gehen können.

Andererseits macht die Tabelle 13 deutlich, daß es bei nahezu horizontal gemessenen Strecken praktisch bedeutungslos ist, ob diese Einflüsse bei der Reduktion berücksichtigt werden oder nicht.

Tabelle 13: Gegenüberstellung verschiedener Arten der Streckenreduktion

Von-nach	Visur- neigung	Konform reduzierte Strecken						
		Konventionelle Berechnung			gemessene Lotabweichung, HARTL-Ref.			ellipsoid. Höhen
		Hin	Zurück	Mittel	Hin	Zurück	Mittel	
19- 07	- 27,15 <sup>g</sup>	3349,0429	3349,1536	3349,0983	3348,9526	3348,9783	3348,9655	-
19- 90	- 13,48 <sup>g</sup>	5402,6092	5402,5819	5402,5956	5402,5468	-	-	-
36- 99	- 1,59 <sup>g</sup>	1603,9349	1603,9352	1603,9350	1603,9374	-	-	-
36-102	+ 4,18 <sup>g</sup>	533,1357	533,1377	533,1367	533,1351	-	-	-
36-106	- 3,67 <sup>g</sup>	-	-	2040,9327	-	-	2040,8683	-
39-108	- 31,89 <sup>g</sup>	1474,5402	1474,5345	1474,5374	-	1474,5174	-	1474,4869
39-111	- 19,29 <sup>g</sup>	2767,2072	2767,2104	2767,2088	-	2767,1895	-	2767,1624
47-108	- 15,94 <sup>g</sup>	4610,5925	4610,6147	4610,6036	4610,6180	4610,6701	4610,6441	4610,5823
47-111	- 18,75 <sup>g</sup>	4021,2231	4021,2291	4021,2261	4021,2260	4021,2812	4021,2536	4021,1771
47-116	- 14,53 <sup>g</sup>	4707,9129	4707,8593	4707,8861	4707,8650	4707,8798	4707,8724	4707,8036
53- 87	- 17,97 <sup>g</sup>	5312,8553	5312,8899	5312,8726	5312,8075	5312,8510	5312,8293	-
53- 90	- 14,39 <sup>g</sup>	5122,1123	5122,1767	5122,1445	5122,0508	-	-	-
87- 90	+ 9,13 <sup>g</sup>	2505,2338	2505,2442	2505,2390	2505,2639	-	-	-
87- 95	- 3,81 <sup>g</sup>	4195,6818	4195,6912	4195,6865	4195,6596	-	-	-
102-108	- 2,95 <sup>g</sup>	3172,6377	3172,6355	3172,6366	-	3172,6268	-	-
106-108	+ 0,48 <sup>g</sup>	1083,6005	1083,6005	1083,6005	-	1083,6009	-	-
108-110	- 1,35 <sup>g</sup>	1212,7725	1212,7724	1212,7724	1212,7711	-	-	1212,7711
108-116	+ 1,03 <sup>g</sup>	5281,3987	5281,3995	5281,3991	5281,4037	5281,4015	5281,4026	5281,4025
110-111	- 0,94 <sup>g</sup>	1041,0362	1041,0362	1041,0362	-	1041,0362	-	1041,0361
110-113	- 1,96 <sup>g</sup>	2097,0570	2097,0589	2097,0579	-	2097,0558	-	2097,0547
110- EF	- 3,14 <sup>g</sup>	1055,9830	1055,9841	1055,9836	-	-	-	1055,9815
113-116	+ 4,80 <sup>g</sup>	2328,1628	2328,1649	2328,1638	2328,1710	2328,1678	2328,1694	2328,1687
116-117	- 8,53 <sup>g</sup>	1458,2274	1458,2300	1458,2287	1458,2183	-	-	1458,2238



18,3 Netzausgleichungen

Zur Erprobung, welche Auswirkungen die im Unterabschnitt 18,2 zusammengestellten Differenzen in den nach verschiedenen Methoden reduzierten Strecken auf die Koordinaten der Festpunkte haben, wurde eine Reihe von Netzausgleichungen elektronisch im Bundesrechenzentrum mit dem neu erstellten Programm "EDV-Netz 77" durchgeführt.

Vorerst wurde die in Abb. 18,1 dargestellte Gesamtfigur in die Netzausgleichung einbezogen, hierfür wurden die Punkte 47-154 und 53-154 als gegeben angenommen und alle übrigen Festpunkte als Neupunkte betrachtet.

Um auch die Auswirkung der für die kleine Figur in einer getrennten Ausgleichung ermittelten Refraktionsunterschiede auf die Lageberechnung erproben zu können, wurde zusätzlich noch die kleine Figur von den Punkten 39-154 und 108-154 nach Norden allein der Netzausgleichung unterzogen. Hiefür wurden die Punkte 39-154 und 47-154 als gegeben angenommen.

Insgesamt wurden folgende Netzvarianten durchgerechnet:

- a) Gesamtfigur, ohne Maßstabsfaktor, Strecken konventionell reduziert, HARTL-Refraktion, ohne Berücksichtigung der Lotabweichungen.
- b) Gesamtfigur, ohne Maßstabsfaktor, Richtungen auf den Standpunkten mit gemessener Lotabweichung entsprechend reduziert, Streckenreduktion unter Berücksichtigung der gemessenen Lotabweichungen, aber mit HARTL-Refraktion. Da nicht bei allen Punkten Lotabweichungen vorliegen, entstehen auch nicht bei allen Punkten Änderungen in den Ausgangsdaten.
- c) Gesamtfigur wie a), aber mit Maßstabsfaktor.
- d) Gesamtfigur wie b), aber mit Maßstabsfaktor.
- e) Kleine Figur wie a).
- f) Kleine Figur wie b).
- g) Kleine Figur, ohne Maßstabsfaktor, Richtungen wie in b), Strecken unter Verwendung der ellipsoidischen Höhen reduziert.
- h) Kleine Figur wie a), aber mit Maßstabsfaktor.
- k) Kleine Figur wie g), aber mit Maßstabsfaktor.

Die Ergebnisse dieser 9 Varianten wurden in der Tabelle 14 zusammengestellt.

Die ausgewiesenen Koordinatenänderungen beziehen sich auf die im Operat S-100 errechneten Koordinaten. Es müssen daher die Varianten b), c) und d) mit der Variante a) verglichen werden und die Varianten f), g), h) und k) mit der Variante e).



Tabelle 14

Punkt	Koordinatenänderungen in mm für Variante																	
	a)		b)		c)		d)		e)		f)		g)		h)		k)	
	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx
19	- 26	+ 11	- 25	+ 29	- 16	+ 1	- 25	+ 30	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
36	+ 5	- 1	- 44	- 72	- 23	- 20	- 42	- 71	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
39	- 1	+ 4	- 35	- 63	- 25	- 17	- 33	- 61	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
87	+ 2	+ 22	- 38	- 60	- 2	+ 9	- 38	- 59	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
90	+ 5	- 8	- 9	- 82	- 12	- 11	- 7	- 82	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
92	+ 8	+ 3	- 19	- 80	- 9	- 8	- 18	- 79	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
95	+ 15	+ 3	- 21	- 82	- 9	- 11	- 19	- 81	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
96	+ 12	- 1	- 25	- 82	- 11	- 15	- 24	- 81	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
98	+ 12	+ 4	- 31	- 71	- 23	- 13	- 29	- 70	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
99	+ 5	0	- 42	- 78	- 21	- 19	- 40	- 77	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
102	+ 7	- 4	- 39	- 79	- 19	- 23	- 37	- 78	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
105	+ 13	+ 7	- 37	- 88	- 15	- 16	- 35	- 86	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
106	0	- 1	- 38	-113	- 29	- 23	- 36	-111	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
108	+ 3	+ 1	- 37	- 95	- 26	- 21	- 35	- 94	+ 1	- 5	- 5	- 48	- 42	- 27	- 11	+ 5	- 38	- 31
110	0	- 5	- 30	- 97	- 23	- 28	- 28	- 95	- 3	- 10	- 7	- 48	- 51	- 39	- 14	- 8	- 47	- 39
111	+ 4	0	- 23	-100	- 22	- 28	- 21	- 99	+ 2	- 2	+ 3	- 43	- 50	- 18	- 16	0	- 44	- 19
113	0	- 3	- 14	-104	- 17	- 35	- 13	-102	- 3	- 6	- 4	- 50	- 68	- 31	- 22	- 11	- 62	- 29
114	- 20	- 26	- 14	-129	- 27	- 66	- 14	-126	- 22	- 28	- 22	- 72	-104	- 51	- 44	- 40	- 96	- 47
115	- 26	- 31	- 10	-111	- 31	- 64	- 9	-109	- 28	- 33	- 17	- 65	-100	- 53	- 46	- 45	- 93	- 49
116	- 1	- 10	+ 6	-114	- 7	- 54	+ 6	-111	- 3	- 12	- 6	- 52	- 85	- 22	- 26	- 26	- 77	- 17
117	- 17	- 15	+ 7	-118	- 12	- 56	+ 7	-115	- 19	- 17	- 17	- 66	-112	- 41	- 37	- 37	-105	- 34
EP	+ 2	- 1	- 22	- 99	- 20	- 31	- 21	- 97	- 1	- 4	- 3	- 41	- 54	- 28	- 16	- 6	- 48	- 27

In Tabelle 15 sind noch weitere wesentliche Ausgleichungsergebnisse für die 9 Varianten zusammengestellt, wobei festzustellen ist, daß bei der Verwendung konventionell reduzierter Strecken in diesem Beispiel ein etwas höherer Maßstabsfaktor entsteht als bei Verwendung der unter Berücksichtigung der Lotabweichungen reduzierten Strecken.

Variante	$m_R^{cc}$	$m_S$	Maßstabsfaktor mm/km	$v_S$	$m_P$
		(mm)		in mm von bis	in mm von bis
a)	4,9	10	.	+27 -31	20-30
b)	4,9	10	.	+23 -17	19-29
c)	4,7	9	- 2,9	+12 -33	20-30
d)	4,9	10	+ 0,2	+23 -17	21-32
e)	3,8	8	.	+ 7 -11	8-19
f)	4,7	9	.	+11 -21	10-23
g)	4,6	9	.	+17 -15	10-23
h)	3,6	7	- 5,1	- 1 -35	9-21
k)	4,7	9	+ 1,9	+23 - 7	12-27

Tabelle 15

Die Tabelle 16 beinhaltet eine Zusammenstellung des Vergleiches verschiedener Varianten. Hier sind die Unterschiede  $\delta(dy)$  und  $\delta(dx)$  in den Koordinatenänderungen und die maximale Lageverschiebung  $ds_{max}$  zwischen den betreffenden Varianten angeführt.

Vergl. d. Varianten	$\delta(dy)$	$\delta(dx)$	$ds_{max}$	Punkt
	in mm von bis	in mm von bis	in mm	
c) - a)	+ 10 - 25	- 3 - 44	44	116-154
d) - b)	+ 2 0	+ 3 0	.	116-154
h) - e)	- 11 - 23	+ 10 - 20	27	117-154
k) - g)	+ 8 + 4	+ 7 - 4	.	.
b) - a)	+ 24 - 50	+ 18 -104	118	106-154
d) - c)	+ 22 - 36	+ 29 - 88	88	106-154
f) - e)	+ 11 - 6	- 32 - 49	49	117-154
g) - e)	- 43 - 93	- 10 - 29	96	117-154
g) - f)	- 37 - 95	+ 30 + 9	98	117-154
k) - h)	- 27 - 68	+ 9 - 36	68	117-154

Tabelle 16

Hier zeigt sich, daß die Lageänderung bis in den Dezimeterbereich gehen kann, abhängig davon, ob man die gemessenen Schrägstrecken ohne oder mit Berücksichtigung der Lotabweichungen reduziert. Interessant ist auch noch die relativ große Lageänderung zwischen den beiden Varianten

f) und g), wo in beiden Fällen bereits die Lotabweichungen berücksichtigt sind. Ursache für diese Änderungen sind die aus der getrennten Ausgleichung stammenden Refraktionsänderungen, die in den ellipsoidischen Höhen ihren Niederschlag finden.

18,4 Höhenberechnungen

Als Grundlage der Höhenberechnungen wurden die Höhenunterschiede in verschiedenen Varianten berechnet. Vor allem erfolgte eine Berechnung in konventioneller Weise. Jene Höhenunterschiede, wo für den Standpunkt der Höhenwinkelmessung eine Lotabweichungsbestimmung vorlag, wurden in der zweiten Variante unter Berücksichtigung der Lotabweichungen berechnet, aber mit Verwendung der HARTL-Refraktion. Diese Höhenunterschiede waren denn die Ausgangswerte für die Ausgleichung nach Abschnitt 13, die über den Bereich der kleinen Figur erstreckt wurde, von den Punkten 39-154 und 108-154 nach Norden. Dadurch sollten die in dieser Figur noch unbekanntes Lotabweichungskomponenten für die Punkte 39-154, 110-154, 117-154 und EP und für vier Gruppen von Visuren die Refraktionsverbesserungen berechnet werden. Diese vier Gruppen wurden so definiert:

- a) Visuren vom Berg ins Tal;
- b) Visuren vom Tal auf den Berg;
- c) Visuren vom Tal zu Hangpunkten;
- d) Visuren im Talboden.

Für diese vier Visurengruppen ergaben sich folgende Refraktionsänderungen  $\Delta k$  als Zuschlag zum jeweiligen HARTL-Refraktionskoeffizienten:

$$\begin{aligned} \Delta k_a &= + 0,1319 & \Delta k_c &= - 0,1352 \\ \Delta k_b &= - 0,2441 & \Delta k_d &= - 0,0565 \end{aligned}$$

Als errechnete Lotabweichungskomponenten ergaben sich aus der Ausgleichung folgende Werte:

Punkt	$\xi$ cc	$\eta$ cc	$\nu$ cc	A
39-154	+ 16,0	+ 25,4	30,1	64 <sup>±21</sup> c
110-154	+ 29,9	- 2,8	30,1	394 <sup>±00</sup> c
117-154	+ 2,6	- 12,5	12,8	313 <sup>±02</sup> c
EP	+ 53,2	- 23,5	58,2	373 <sup>±48</sup> c

Tabelle 17

Diese Ergebnisse für die errechneten Lotabweichungskomponenten weisen darauf hin, daß wohl die Grundtendenz der Lotabweichungen so einigermaßen erzielt wurde, doch darf man diese Lotabweichungen nur als Näherungswerte betrachten. Während die  $\xi$ -Komponenten eher glaubwürdig erscheinen, fallen die  $\eta$ -Komponenten ein wenig aus dem Rahmen der aus den astronomischen Messungen abgeleiteten Werte. Es sind natürlich zum Teil etwas wenig Überbestimmungen vorhanden.

Mit den Ergebnissen dieser Ausgleichung wurden nun einerseits ellipsoidische Höhenunterschiede abgeleitet und andererseits genähert geoidische Höhenunterschiede.

In der Tabelle 18 ist eine detaillierte Gegenüberstellung der in den angeführten vier Varianten berechneten Höhenunterschiede enthalten. In diese Tabelle wurde auch der HARTL-Refraktionskoeffizient und der für die Höhenunterschiede im Bereich der kleinen Figur aus der Ausgleichung resultierende Refraktionskoeffizient aufgenommen.

Die ellipsoidischen und die geoidischen Höhenunterschiede bildeten die Grundlage für zwei Höhenausgleichungen nach Abschnitt 14 im Bereich der kleinen Figur. Für die Berechnung der ellipsoidischen Höhen wurde die Nivellementhöhe des Punktes 113-154 als Ausgangshöhe übernommen, bei der Berechnung der geoidischen Höhen wurden die Nivellementhöhen der Punkte 110-154, 113-154, 114-154, 117-154 und EF als Ausgangswerte verwendet.

In der nachfolgenden Tabelle 19 sind für die kleine Figur die Höhen aus dem Operat S-100, die geoidischen Höhen und die ellipsoidischen Höhen einander gegenüber gestellt. Die Differenz  $G_i - E_i$  ergibt dann die Abstände des Geoids vom Ellipsoid für die Punkte dieser Figur. Bezieht man diese Abstände auf den tiefst gelegenen Geoidpunkt, 108-154, erhält man einen Maximalabstand von 234 mm zwischen Geoid und Ellipsoid beim Punkt 117-154. Die Differenz  $G_i - H_i$  zeigt nun den Unterschied zwischen den Gebrauchshöhen aus dem Operat und den geoidischen Höhen. Die zum Teil großen Differenzen, 302 mm beim Punkt 47-154 und 87 mm beim Punkt 39-154, ergaben sich hauptsächlich durch die Berücksichtigung der Refraktionsänderungen.

Tabelle 18: Gegenüberstellung der Höhenunterschiede

Von-nach	H ö h e n u n t e r s c h i e d				Refraktionskoeffizient	
	konvent.	m. Lotabwg. HARTL-Rfr.	ellipsoid.	geoidisch	n. HARTL	a. Ausgl.
19- 87	-1522,9642	-1523,1628	.	.	+ 0,1221	.
	+1522,7205	+1523,1064	.	.	+ 0,1343	.
Mittel	1522,8424	1523,1346	.	.		
19- 90	-1160,8661	-1161,1562	.	.	+ 0,1221	.
	+1160,9912	.	.	.	+ 0,1314	.
Mittel	1160,9286	.	.	.		
36- 39	+ 712,1826	+ 712,0348	.	.	+ 0,1379	.
	- 712,2273	.	.	.	+ 0,1322	.
Mittel	712,2050	.	.	.		
36- 96	+ 103,9584	+ 104,2072	.	.	+ 0,1379	.
	- 103,9410	.	.	.	+ 0,1370	.
Mittel	103,9497	.	.	.		
36- 98	+ 775,3966	+ 775,4569	.	.	+ 0,1379	.
	- 775,4090	.	.	.	+ 0,1316	.
Mittel	775,4028	.	.	.		
36- 99	- 39,9386	- 39,8385	.	.	+ 0,1379	.
	+ 39,9164	.	.	.	+ 0,1382	.
Mittel	39,9275	.	.	.		
36-102	+ 35,2471	+ 35,2573	.	.	+ 0,1379	.
	- 35,2174	.	.	.	+ 0,1376	.
Mittel	35,2322	.	.	.		
36-105	+ 80,1009	+ 79,9940	.	.	+ 0,1379	.
	- 80,1723	.	.	.	+ 0,1372	.
Mittel	80,1366	.	.	.		
36-106	- 120,3701	- 120,4961	.	.	+ 0,1379	.
	+ 120,2535	.	.	.	+ 0,1388	.
Mittel	120,3118	.	.	.		
36-108	+ 112,1945	+ 112,3811	.	.	+ 0,1388	.
39-108	- 807,2070	.	- 807,2997	- 807,2326	+ 0,1323	+ 0,2642
	+ 807,2174	+ 807,2486	+ 807,2960	+ 807,2648	+ 0,1388	- 0,1054
Mittel	807,2122	.	807,2978	807,2487		
39-110	- 850,1185	.	- 850,2599	- 850,1607	+ 0,1323	+ 0,2642
	+ 850,0725	.	+ 850,2423	+ 850,1553	+ 0,1390	- 0,1052
Mittel	850,0955	.	850,2511	850,1580		
39-111	- 865,2973	.	- 865,5083	- 865,3803	+ 0,1322	+ 0,2640
	+ 865,2869	+ 865,3538	+ 865,5220	+ 865,4382	+ 0,1391	- 0,1050
Mittel	865,2921	.	865,5152	865,4096		
39- EP	- 902,0894	.	- 902,3334	- 902,1804	+ 0,1322	+ 0,2640
	+ 902,0558	.	+ 902,3797	+ 902,2283	+ 0,1394	- 0,1048
Mittel	902,0726	.	902,3566	902,2044		
47-108	-1179,4962	-1179,3962	-1179,6231	-1179,7231	+ 0,1293	+ 0,2612
	+1179,4093	+1179,1926	+1179,6126	+1179,8293	+ 0,1388	- 0,1054
Mittel	1179,4528	1179,2944	1179,6178	1179,7762		

Tabelle 18 (Fortsetzung)

H ö h e n u n t e r s c h i e d					Refraktionskoeffizient	
Von-nach	konvent.	m. Lotabwg. HARTL-Rfr.	ellipsoid.	geoidisch	n. HARTL	a. Ausglg.
47-111	-1220,3830	-1220,3735	-1220,5463	-1220,5578	+ 0,1293	+ 0,2612
	+1220,3634	+1220,1915	+1220,5150	+1220,6869	+ 0,1391	- 0,1050
Mittel	1220,3732	1220,2825	1220,5316	1220,6224		
47-114	-1255,9148	-1256,1052	-1256,3126	-1256,1015	+ 0,1293	+ 0,2612
	+1255,8708	+1255,8916	+1256,2755	+1256,2230	+ 0,1394	- 0,1048
Mittel	1255,8928	1255,9984	1256,2940	1256,1622		
47-115	- 975,6421	- 975,8082	- 975,9393	- 975,7594	+ 0,1293	+ 0,2612
	+ 975,4587	+ 975,6557	+ 975,8984	+ 975,6928	+ 0,1371	- 0,1070
Mittel	975,5504	975,7320	975,9198	975,7261		
47-116	-1093,5354	-1093,7417	-1093,9770	-1093,7707	+ 0,1293	+ 0,2612
	+1093,7661	+1093,6780	+1094,1136	+1094,2017	+ 0,1381	- 0,1061
Mittel	1093,6508	1093,7098	1094,0453	1093,9862		
53- 87	-1539,7436	-1539,9088	.	.	+ 0,1220	.
	+1539,6240	+1539,7585	.	.	+ 0,1343	.
Mittel	1539,6838	1539,8336	.	.		
53- 90	-1177,6047	-1177,8724	.	.	+ 0,1220	.
	+1177,3241	.	.	.	+ 0,1314	.
Mittel	1177,4644	.	.	.		
87- 90	+ 362,1006	+ 361,8918	.	.	+ 0,1343	.
	- 361,9538	.	.	.	+ 0,1314	.
Mittel	362,0272	.	.	.		
87- 95	- 251,7637	- 252,1333	.	.	+ 0,1343	.
	+ 251,6070	.	.	.	+ 0,1363	.
Mittel	251,6854	.	.	.		
102-108	- 147,3392	.	.	.	+ 0,1376	.
	+ 147,3876	+ 147,5744	.	.	+ 0,1388	.
Mittel	147,3634	.	.	.		
106-108	+ 8,0737	.	.	.	+ 0,1388	.
	- 8,0794	- 8,0203	.	.	+ 0,1388	.
Mittel	8,0766	.	.	.		
108-110	- 25,7133	- 25,7814	- 25,7749	- 25,7068	+ 0,1388	+ 0,0823
	+ 25,7181	.	+ 25,7799	+ 25,7246	+ 0,1390	+ 0,0825
Mittel	25,7157	.	25,7774	25,7157		
108-114	- 76,4307	- 76,7178	- 76,6155	- 76,3280	+ 0,1388	+ 0,0823
	+ 76,2909	+ 76,5009	+ 76,6033	+ 76,3926	+ 0,1394	+ 0,0829
Mittel	76,3608	76,6094	76,6094	76,3603		
108-116	+ 85,7633	+ 85,4530	+ 85,5765	+ 85,8868	+ 0,1388	+ 0,0823
	- 85,7127	- 85,5874	- 85,4638	- 85,5891	+ 0,1381	+ 0,0816
Mittel	85,7380	85,5202	85,5202	85,7380		
110-111	- 15,2141	.	- 15,2190	- 15,2093	+ 0,1390	+ 0,0825
	+ 15,2165	+ 15,2147	+ 15,2195	+ 15,2213	+ 0,1391	+ 0,0826
Mittel	15,2153	.	15,2192	15,2153		
110-113	- 64,7588	.	- 64,8203	- 64,7395	+ 0,1390	+ 0,0825
	+ 64,7000	+ 64,7972	+ 64,8167	+ 64,7195	+ 0,1395	+ 0,0830
Mittel	64,7294	.	64,8185	64,7295		

Tabelle 18 (2. Fortsetzung)

Von-nach	H ö h e n u n t e r s c h i e d				Refraktionskoeffizient	
	konvent.	m. Lotabwg. HARTL-Rfr.	ellipsoid.	geoidisch	n. HARTL	a. Ausglg.
110-116	+ 111,4566	.	+ 111,3728	+ 111,5432	+ 0,1390	+ 0,0025
	- 111,4705	- 111,3989	- 111,3122	- 111,3836	+ 0,1381	+ 0,0816
Mittel	111,4636	.	111,3425	111,4634		
110- EP	- 52,0160	.	- 52,0405	- 52,0111	+ 0,1390	+ 0,0825
	+ 51,9938	.	+ 52,0280	+ 51,9987	+ 0,1394	+ 0,0829
Mittel	52,0049	.	52,0342	52,0049		
111-113	- 49,5605	- 49,6372	- 49,6269	- 49,5498	+ 0,1391	+ 0,0826
	+ 49,5388	+ 49,6102	+ 49,6205	+ 49,5487	+ 0,1395	+ 0,0830
Mittel	49,5496	49,6237	49,6237	49,5492		
111-114	- 35,5674	- 35,7212	.	.	+ 0,1391	.
	.	.	.	.	.	.
111- EP	- 36,8076	- 36,8315	- 36,8306	- 36,8015	+ 0,1391	+ 0,0826
	+ 36,7863	.	+ 36,8289	+ 36,7867	+ 0,1394	+ 0,0829
Mittel	36,7970	.	36,8298	36,7941		
113-114	+ 14,0158	+ 13,9271	.	.	+ 0,1395	.
	.	.	.	.	.	.
113-116	+ 176,2242	+ 176,1152	+ 176,1393	+ 176,2483	+ 0,1395	+ 0,0830
	- 176,1957	- 176,1580	- 176,1339	- 176,1716	+ 0,1381	+ 0,0816
Mittel	176,2100	176,1366	176,1366	176,2100		
114-115	+ 280,2314	+ 280,2181	+ 280,2371	+ 280,2464	+ 0,1394	- 0,1048
	- 280,2186	- 280,2499	- 280,2420	- 280,2112	+ 0,1371	+ 0,0019
Mittel	280,2250	280,2340	280,2396	280,2288		
114-116	+ 162,2212	+ 162,2057	+ 162,2125	+ 162,2327	+ 0,1394	- 0,1048
	- 162,2224	- 162,2282	- 162,2240	- 162,2238	+ 0,1381	+ 0,0029
Mittel	162,2218	162,2170	162,2182	162,2282		
115-116	- 117,9701	- 118,0358	- 118,0157	- 117,9523	+ 0,1371	+ 0,0019
	+ 118,0263	+ 117,9940	+ 118,0304	+ 118,0643	+ 0,1381	- 0,1061
Mittel	117,9982	118,0149	118,0230	118,0083		
115-117	- 314,6095	- 314,6998	- 314,6771	- 314,5944	+ 0,1371	+ 0,0019
	+ 314,6393	.	+ 314,6772	+ 314,6834	+ 0,1396	- 0,1045
Mittel	314,6244	.	314,6772	314,6389		
116-117	- 196,6487	- 196,7160	- 196,6933	- 196,6260	+ 0,1381	+ 0,0029
	+ 196,6294	.	+ 196,6933	+ 196,6705	+ 0,1396	- 0,1045
Mittel	196,6390	.	196,6933	196,6482		
116- EP	- 163,4326	- 163,3622	- 163,3097	- 163,3796	+ 0,1381	+ 0,0816
	+ 163,4437	.	+ 163,2867	+ 163,4954	+ 0,1394	+ 0,0829
Mittel	163,4382	.	163,2982	163,4375		

Bei den geoidischen Höhenunterschieden erfolgte auch bei jenen Höhenwinkelmessungen, wo keine gemessene Schrägstrecke vorlag, die Höhenunterschiedsberechnung unter Verwendung von Schrägstrecken, die aus den Koordinaten und ellipsoidischen Höhen der Visurenepunkte abgeleitete wurden.

Tabelle 19: Zusammenstellung der ausgeglichenen Höhen

Punkt	$H_i$ in m	$G_i$ in m	$E_i$ in m	$G_i - E_i$ in m	$G_i - H_i$ in m
39-154	1855,280	1855,367	1855,462	- 0,094	+ 0,087
47-154	2215,226	2215,528	2215,542	- 0,014	+ 0,302
108-154	1030,920	1030,916	1031,020	- 0,104	- 0,004
110-154	<u>1005,199</u>	<u>1005,199</u>	1005,239	- 0,040	.
111-154	989,980	989,980	990,021	- 0,041	0
113-154	<u>940,405</u>	<u>940,405</u>	<u>940,405</u>	0	.
114-154	<u>1007,049</u>	<u>1007,049</u>	1006,945	+ 0,104	.
115-154	1234,638	1234,660	1234,568	+ 0,092	+ 0,022
116-154	1116,640	1116,655	1116,550	+ 0,105	+ 0,015
117-154	<u>920,004</u>	<u>920,004</u>	919,874	+ 0,130	.
EP	<u>953,186</u>	<u>953,186</u>	953,193	- 0,007	.

Die für die Höhenberechnungen verwendeten Ausgangshöhen (Nivellementhöhen) sind in Tabelle 19 unterstrichen.

Die Berücksichtigung der Lotabweichungen hat bei den Höhenunterschieden nicht unbedingt die Wirkung, daß die Differenz der Absolutbeträge der Höhenunterschiede von Hin- und Rückmessung bzw. gleich bedeutend die Summe  $\Delta H_{i,k} + \Delta H_{k,i}$  kleiner wird als ohne Berücksichtigung. Vielfach wird sie sogar größer, da dann erst die Refraktionseinflüsse voll zum Vorschein kommen. In der Tabelle 20 sind die Extremwerte dieser Beträge für die vier Arten von Höhenunterschieden zusammengestellt und die Anzahl der Höhenunterschiede in bestimmten Größenbereichen dieser Summe bzw. Differenz.

Art	$\Delta H_{i,k} + \Delta H_{k,i}$		Anzahl der Höhenunterschiede für die $\Delta H_{i,k} + \Delta H_{k,i} =$				
	von	bis	0-2 cm	2-5 cm	5-10 cm	10-20cm	über 20 cm
$\Delta H'$	+0,231	-0,281	13	12	5	7	3
$\Delta E'$	-0,022	-0,217	0	5	2	4	3
$\Delta E$	+0,137	-0,041	16	6	1	2	0
$\Delta G$	+0,431	-0,067	8	5	4	6	2

Tabelle 20

Daß bei den ellipsoidischen Höhenunterschieden trotzdem noch einige größere Summenwerte auftreten, zeigt, daß für die betreffenden Höhenunterschiede die Refraktionsermittlung nicht ganz zutreffend ist.



18,5 Berechnungen nach Annahme der restlichen Lotabweichungen

Nach Durchführung der in den vorhergehenden Unterabschnitten besprochenen Berechnungen wurden versuchsweise für die restlichen Punkte des Testnetzes Lotabweichungen angenommen, wie sie entsprechend den Gelände- verhältnissen ungefähr zu erwarten sind. Eine echte Interpolation wurde wegen der hierfür notwendigen umfangreichen Lotkrümmungsberechnungen nicht vorgenommen.

Mit den gemessenen und angenommenen Lotabweichungen wurden unter Verwendung der HARTL-Refraktion die Höhenunterschiede berechnet und anschließend nach Abschnitt 13 die Fehlergleichungen für die Ermittlung der Refraktions- änderungen aufgestellt.

Auf der Grundlage dieser Fehlergleichungen wurden drei verschiedene Ausgleichungen nach unterschiedlicher Zuordnung der Beobachtungen zu den zu ermittelnden Refraktionsänderungen durchgeführt.

In der ersten Ausgleichung wurde für das gesamte Testnetz eine einheitliche Refraktionsänderung mit  $\Delta k = -0,0609$  ermittelt. Die Quadratsumme der Widersprüche vor der Ausgleichung ging von  $[pww] = 122,88$  durch diese Aus- gleichung auf  $[pvv] = 75,51$  herunter.

Bei der zweiten Ausgleichung wurden die Vertikalwinkelmessungen in sechs Gruppen unterteilt:

- a) Visuren von Gipfel zu Gipfel
- b) Visuren vom Gipfel in den Hang und zurück
- c) Visuren vom Gipfel ins Tal und zurück
- d) Visuren vom Hang in den Hang
- e) Visuren vom Hang ins Tal und zurück
- f) Visuren im Tal.

Als Ergebnis dieser Ausgleichung bewegten sich die Refraktionsänderungen  $\Delta$  zwischen den Werten  $-0,0342$  und  $-0,1202$  und es ergab sich  $[pvv] = 60,87$ .

Eine weitere Spezialisierung in der Art, daß bei den Gruppen b), c) und e) die Rückvisuren eigenen Refraktionsänderungen zugeordnet würden, ist nicht möglich, da wegen der fast gleichen Größe der Koeffizienten der Unbekannten bei der Hin- und Rückvisur in den einzelnen Fehlergleichungen die zugeord- neten Normalgleichungen praktisch singular werden.

In einer dritten Ausgleichung wurden 28 Refraktionsänderungen berechnet. Hierbei wurden im wesentlichen die Vertikalwinkelmessungen standpunktweise zusammengefaßt, wobei auch nach der Art der Visuren unterschieden wurde. In einigen Fällen mußten jedoch gleich geartete Visuren mehrerer Standpunkte einer Refraktionsunbekannten zugeordnet werden, da ansonsten die Überbe- stimmung zu gering gewesen wäre. Bei dieser Ausgleichung ergaben sich die

Refraktionsänderungen  $\Delta k$  mit Werten zwischen  $+0,1787$  und  $-0,2258$  mit  $[pvv] = 49,88$ . Es ist natürlich selbstverständlich, daß beim Einführen einer größeren Anzahl von Unbekannten in ein Ausgleichungsverfahren eine bessere Anpassung erreicht wird und daher die Summe  $[pvv]$  kleiner werden muß.

Von	Nach	Glg.(18.1) mit Refraktion		durch Ausgleichung	
		nach HARTL	aus Ausglg.	besser	schlechter
EP	110	- 19,99 <sup>cc</sup>	- 1,06 <sup>cc</sup>	18,93 <sup>cc</sup>	.
36	99	+ 0,74 <sup>cc</sup>	+ 13,82 <sup>cc</sup>	.	13,08 <sup>cc</sup>
39	108	- 11,76 <sup>cc</sup>	- 1,08 <sup>cc</sup>	10,68 <sup>cc</sup>	.
47	108	- 28,11 <sup>cc</sup>	+ 5,34 <sup>cc</sup>	22,77 <sup>cc</sup>	.
47	111	- 29,11 <sup>cc</sup>	- 25,06 <sup>cc</sup>	4,05 <sup>cc</sup>	.
47	116	- 9,27 <sup>cc</sup>	+ 15,47 <sup>cc</sup>	.	6,20 <sup>cc</sup>
87	90	- 38,07 <sup>cc</sup>	- 6,90 <sup>cc</sup>	31,17 <sup>cc</sup>	.
87	95	- 53,86 <sup>cc</sup>	- 5,52 <sup>cc</sup>	48,34 <sup>cc</sup>	.
90	92	- 33,75 <sup>cc</sup>	- 20,21 <sup>cc</sup>	13,54 <sup>cc</sup>	.
90	95	- 1,31 <sup>cc</sup>	+ 22,46 <sup>cc</sup>	.	21,15 <sup>cc</sup>
90	96	- 17,74 <sup>cc</sup>	+ 11,54 <sup>cc</sup>	6,20 <sup>cc</sup>	.
90	98	- 21,30 <sup>cc</sup>	+ 0,89 <sup>cc</sup>	20,41 <sup>cc</sup>	.
92	95	+ 41,63 <sup>cc</sup>	+ 7,09 <sup>cc</sup>	34,54 <sup>cc</sup>	.
95	96	- 6,54 <sup>cc</sup>	- 14,39 <sup>cc</sup>	.	7,85 <sup>cc</sup>
95	98	- 6,21 <sup>cc</sup>	- 15,19 <sup>cc</sup>	.	8,98 <sup>cc</sup>
96	98	+ 13,26 <sup>cc</sup>	+ 3,40 <sup>cc</sup>	9,86 <sup>cc</sup>	.
96	99	+ 22,77 <sup>cc</sup>	+ 10,00 <sup>cc</sup>	12,77 <sup>cc</sup>	.
96	102	- 22,98 <sup>cc</sup>	- 37,05 <sup>cc</sup>	.	14,07 <sup>cc</sup>
98	99	+ 54,91 <sup>cc</sup>	+ 46,56 <sup>cc</sup>	8,35 <sup>cc</sup>	.
98	102	- 27,13 <sup>cc</sup>	- 11,29 <sup>cc</sup>	15,84 <sup>cc</sup>	.
102	108	+ 14,21 <sup>cc</sup>	+ 28,06 <sup>cc</sup>	.	13,85 <sup>cc</sup>
106	108	- 3,55 <sup>cc</sup>	- 6,39 <sup>cc</sup>	.	2,84 <sup>cc</sup>
108	110	- 15,30 <sup>cc</sup>	- 3,21 <sup>cc</sup>	12,09 <sup>cc</sup>	.
108	116	- 15,87 <sup>cc</sup>	+ 16,79 <sup>cc</sup>	.	0,92 <sup>cc</sup>
110	111	- 28,58 <sup>cc</sup>	- 9,96 <sup>cc</sup>	18,62 <sup>cc</sup>	.
110	113	- 82,09 <sup>cc</sup>	- 44,49 <sup>cc</sup>	37,60 <sup>cc</sup>	.
113	116	- 11,55 <sup>cc</sup>	- 1,23 <sup>cc</sup>	10,32 <sup>cc</sup>	.
116	117	- 5,01 <sup>cc</sup>	+ 7,61 <sup>cc</sup>	.	2,60 <sup>cc</sup>

Tabelle 21 : Überprüfung mit Gleichung (18.1)

Von	Nach	Konform reduzierte Strecke in m			Differenz in mm		
		konvent.	mit Lotabweichung		1 - 2	1 - 3	2 - 3
			HARTL-Refr.	mit $\Delta k$			
19	87	3349,0983	3348,9655	3348,9636	+132,8	+134,7	+ 1,9
19	90	5402,5956	5402,5468	5402,5483	+ 48,8	+ 47,3	- 1,5
36	99	1603,9350	1603,9374	1603,9379	- 2,4	- 2,9	- 0,5
36	102	533,1367	533,1351	533,1357	+ 1,6	+ 1,0	- 0,6
39	102	2562,0878	2562,0924	2562,1062	- 4,6	- 18,4	- 13,8
39	108	1474,5374	1474,5100	1474,5147	+ 27,4	+ 22,7	- 4,7
39	111	2767,2088	2767,1747	2767,1832	+ 34,1	+ 25,6	- 8,5
47	108	4610,6036	4610,6441	4610,6665	- 40,5	- 62,9	- 22,4
47	111	4021,2261	4021,2536	4021,2742	- 27,5	- 48,1	- 20,6
47	116	4707,8861	4707,8724	4707,9015	+ 13,7	- 15,4	- 29,1
53	87	5312,8726	5312,8293	5312,8279	+ 43,3	+ 44,7	+ 1,4
53	90	5122,1445	5122,0508	5122,0767	+ 93,7	+ 67,8	- 25,9
87	90	2505,2390	2505,2532	2505,2496	- 14,2	- 10,6	+ 3,6
87	95	4195,6865	4195,6703	4195,6720	+ 16,2	+ 14,5	- 1,7
90	92	2017,3902	2017,3732	2017,3742	+ 17,0	+ 16,0	- 1,0
90	95	3552,2917	3552,2581	3552,2531	+ 33,6	+ 38,6	+ 5,0
90	96	4551,0314	4550,9961	4550,9988	+ 35,3	+ 32,6	- 2,7
90	98	6263,0888	6263,0874	6263,0875	+ 1,4	+ 1,3	- 0,1
92	95	1934,0920	1934,0936	1934,0935	- 1,6	- 1,5	+ 0,1
95	96	1248,9641	1248,9611	1248,9601	+ 3,0	+ 4,0	+ 1,0
95	98	3059,7455	3059,7679	3059,7502	- 22,4	- 4,7	+ 17,7
96	98	3099,4122	3099,4322	3099,4181	- 20,0	- 5,9	+ 14,1
96	99	2667,6498	2667,6420	2667,6409	+ 7,8	+ 8,9	+ 1,1
96	102	4371,4984	4371,4954	4371,4942	+ 3,0	+ 4,2	+ 1,2
98	99	2593,5692	2593,5520	2593,5373	+ 17,2	+ 31,9	+ 14,7
98	102	3605,2677	3605,2516	3605,2067	+ 16,1	+ 61,0	+ 44,9
102	108	3172,6366	3172,6284	3172,6275	+ 8,2	+ 9,1	+ 0,9
106	108	1083,6005	1083,6009	1083,6009	- 0,4	- 0,4	0,0
108	110	1212,7724	1212,7714	1212,7711	+ 1,0	+ 1,3	+ 0,3
108	116	5281,3991	5281,4026	5281,4057	- 3,5	- 6,6	- 3,1
110	111	1041,0362	1041,0359	1041,0359	+ 0,3	+ 0,3	0,0
110	113	2097,0579	2097,0547	2097,0552	+ 3,2	+ 2,7	- 0,5
110	EP	1055,9836	1055,9810	1055,9812	+ 2,6	+ 2,4	- 0,2
113	116	2328,1638	2328,1694	2328,1728	- 5,6	- 9,0	- 3,4
116	117	1458,2287	1458,2192	1458,2206	+ 9,5	+ 8,1	- 1,4

Tabelle 22 : Gegenüberstellung verschieden reduzierter Strecken

Wendet man die Gleichung (2,28) auf Höhenwinkel an, erhält man, wenn die Höhenwinkel der Hin- und Rückvisur auf die selben Höhenbezugspunkte reduziert sind, die Bedingung

$$B_{i,k} + B_{k,i} + \gamma_{i,k}(E) - [\delta_{i,k} + \epsilon_{i,k} + \delta_{k,i} + \epsilon_{k,i}] = 0 \quad \dots (18.1)$$

Diese Gleichung wurde auf jene Fälle der beidseitig gemessenen Vertikalwinkel angewendet, die wegen der Streckenmessung bereits auf die Höhenbezugspunkte der Streckenmessung reduziert waren und zwar einmal unter Verwendung der HARTL-Refraktion und dann mit der aus der Ausgleichung stammenden Refraktion. Die Lotabweichungsanteile  $\epsilon_{i,k}$  wurden aus den gemessenen und den angenommenen Lotabweichungen abgeleitet.

Die Zusammenstellung in Tabelle 21 zeigt, daß der Widerspruch bei Anwendung der Gleichung (18.1) unter Verwendung der HARTL-Refraktion in der Mehrzahl der Fälle höher ist als bei Verwendung der Refraktion aus der Ausgleichung, in einigen Fällen sogar beträchtlich. Selbstverständlich sind hier auch noch die Beobachtungsfehler der Vertikalwinkel der Hin- und Rückvisuren enthalten und es darf auch nicht übersehen werden, daß die Lotabweichungen für einige Punkte nur angenommen worden sind.

In einem weiteren Berechnungsgang wurden die gemessenen Strecken neu reduziert, einmal unter Verwendung der Höhenwinkel mit der HARTL-Refraktion unter Berücksichtigung der Lotabweichungen, dann mit den Höhenwinkeln, korrigiert bezüglich der Lotabweichungen und den aus der Ausgleichung mit den 28 Refraktionsänderungen resultierenden Refraktionswerten. Die Tabelle 22 enthält die Gegenüberstellung dieser beiden Streckenreduktionsarten im Vergleich mit den konventionell reduzierten Strecken.

Größere Unterschiede zeigten sich im Vergleich mit den in der Tabelle 13 aus dem Unterabschnitt 18,2 ausgewiesenen Strecken aus ellipsoidischen Höhen bei jenen Strecken, die zu den Punkten 39 und 47 gehen. Dies läßt die Vermutung aufkommen, daß die in der Tabelle 19 ausgewiesenen ellipsoidischen Höhen dieser beiden Punkte doch nicht ganz repräsentativ sein dürften. Eine der Ursachen hierfür könnte natürlich in der gemeinsamen Ermittlung der Refraktionsänderungen mit den restlichen Lotabweichungskomponenten liegen.

Aus den Beobachtungen des Testnetzes wurden schließlich zwei Polygone (ohne Zwischenorientierungen) herausgelöst. Hierbei waren nur die Zugsabschlußfehler von Interesse und nicht die aus den verschiedenen Berechnungen stammenden Koordinaten. Beide Züge wurden in drei Varianten durchgerechnet:

- a) Beobachtete Richtungen, Strecken konventionell reduziert.
- b) Richtungen bezüglich Lotabweichungen (gemessen bzw. angenommen) korrigiert, Streckenreduktion unter Berücksichtigung der Lotabweichungen, aber mit HARTL-Refraktion.
- c) Richtungen bezüglich Lotabweichungen korrigiert, Streckenreduktion unter Berücksichtigung der Lotabweichungen und der aus der Ausgleichung stammenden Refraktionsänderungen  $\Delta k$ .

Der Zug 1 hat eine Länge von rund 34 471 m und führt über die Punkte 53-19-87-90-92-95-98-96-102-39-111-47.

Der Zug 2 hat eine Länge von rund 33 638 m und führt über die Punkte 53-19-87-95-98-99-36-102-108-110-113-116-47.

Die Abschlußfehler betragen:

Variante	Zug 1				Zug 2			
	$f_{\beta}$	$f_y$	$f_x$	$f_s$	$f_{\beta}$	$f_y$	$f_x$	$f_s$
a	- 10,7 <sup>cc</sup>	+201 mm	- 45 mm	206 mm	+ 19,1 <sup>cc</sup>	- 6 mm	-149 mm	149 mm
b	- 12,5 <sup>cc</sup>	- 78 mm	+ 32 mm	84 mm	+ 6,3 <sup>cc</sup>	- 25 mm	- 46 mm	52 mm
c	- 12,5 <sup>cc</sup>	- 67 mm	+ 11 mm	68 mm	+ 6,3 <sup>cc</sup>	- 7 mm	- 23 mm	24 mm

Tabelle 23

Hier zeigt sich, daß der lineare Abschlußfehler durch die Berücksichtigung der Lotabweichungen deutlich verringert wird. Eine weitere Verringerung durch die zusätzliche Berücksichtigung der Refraktionsänderungen ist wohl vorhanden, sie ist aber nicht mehr so stark.

Der Winkelabschlußfehler vergrößert sich beim Zug 1 durch die Berücksichtigung der Lotabweichungen ein wenig, hingegen fällt er beim Zug 2 auf rund ein Drittel herunter. Wenn man jedoch das geringe Ausmaß der beiden Winkelabschlußfehler beachtet, muß man beide Ergebnisse als Zufallsergebnisse bewerten.

19 ZUSAMMENFASSUNG

Wesentlich ist eine klare Unterscheidung, für welchen Zweck eine Höhenberechnung durchgeführt werden soll. Daraus ergibt sich dann, welche Höhenart benötigt wird. Ellipsoidische Höhen werden benötigt für alle Anwendungen von Höhen im Zusammenhang mit der Lageberechnung, vor allem jedoch für die Horizontierung elektronisch gemessener Schrägstrecken und für ihre Reduktion in die Rechenfläche. Geoidische Höhen dienen für alle technischen Belange.

Ganz streng betrachtet müßte man photogrammetrische Auswertungen als Sonderfälle betrachten, bei denen einerseits für die Orientierung der Modelle ellipsoidische Höhen benötigt würden, während andererseits z. B. für die Ermittlung von Schichtenlinien geoidische Höhen notwendig wären.

Die Unterlassung der Berechnung ellipsoidischer Höhen kann im Bergland, wie das Beispiel Rauris deutlich zeigt, in den horizontalen Strecken und damit auch in den Lagekoordinaten Fehler bis in den Dezimeterbereich ergeben.

Eine wesentliche Voraussetzung für die Ermittlung ellipsoidischer Höhen ist die Kenntnis von aus astronomischen Messungen abgeleiteten Lotabweichungen bei möglichst vielen Punkten. Dies ist auch eine Voraussetzung dafür, daß man die Refraktionseinflüsse mittels eines Ausgleichsverfahrens einigermaßen annähern kann, was aber auch dann nötig ist, wenn man in einer Berechnungsgruppe an sich keine ellipsoidischen Höhen für die Reduktion von Strecken benötigen würde.

Die Ableitung eines Refraktionswinkels für jede einzelne Vertikalwinkelmessung aus zusätzlich zu erhebenden meteorologischen Daten ist wegen des hierfür benötigten hohen Aufwandes nur für einzelne Sonderarbeiten wirtschaftlich zu vertreten, aber nicht für den allgemeinen Feldeinsatz. Die Annahme eines allgemein definierten Refraktionskoeffizienten, wie z. B. des Refraktionskoeffizienten nach HARTL, führt in vielen Fällen zu einer nicht befriedigenden Lösung, vor allem bei bodennahen Visuren. Eine Ermittlung von Refraktionsänderungen für Gruppen von Visuren durch eine Ausgleichung erweist sich daher als eine relativ günstige Näherungslösung, wenn auch die Kenntnis der aktuellen Refraktion für jede einzelne Vertikalwinkelmessung notwendig wäre. Anzustreben ist die Erreichung der Möglichkeit, beim Vorliegen von für einen allgemeinen Feldeinsatz tauglichen Geräten, für jede einzelne Vertikalwinkelmessung den tatsächlichen Refraktionswinkel direkt messen zu können.

Bei nahezu horizontalen Visuren ist es zwar für die Streckenreduktion mehr oder weniger belanglos, wie man die gemessenen Vertikalwinkel reduziert bzw. welche Art von Höhenunterschieden für die Streckenreduktion verwendet wird, da die sich hierbei ergebenden Differenzen praktisch unerheblich sind. Hingegen ist es in solchen Fällen für die Höhenberechnung besonders wichtig, die Refraktionsanomalien wenigstens weitgehend zu beseitigen. Bei bodennahen Visuren kann als Folge der Refraktionseinflüsse zwischen den Absolutwerten der Höhenunterschiede von Hin- und Rückvisur bei Verwendung eines einheitlichen Refraktionskoeffizienten, wie z. B. jenes von HARTL, eine Differenz von einigen Dezimetern auftreten. In Extremfällen sind auch schon bei Visurlängen von 1 bis 2 km Differenzen bis etwa 90 cm und mehr aufgetreten! Hierbei sind jedoch die Auswirkungen der Lotabweichungseinflüsse sehr gering und es würde daher im Flachland eine sehr weitmaschige Lotabweichungsbestimmung im allgemeinen ausreichend sein und eine anschließende einfache Interpolation für die dazwischen liegenden Punkte praktisch hinreichend genaue Ergebnisse liefern.

Im Bergland ist hingegen unbedingt eine sehr engmaschige Lotabweichungsbestimmung notwendig. Die aus einer Ausgleichung zugleich mit den Refraktionsänderungen errechneten Lotabweichungskomponenten können oft nur als grobe Näherung betrachtet werden, da vielfach eine viel zu geringe Anzahl von Überbestimmungen vorliegt und zusätzlich sich auch noch andere Einflüsse störend bemerkbar machen können. Es ist daher im Bergland anzustreben, für jeden Festpunkt die Lotabweichung entweder aus astronomischen Messungen oder einer gleichwertigen Bestimmung abzuleiten oder wenigstens durch eine strenge Interpolation zu ermitteln. Hierbei darf nicht übersehen werden, daß die Lotabweichungen nicht bloß für die Reduktion der gemessenen Vertikalwinkel, sondern auch im Netz niederer Ordnung vor allem bei Steilvisuren zur Reduktion der Richtungsmessungen notwendig sind.

Die Berechnung von ellipsoidischen Höhen ist nicht bloß dann notwendig, wenn diese für die Reduktion elektronisch gemessener Schrägstrecken benötigt werden. Da für die Berechnung genähert geoidischer Höhenunterschiede die aus Koordinaten abgeleiteten Horizontalstrecken nicht verwendet werden dürfen, besonders bei größeren Visurneigungen, ist es auch in jenen Fällen, wo allein geoidische Höhen berechnet werden sollen, notwendig, vorher ellipsoidische Höhen oder wenigstens Höhenunterschiede zu ermitteln, um mit deren Hilfe von der Bezugsfläche unabhängige schräge Raumstrecken zwischen den Visurendpunkten ableiten zu können, wenn keine gemessenen Schrägstrecken vorhanden sind. Es ist daher auch in diesen Fällen die Kenntnis der Lotabweichungen notwendig, obwohl sie für die Berechnung der geoidischen Höhenunterschiede selbst nach dem hier verwendeten Näherungsverfahren nicht benötigt würden. Sie dienen hier einerseits für die Berechnung der not-

wendigen Refraktionsanomalien und weiters natürlich für die Berechnung der ellipsoidischen Höhenunterschiede zur Ermittlung der unabhängigen Raumstrecken.

Bei Verwendung der Formeln für eine direkte Berechnung von auch einseitig verwendbaren geoidischen Höhenunterschieden ohne das hier angewandte Näherungsverfahren würden eine Reihe von Daten benötigt, die im allgemeinen nicht bekannt sind und die derzeit auch nicht für eine Massenarbeit auf wirtschaftliche Art und Weise ermittelt werden können.

Ideal wäre natürlich der Aufbau zweier getrennter Höhensysteme, eines ellipsoidischen und eines geoidischen Höhensystems, die selbstverständlich immer wieder miteinander in Verbindung gebracht werden müßten. Man erhielte dann als Nebenprodukt eine detaillierte Beschreibung des Geoids in seiner relativen Lage zu unserem Bezugsellipsoid.

Die Entscheidung darüber, ob das gegenwärtige System der Gebrauchshöhen beibehalten werden soll oder ob man neu das ellipsoidische und das geoidische Höhensystem aufbaut, erfordert primär die Berücksichtigung wirtschaftlicher Fakten und liegt somit auf einer anderen Ebene. Hierbei wäre vor allem abzuwägen, welche finanzielle Mehrbelastung der Aufbau dieser beiden Höhensysteme mit sich brächte und ob der finanzielle Mehraufwand mit dem dadurch erreichbaren Genauigkeitsgewinn in Einklang stünde, noch dazu, wo in Österreich bereits ein sehr dichtes Festpunktfeld im System der Gebrauchskoordinaten vorliegt, wodurch der Rahmen für die künftigen Arbeiten bereits festgelegt ist.

Beim Vorliegen eines ellipsoidischen Höhensystems könnten in ganz Österreich die für die Lageberechnung benötigten Strecken richtig in die Bezugsfläche reduziert werden, was derzeit ja nicht der Fall ist.

Im Gegensatz zu diesem Idealfall wäre es eine unbedingte Notwendigkeit und auch verhältnismäßig leichter zu erreichen, für die einzelnen Berechnungsgruppen lokal definierte ellipsoidische Höhen für die Horizontierung gemessener Schrägstrecken und für die Berechnung der Raumstrecken zur Ermittlung der genähert geoidischen Höhenunterschiede zu berechnen, wenn man bei der Lageberechnung zusätzliche Koordinatenspannungen vermeiden will. Immerhin muß damit gerechnet werden, daß im Bergland der Unterschied zwischen den in herkömmlicher Weise reduzierten Strecken und den richtig reduzierten Strecken bis in den Dezimeterbereich gehen kann und je nach Neigung und Richtung der gemessenen Strecke verschieden groß ist.



LITERATURHINWEISE

- [1] BAHNERT, G.: Möglichkeiten und Grenzen der trigonometrischen Höhenmessung, Vermessungstechnik, 18. Jahrg. 1970, Nr. 7, S. 263-266.
- [2] BAHNERT, G.: Zum Refraktionseinfluß auf die trigonometrische Höhenmessung, Vermessungstechnik, 19. Jahrg. 1971, Nr. 12, S. 441-444.
- [2 a] BAHNERT, G.: Zur Licht- und Laserstrahlableitung durch terrestrische Refraktion, Vermessungstechnik, 21. Jahrg. 1973, Nr. 11, S. 406-407.
- [3] BODEMÜLLER, H.: Beitrag zur Messung und Auswertung vertikaler Schweregradienten, ZfV., 85. Jahrg. 1960, Nr. 4, S. 101-112.
- [4] BREPETERBAUER, K.: Über mögliche Refraktionsanomalien infolge von Schichtenneigungen, ÖZfV., 53. Jahrg. 1965, Nr. 4, S. 113-119.
- [5] BREPETERBAUER, K.: Beiträge zur Distanzmessung mit Mikrowellen, ÖZfV., 57. Jahrg. 1969, Nr. 1, S. 3-13.
- [6] BREPETERBAUER, K.: Horizontale Temperaturgradienten als Ursache von vertikalen und lateralen Refraktionsanomalien, ÖZfV., 58. Jahrg. 1970, Nr. 6, S. 177-185.
- [7] BREPETERBAUER, K.: Physik der Atmosphäre, Geowissenschaftliche Mitteilungen der Technischen Hochschule in Wien, Heft 1, S. 5-22, Wien, 1973.
- [8] BROCKS, K.: Meteorologische Hilfsmittel für die geodätische Höhenmessung, ZfV., 75. Jahrg. 1950, S. 71-76, 110-116 und 145-152.
- [9] BRUNNER, F.: Beiträge zum trigonometrischen Nivellement im Gebirge, Dissertation, 25. Oktober 1972, Technische Hochschule in Wien.
- [10] BRUNNER, F.: Lotabweichungseinfluß bei der trigonometrischen Höhenmessung mit steilen Visuren, ÖZfV., 61. Jahrg. 1973/74, Nr. 4, S. 126-134.
- [11] BRUNNER, F.: Trigonometrisches Nivellement - Geometrisches Nivellement, ÖZfV., 62. Jahrg. 1974/75, Nr. 2, S. 49-60.
- [12] BRUNNER, F.: Natürliche Massenbewegungen aus der Sicht des Geodäten, Geowissenschaftliche Mitteilungen der Technischen Hochschule in Wien, Heft 1, S. 151-170, Wien, 1973.
- [12 a] BUNDESAMT FÜR EIICH- UND VERMESSUNGSWESEN: Dienstvorschrift Nr. 8 "Die Österreichischen Meridianstreifen (Gauß-Krüger-Projektion)", 5. Auflage, Wien 1975.
- [13] DEICHL, K.: Elektromagnetische Entfernungsmessung und atmosphärische Refraktion, ZfV., 94. Jahrg. 1969, Nr. 10, S. 419-423.
- [13 a] ELMINGER, A.: Das Geoid in der Schweiz, Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Heft III/IV-1975, S. 171-176.
- [14] EMBACHER, W.: Die orthometrische Höhenkorrektur in begrenzten Vermessungsbereichen, ÖZfV., 49. Jahrg. 1961, Nr. 6, S. 169-173.
- [15] EMBACHER, W.: Über die Azimutreduktionen wegen Lotkrümmung, ÖZfV., 50. Jahrg. 1962, Nr. 4, S. 122-126.
- [16] EMBACHER, W.: Die Lotkrümmung und das Gravimeterversuchsfeld am Buschberg, ÖZfV., 53. Jahrg. 1965, Nr. 1, S. 1-13 und Nr. 2, S. 45-53.
- [17] EMBACHER, W.: Über das Messen und Wägen im Gebirge, ÖZfV., 58. Jahrg. 1970, Nr. 3, S. 69-82.
- [18] EMBACHER, W.: Das trigonometrische Nivellement und die mittlere Krümmung der Niveaulächen, ÖZfV., 58. Jahrg. 1970, Nr. 6, S. 169-177.

- [19] EMBACHER, W.: Das trigonometrische Nivellement, der Refraktionskoeffizient und die mittlere Krümmung der Niveaulächen, Aktuelle Entwicklungen im Vermessungswesen und Raumplanung, gesammelte Vorträge der fünften Fachtagung für Vermessungswesen, S. 33-70, Wien 1971.
- [19 a] EMBACHER, W.: Der Abstand zweier Niveaulächen aus Vertikalwinkeln, Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Heft III/IV-1975, S.207-209.
- [19 b] ERNST, J.: Ein Beitrag zur Hochgebirgsgeodäsie, Dissertation, April 1975, Universität Innsbruck.
- [20] FINSTERWALDER, R.: Bestimmung der Refraktion durch meteorologische Messung, ZfV., 74. Jahrg. 1949, S. 111-113.
- [21] FINSTERWALDER, R.: Über Art und Genauigkeit von trigonometrisch bestimmten Höhen, ZfV., 76. Jahrg. 1951, Nr. 5, S. 129-137.
- [22] FINSTERWALDER, R.: Eine Möglichkeit der trigonometrischen Höhenbestimmung, ZfV., 93. Jahrg. 1968, Nr. 3, S. 99-104.
- [23] GROTEN, E.: Neue Verfahren der astronomischen und physikalischen Geodäsie, ZfV., 94. Jahrg. 1969, Nr. 12, S. 481-488.
- [24] HOPFNER, F.: Grundlagen der Höheren Geodäsie, Springer Verlag, Wien 1949.
- [25] HRADILEK, L.: Bestimmung der relativen Lotabweichungen und des Refraktionskoeffizienten beim Ausgleich trigonometrisch gemessener Höhenetze, Studia geophysica et geodetica, 2. Jahrg. 1958, S. 101-119 und 3. Jahrg. 1959, S. 334-356.
- [26] HRADILEK, L.: Höhenbestimmung aus elektrooptisch gemessenen Längen, Studia geophysica et geodetica, 2. Jahrg. 1958, S. 206-211 und 6. Jahrg. 1962, S. 317-329.
- [27] HRADILEK, L.: Genaue trigonometrische Höhenmessung und Raumtriangulation in der Praxis, ZfV., 93. Jahrg. 1968, Nr. 10, S. 404-410.
- [28] HRADILEK, L.: Bestimmung der Refraktion in den Schweizer Alpen, ZfV., 95. Jahrg. 1970, Nr. 1, S. 1-8.
- [29] HRADILEK, L.: Bestimmung der Refraktion in Prag, ZfV., 96. Jahrg. 1971, Nr. 9, S. 379-384.
- [30] HRADILEK, L.: Bestimmung der Refraktion in der Südslowakei, ZfV., 98. Jahrg. 1973, Nr. 6, S. 243-252.
- [31] HUBENY, K.: Horizontalentfernung und Höhenunterschied aus Schrägstrecken, ÖZfV., 62. Jahrg. 1974/75, Nr. 3, S. 125-127.
- [32] JORDAN/EGGERT/ZHEISSL: Handbuch der Vermessungskunde, 10. Auflage, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, III. Band, 1956; V. Band, 1969; VI. Band, 1966.
- [33] KILLIAN, K.: Was könnte eine Trilateration in der Luft leisten? ÖZfV., 60. Jahrg. 1972, Nr. 2, S. 30-43.
- [34] KLEIN, K.-H. und CERTEL, W.: Refraktions- und Genauigkeitsuntersuchungen bei trigonometrischer Höhenübertragung in langseitigen Polygonzügen, Vermessungstechnik, 18. Jahrg. 1970, Nr. 1, S. 15-18.
- [35] KOBOLD, F.: Höhenwinkelmessung, Lotabweichungen und Meereshöhen, ZfV., 80. Jahrg. 1955, Nr. 8, S. 255-262.
- [36] KOBOLD, F.: Die astronomischen Nivellements in der Schweiz, ZfV., 82. Jahrg. 1957, Nr. 4, S. 97-103, Nr. 5, S. 152-160.

- [37] LEDERSTEGGER, K.: Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen, Sonderheft 12 der ÖZfV., Wien 1951.
- [38] LEDERSTEGGER, K.: Die Näherungsmethoden des astronomischen Nivellements und das Geoid im Nordteil des Meridianbogens Großenhain-Kremsmünster-Pola, ÖZfV., 39. Jahrg. 1951, Nr. 2, S. 37-45, Nr. 3, S. 73-80, Nr. 4, S. 108-112.
- [39] LEDERSTEGGER, K.: Projektion und Lotabweichung, ÖZfV., 40. Jahrg. 1952, Nr. 6, S. 174-187.
- [40] LEDERSTEGGER, K.: Zur Definition der Lotabweichungen und Laplaceschen Widersprüche, ÖZfV., 41. Jahrg. 1953, Nr. 4, S. 97-105.
- [41] LEDERSTEGGER, K.: Die Reduktion des astronomischen und ellipsoidischen Azimutes auf den geoidischen Zielpunkt, ÖZfV., 42. Jahrg. 1954, Nr. 1, S. 17-23.
- [42] LEDERSTEGGER, K.: Zur Theorie der trigonometrischen Höhenmessung, ÖZfV., 43. Jahrg. 1955, Nr. 2, S. 33-39 und Nr. 3, S. 65-73.
- [43] LEDERSTEGGER, K.: Die Minimalssysteme der metrischen Reduktion, ÖZfV., 44. Jahrg. 1956, Nr. 2, S. 43-50.
- [44] LEDERSTEGGER, K.: Lotkrümmungsreduktion und absolute Lotabweichung, ZfV., 82. Jahrg. 1957, Nr. 2, S. 33-40.
- [45] LEDERSTEGGER, K.: Das moderne Problem der Erdfigur, ÖZfV., 46. Jahrg. 1958, Nr. 1, S. 1-7 und Nr. 2, S. 33-38.
- [46] LEDERSTEGGER, K.: Die Berechnung der vertikalen dynamischen Korrekturen, ÖZfV., 46. Jahrg. 1958, Nr. 5, S. 129-136.
- [47] LEDERSTEGGER, K.: Das Problem der Gebrauchshöhen, Festschrift 150 Jahre Österreichischer Grundkataster, S. 99-108, Wien 1967.
- [48] LITSCHAUER, J.: Zur Ausgleichung trigonometrischer Höhenmessungen nach vermittelnden Beobachtungen, ÖZfV., 37. Jahrg. 1949, Nr. 1-3, S. 55-59
- [49] LITSCHAUER, J.: Über die Grundlagen eines staatlichen Höhennetzes, ÖZfV., 39. Jahrg. 1951, Nr. 6, S. 163-174.
- [50] LITSCHAUER, J.: Zur Frage der Geoidgestalt in Österreich, ÖZfV., 41. Jahrg. 1953, Nr. 6, S. 161-172.
- [51] LÖSCHNER, F.: Trigonometrische Höhenmessung für Ingenieurbauvorhaben im Hochgebirge, Festschrift Eduard DOLEZAL zum Neunzigsten Geburtstag, S. 449-491, Wien 1952.
- [52] MALY, L.: Die örtliche Refraktion, ÖZfV., 55. Jahrg. 1967, Nr. 1, S. 1-6 und Nr. 2, S. 35-44.
- [53] MEIER, H.-K.: Berechnete Lotabweichungen als Hilfsmittel für Trigonometrie, Höhennetze, ZfV., 83. Jahrg. 1958, Nr. 6, S. 202-206.
- [54] MITTER, J.: Das österreichische Höhennetz innerhalb des europäischen Netzes. Das Festpunktfeld, gesammelte Vorträge der ersten Fachtagung für Vermessungswesen, S. 35-46, Wien 1966.
- [55] MITTER, J.: Grundlagen, derzeitiger Stand und Möglichkeiten der elektrischen Streckenmessung, Aktuelle Entwicklungen im Vermessungswesen und Raumplanung, gesammelte Vorträge der fünften Fachtagung für Vermessungswesen, S. 33-70, Wien 1971.
- [56] MORITZ, H.: Zur Reduktion gemessener Strecken und beobachteter Winkel wegen Refraktion, ZfV., 86. Jahrg. 1961, Nr. 7, S. 246-252.

- [57] MORITZ, H.: Zur Geometrie der Refraktion, ÖZfV., 50. Jahrg. 1962, Nr. 1, S. 3-13.
- [58] PELIKAN, M.: Berechnung des Brechungswinkels mittels des Brechungsindex, Studia geophysica et geodetica, 8. Jahrg. 1964, S. 209-237.
- [59] RAMSAYER, K.: Vergleich verschiedener Schwerereduktionen von Nivellements, ZfV., 79. Jahrg. 1954, Nr. 5, S. 140-150.
- [60] RAMSAYER, K.: Grundlagen der Höhennessung, ZfV., 80. Jahrg. 1955, Nr. 12, S. 421-432.
- [61] RAMSAYER, K.: Die Genauigkeit der Schwerereduktion von Nivellements, ZfV., 85. Jahrg. 1960, Nr. 4, S. 112-123.
- [62] RINNER, K.: Über die Reduktion großer elektronisch gemessener Entfernungen, ZfV., 81. Jahrg. 1956, Nr. 2, S. 47-55.
- [63] RINNER, K.: Geometrie mit Raumstrecken, ZfV.: 83. Jahrg. 1958, Nr. 3, S. 91-105.
- [64] ROHRER, H.: Die rechnerische Auswertung trigonometrischer Höhennessungen, ÖZfV., 26. Jahrg. 1929, Nr. 1, S. 2-12.
- [65] STOLITZKA, G.: Eine Methode zur Verringerung des Refraktionseinflusses im Nivellement, ÖZfV., 52. Jahrg. 1964, Nr. 5, S. 137-153.
- [66] ULBRICH, K.: Die Entwicklung des österreichischen Gebrauchshöhennetzes und ein zukünftiger Nivellementkataster, Grundlagenvermessungen des Österreichischen Bundesvermessungsdienstes, gesammelte Vorträge der vierten Fachtagung für Vermessungswesen, S. 57-78, Wien 1970.
- [67] VINCENTY, T.: Zur Reduktion von schrägen Entfernungen auf das Ellipsoid, ZfV., 100. Jahrg. 1975, Nr. 4, S. 179-180.
- [68] WOLF, H.: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Abschnitt 318, Vermessungstechnische Rundschau, 25. Jahrg. 1963, S. 50-53 und S. 105-107.
- [69] WOLF, H.: Dreidimensionale Geodäsie, Herkunft, Methodik und Zielsetzung, ZfV., 88. Jahrg. 1963, Nr. 3, S. 109-116.
- [70] WOLF, H.: Zur Modell-Bildung in der Dreidimensionalen Geodäsie, ZfV., 94. Jahrg. 1969, Nr. 7, S. 257-264.
- [71] WOLF, H.: Über die Einführung von Normalhöhen, ZfV., 99. Jahrg. 1974, Nr. 1, S. 1-5.
- [72] WUNDERLIN, N.: Lotabweichungen, Geoid und Meereshöhen in den Schweizer Alpen, Astron.-Geodät. Arbeiten in der Schweiz, herausgeg. v. d. Schweizerischen Geodätischen Kommission, 26. Band, 1967.
- [73] WUNDERLIN, N.: Verwendung rechnerisch bestimmter Refraktionswinkel in einem Höhenwinkelnetz, ZfV., 95. Jahrg. 1970, Nr. 11, S. 480-488.
- [74] ZEGGER, J.: Trigonometrische Höhenmessung: Genauigkeitsstufen, Fehlergrenzen, Gewichte, ÖZfV., 62. Jahrg. 1974/75, Nr. 4, S. 169-174.

NACHWORT

Ich bedanke mich bei Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. K. Bretterbauer von der Technischen Universität in Wien herzlichst für die wertvollen Anregungen zu dieser Arbeit im Verlaufe von mehreren längeren Gesprächen.

Dem Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen in Wien bin ich zu Dank verpflichtet für die Erlaubnis, verschiedene Messungsergebnisse aus Triangulierungsoperaten und auch die Ergebnisse der Lotabweichungsbestimmungen durch die Abteilung K 2 für diese Arbeit auswerten zu dürfen. Besonderer Dank gebührt dem Bundesamt für die Ermöglichung des Druckes dieser Arbeit.

## Sonderhefte zur Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie

- Sonderheft 20: H. G. Jerie, *Weitere Analogien zwischen Aufgaben der Mechanik und der Ausgleichsrechnung*. 24 Seiten mit 14 Abbildungen, 1960. Preis S 32,- (DM 5,50).
- Sonderheft 21: Mader, *Die zweiten Ableitungen des Newton'schen Potentials eines Kugelsegments – Topographisch berechnete partielle Geoidhebungen. – Tabellen zur Berechnung der Gravitation unendlicher, plattenförmiger, prismatischer Körper*. 36 Seiten mit 11 Abbildungen, 1960. Preis S 42,- (DM 7,50).
- Sonderheft 22: Moritz, *Fehlertheorie der Graphisch-Mechanischen Integration – Grundzüge einer allgemeinen Fehlertheorie im Funktionenraum*. 53 Seiten mit 6 Abbildungen, 1961. Preis S 52,- (DM 9,-).
- Sonderheft 23: Rinner, *Studien über eine allgemeine, voraussetzungslose Lösung des Folgebildenschlusses*. 44 Seiten, 1960. Preis S 48,- (DM 8,-).
- Sonderheft 24: *Hundertjahrfeier der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung 23. bis 25. Oktober 1963*. 125 Seiten mit 12 Abbildungen, 1964. Preis S 120,- (DM 20,-).
- Sonderheft 25: *Proceedings of the International Symposium Figure of the Earth and Refraction; Vienna, March 14<sup>th</sup>–17<sup>th</sup>, 1967*. 342 Seiten mit 150 Abbildungen, 1967. Preis S 370,- (DM 64,-).
- Sonderheft 26: Waldhäusl, *Funktionale Modelle der Streifen- und Streifenblockausgleichung mit einfachen und Spline-Polynomen für beliebiges Gelände*. 106 Seiten, 1973. Preis S 100,- (DM 15,-).
- Sonderheft 27: Meyer, *Über die transalpine Ölleitung*, 26 Seiten, 1974. Preis S 70,- (DM 10,-).
- Sonderheft 28: *Festschrift Karl Ledersteger*. 317 Seiten, 1970. Preis S 200,- (DM 30,-).
- Sonderheft 29: Peters, *Problematik von Toleranzen bei Ingenieur- sowie Besitzgrenzvermessungen*, 227 Seiten, 1974. Preis S 120,- (DM 18,-). (Vergriffen.)
- Sonderheft 30: Bauer, *Aufsuchen oberflächennaher Hohlräume mit dem Gravimeter*, 140 Seiten, 1975. Preis S 100,- (DM 15,-).
- Sonderheft 31: Ackerl u. Foramitti, *Empfehlungen für die Anwendung der Photogrammetrie im Denkmalschutz, in der Architektur und Archäologie*. 78 Seiten, 41 Abbildungen, 1976. Preis S 120,- (DM 18,-).

## OEEPE, Sonderveröffentlichungen

- Nr. 1: Rinner, *Analytisch-photogrammetrische Triangulation eines Teststreifens der OEEPE*. 31 Seiten, 1962. Preis S 42,-.
- Nr. 2: Neumaier und Kasper, *Untersuchungen zur Aerotriangulation von Überweitwinkelaufnahmen*, 4 Seiten, 2 Seiten Abbildungen, 1965. Preis S 10,-.
- Nr. 3: Stickler und Waldhäusl, *Interpretation der vorläufigen Ergebnisse der Versuche der Kommission C der OEEPE aus der Sicht des Zentrums Wien*, 4 Seiten, 8 Tabellen, 1967. Preis S 20,-.

**Österreichische Staatskartenwerke**  
**Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen**  
**A-1080 Wien, Krotenthallergasse 3, Tel. 43 89 35**

Österr. Karte 1 : 50 000 - ÖK 50 mit Wegmarkierung (Wanderkarte) .....	S 42,—
Österr. Karte 1 : 50 000 - ÖK 50 mit Straßenaufdruck oder ohne Straßenaufdruck .....	S 36,—
Österr. Karte 1 : 25 000 (Vergrößerung der Österr. Karte 1 : 50 000) - ÖK 25 V mit Wegmarkierung .....	S 53,—
Österr. Karte 1 : 200 000 - ÖK 200 mit Straßenaufdruck oder ohne Straßenaufdruck .....	S 39,—
Österr. Karte 1 : 100 000 (Vergr. der Österr. Karte 1 : 200 000) - ÖK 100 V mit Straßenaufdruck .....	S 53,—
<b>Generalkarte von Mitteleuropa 1 : 200 000</b> Blätter mit Straßenaufdruck (nur für das österr. Staatsgebiet vorgesehen) ...	S 27,—
<b>Gebiets- und Sonderkarten</b>	
Übersichtskarte von Österreich 1 : 500 000, mit Namensverzeichnis, gefaltet .....	S 103,—
Übersichtskarte von Österreich 1 : 500 000, ohne Namensverzeichnis, flach .....	S 68,—
Namensverzeichnis allein .....	S 31,—
Übersichtskarte von Österreich 1 : 500 000, Politische Ausgabe mit Namensverzeichnis, gefaltet .....	S 103,—
Übersichtskarte von Österreich 1 : 500 000, Politische Ausgabe ohne Namensverzeichnis, flach .....	S 68,—
<b>Kulturgüterschutzkarten:</b>	
Österreichische Karte 1 : 50 000 je Kartenblatt .....	S 121,—
Burgenland 1 : 200 000 .....	S 157,—
Katalog über Planungsunterlagen .....	S 200,—
Einzelblatt .....	S 12,—
Österreichische Luftbildkarte 1 : 10 000, Übersicht .....	S 100,—

**Neuerscheinungen**

**Österreichische Karte 1 : 25 000 V**

Blatt 12, 13, 76, 118, 136, 137, 138, 140, 141, 142

**Österreichische Karte 1 : 100 000 V**

Blatt 47/14, 48/12, 49/15, 49/16

**Österreichische Karte 1 : 50 000**

191 Kirchbach i. Stmk.                      192 Feldbach                                      209 Bad Radkersburg

**Österreichische Karte 1 : 200 000**

Blatt 49/14 Budweis                      Blatt 49/16 Brünn                                      Blatt 49/17 Lundenburg

**Umgebungs- und Sonderkarten**

Hohe Wand und Umgebung 1 : 50 000                      Umgebung Wien 1 : 50 000  
 Gesäuse 1 : 50 000

**In letzter Zeit berichtigte Ausgaben der österreichischen Karte 1 : 50 000**

132 Trofaiach	182 Spittal a. d. Drau	205 Sankt Paul/Lavanttal
162 Köflach	183 Radenthein	206 Eibiswald
	188 Wolfsberg	